



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.



Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

3

Dritter Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.
1843.

Inhaltsverzeichniss des dritten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung. | Heft. Seite.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Statik und Mechanik.

Astronomie.

Physik.

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Mittheilungen

von dem

Herrn Doctor Stern

zu Göttingen.

Aus den Acta societatis scientiarum Fennicae T. 1. Auszug aus einer Abhandlung des Hrn. Prof. v. Schulten.

Um aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel C eines ebenen Dreieckes die dritte Seite c zu finden, nimmt man gewöhnlich die Formeln $\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{ab} \cdot \sin \frac{1}{2}C}{a-b}$,

$$c = \frac{a-b}{\cos x}.$$

Man kann aber folgende Formeln anwenden, die mehr Bequemlichkeit darbieten. Nennt man nemlich die halbe Differenz der zwei anderen Winkel φ, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}C \ldots 1)$$

Die Formel

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

kann man aber vermittelst der bekannten Relationen

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}C + \sin^2 \tfrac{1}{2}C = 1$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}C - \sin^2 \tfrac{1}{2}C = \cos C$$

in folgende verwandeln:

$$c = \sqrt{[a^2(\cos^2 \tfrac{1}{2}C + \sin^2 \tfrac{1}{2}C) + b^2(\cos^2 \tfrac{1}{2}C + \sin^2 \tfrac{1}{2}C) - 2ab(\cos^2 \tfrac{1}{2}C - \sin^2 \tfrac{1}{2}C)]}$$

$$= \sqrt{[(a-b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}C + (a+b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}C]}$$

also

$$c = (a-b)\cos\tfrac{1}{2}C.\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C}\ldots 2)$$

oder

$$c = (a+b)\sin\tfrac{1}{2}C.\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \cot^2\tfrac{1}{2}C}\ldots 3)$$

Aus 1) folgt aber

$$\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}C} = \sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sin\varphi}\ldots 4)$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \cot^2\tfrac{1}{2}C} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}\ldots 5)$$

also

$$c = \frac{(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\varphi}\ldots 6)$$

oder

$$c = \frac{(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\varphi}\ldots 7)$$

Um zu bestimmen, in welchen Fällen man der Gleichung 6) oder der Gleichung 7) den Vorzug zu geben hat, setze man die Gleichungen 1), 6) und 7) unter folgende Form:

$$\lg\operatorname{tg}\varphi = \lg(a-b) - \lg(a+b) + \lg\cot\tfrac{1}{2}C = \alpha$$
$$\lg c = \lg(a-b) + \lg\cos\tfrac{1}{2}C - \lg\sin\varphi = \beta - \lg\sin\gamma$$
$$\lg c = \lg(a+b) + \lg\sin\tfrac{1}{2}C - \lg\cos\varphi = \gamma - \lg\cos\varphi$$

wo das Zeichen lg sich auf die gewöhnlichen Logarithmen bezieht. Differenziirt man, und setzt den Modulus $0{,}434\ldots = m$, so erhält man

$$\frac{md\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = d\alpha$$
$$d\lg c = d\beta - md\varphi\cot\varphi = d\beta - d\alpha\cos^2\varphi$$
$$d\lg c = d\gamma + md\varphi\operatorname{tg}\varphi = d\gamma + d\alpha\sin^2\varphi$$

Bezeichnet man nun durch $\pm\alpha_1$, $\pm\beta_1$, $\pm\gamma_1$ die bekannten Gränzen der kleinen Fehler, die möglicherweise bei der Bestimmung von α, β, γ begangen sind und durch l_1, l_2 die davon abhängenden Gränzen der bei Bestimmung von lg c begangenen Fehler, je nachdem dieser Werth durch die Formel 6) oder die Formel 7) bestimmt worden ist, so hat man

$$l_1 = \pm(\beta_1 + \alpha_1\cos^2\varphi)$$
$$l_2 = \pm(\gamma_1 + \alpha_1\sin^2\varphi)$$

Da man nun $\beta_1 = \gamma_1$ setzen kann, so ist $l_2 > l_1$ oder $l_2 < l_1$, je nachdem $\sin^2\varphi > \cos^2\varphi$ oder $\sin^2\varphi < \cos^2\varphi$ ist, d. h. je nachdem $\varphi \gtrless 45^\circ$ ist.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine, Oct. 1841.

Bemerkung zu einer Stelle in Poisson's Traité de mécanique von James Booth, Professor der Mathem. in Bristol College.

Bei der Bestimmung der Hauptdrehungsaxen eines Körpers bemerkt Poisson, dass eine Hauptaxe, die durch den Schwerpunkt geht, auch eine solche für jeden Punkt ist, den man längs dieser Linie annimmt. Wenn er aber hinzusetzt, dass die zwei anderen Hauptaxen ihre Richtung ändern können, je nachdem der Punkt sich ändert, so scheint dies auf einem Irrthum zu beruhen. Seine Worte lauten (T. 2. p. 91):

„Les intégrales que cette équation renferme pourront changer de valeur avec la position du point O; en sorte que le long de l'axe Ox, les deux autres axes principaux ne seront pas en général paralléles à eux mêmes."

Bei Poisson heisst die Gleichung, durch welche der Winkel $\mathfrak{D}$ bestimmt wird,

$$(\cos^2 \mathfrak{D} - \sin^2 \mathfrak{D}) \int xy\,dm + \sin \mathfrak{D} \cos \mathfrak{D} \left(\int x^2 dm - \int y^2 dm\right) = 0$$

welche aber in folgende einfachere verwandelt werden kann:

$$\operatorname{tg} 2\mathfrak{D} = \frac{2\int xy\,dm}{\int (x^2 - y^2)\,dm}.$$

Von den drei Coordinaten x, y, z des Elements dm ist aber z die einzige, welche sich ändert, wenn der Punkt z längs der Axe der z fortrückt. Da aber der obige Ausdruck für den Werth von tg $2\mathfrak{D}$ unabhängig von z ist, so folgt hieraus, dass der Winkel $\mathfrak{D}$ constant ist, d. h. dass die Hauptaxen für jeden Punkt längs der Linie sich parallel bleiben. — Herr Booth beweisst alsdann diesen Satz auch noch auf direktem Wege.

II.

Bestimmung des Schwerpunkts eines Polygons aus den Coordinaten seiner Ecken.

Von

Herrn T. J. Eschweiler

Director der höheren Bürgerschule in Köln a. R.

Der Abstand des Schwerpunkts eines beliebigen Dreiecks von einer in seiner Ebene angenommenen geraden Linie ist bekannt-

lich dem dritten Theile der Summe der Abstände seiner drei Ecken von dieser Linie gleich. Nun seien (Taf. I Fig. 1.) $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ die Eckpunkte irgend eines Polygons von n Seiten, und dasselbe sei durch Diagonallinien, die alle von A_1 ausgehen, in Dreiecke getheilt. Die Abscissen jener Ecken, in Beziehung auf zwei in der Ebene des Polygons willkührlich angenommene und auf einander senkrechte Coordinaten-Axen seien, der Ordnung nach, $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$, die Ordinaten derselben $y_1 y_2 y_3 \dots y_n$, so ist die Abscisse des Schwerpunkts von $\Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, sein Flächeninhalt (d. i. Trapez $P_2 A_2 A_3 P_3$ — Trpz $P_2 A_2 A_1 P_1$ — Trpz $P_1 A_1 A_3 P_3$) $= \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)]$, daher das Produkt beider, oder das Moment des $\Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3)\,[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)]$; eben so ist das Moment des $\Delta A_1 A_3 A_4 = \frac{1}{6}(x_1 + x_3 + x_4)\,[y_1(x_3 - x_4) + y_3(x_4 - x_1) + y_4(x_1 - x_3)]$, u. s. w. bis zum Moment des $\Delta A_1 A_{n-1} A_n$, welches

$$= \frac{1}{6}(x_1 + x_{n-1} + x_n)\,[y_1(x_{n-1} - x_n) + y_{n-1}(x_n - x_1) + y_n(x_1 - x_{n-1})].$$

Addirt man diese Produkte so zusammen, dass Alles, was mit ein und derselben Ordinate multiplizirt ist, vereinigt wird, so erhält man als Summe der Momente aller Dreiecke:

$$\frac{1}{6}[y_1(x_2 - x_n)(x_1 + x_2 + x_n) + y_2(x_3 - x_1)(x_2 + x_3 + x_1) + y_3(x_4 - x_2)(x_3 + x_4 + x_2) + \dots\dots + y_n(x_1 - x_{n-1})(x_n + x_1 + x_{n-1})]$$

oder in kürzerer Bezeichnung: $\frac{1}{6}\Sigma^n{}_1 y_k(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k-1} + x_k + x_{k+1})$, wo für k alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu setzen sind *). Der Flächeninhalt des ganzen Polygons ergiebt sich, wenn man auf gleiche Weise die obigen Ausdrücke für den Inhalt der einzelnen Dreiecke addirt,

$$= \frac{1}{2}[y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \dots\dots + y_n(x_1 - x_{n-1})]$$

oder kürzer: $\frac{1}{2}\Sigma^n{}_1 y_k(x_{k+1} - x_{k-1})$.

Dividirt man nun jene Momentensumme durch diesen Flächeninhalt, so erhält man für die Abscisse X des Schwerpunkts des ganzen Polygons den Ausdruck:

$$X = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Sigma^n{}_1 y_k(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k-1} + x_k + x_{k+1})}{\Sigma^n{}_1 y_k(x_{k+1} - x_{k-1})},$$

welcher zur Berechnung dieser Abscisse die einfache Regel enthält:

„Man multiplizire die Ordinate des mittlern von „je drei aufeinander folgenden Eckpunkten des „Polygons mit der Differenz der Abscissen der „beiden übrigen und addire sämmtliche Produkte; „multiplizire dann jedes von diesen noch mit der „Summe der Abscissen aller drei genannten Ecken, „und addire auch diese Produkte; dividire endlich

---

*) Dabei ist für $x_0 \dots x_n$, für $x_{n+1} \dots x_1$ zu nehmen.

„die erste Produktensumme in die letztere, so ist „der dritte Theil des erhaltenen Quotienten die „Abscisse des Schwerpunkts.“

Der Ausdruck für die Ordinate Y dieses Punkts folgt gleich aus dem der Abscisse durch blosse Vertauschung der x und y, also

$$Y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Sigma^n{}_1 x_k(y_{k+1} - y_{k-1})\,(y_{k-1} + y_k + y_{k+1})}{\Sigma^n{}_1 x_k(y_{k+1} - y_{k-1})}.$$

Die Nenner beider Ausdrücke sind identisch.

Beispiel. Für ein Sechseck sei gegeben:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = 5, & y_1 = 12, \text{ so ist } & y_1(x_2 - x_6) = +12 \,.\, 1 = +12; \\
x_2 = 14, & y_2 = 19 & y_2(x_3 - x_1) = +19 \,.\, 15 = +285; \\
x_3 = 20, & y_3 = 14 & y_3(x_4 - x_2) = +14 \,.\, 15 = +210; \\
x_4 = 29, & y_4 = 17 & y_4(x_5 - x_3) = +17 \,.\, 13 = +221; \\
x_5 = 33, & y_5 = 6 & y_5(x_6 - x_4) = -6 \,.\, 16 = -96; \\
x_6 = 13, & y_6 = 2 & y_6(x_1 - x_5) = -2 \,.\, 28 = -56; \\
 & & \overline{+576}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
12(x_6 + x_1 + x_2) = +12 \,.\, 32 = +384 \\
285(x_1 + x_2 + x_3) = +285 \,.\, 39 = +11115 \\
210(x_2 + x_3 + x_4) = +210 \,.\, 63 = +13230 \\
221(x_3 + x_4 + x_5) = +221 \,.\, 82 = +18122 \\
-96(x_4 + x_5 + x_6) = -96 \,.\, 75 = -7200 \\
-56(x_5 + x_6 + x_1) = -56 \,.\, 51 = -2856 \\
\overline{+32795}
\end{array}$$

Daher die Abscisse des Schwerpunkts $= \frac{1}{3} \cdot \frac{32795}{576} = 18{,}978 \ldots\ldots;$

die Ordinate ergiebt sich eben so $= \frac{1}{3} \cdot \frac{17400}{576} = 10{,}069 \ldots.$

III.

Bestimmung des Schwerpunkts im sphärischen Dreieck.

Von dem

Herrn T. J. Eschweiler

Director der höheren Bürgerschule in Köln a. R.

Der Abstand des Schwerpunkts irgend einer Fläche von einer angenommenen Ebene wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man die Summe der Momente aller Elemente jener Fläche in Beziehung auf diese Ebene durch die Summe dieser Elemente selbst, d. h. durch den Inhalt der ganzen Fläche dividirt.

Nun sei (Taf. I. Fig. 2.) ABC ein sphärisches Dreieck, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, O der Mittelpunkt der Kugel. Dieses Dreieck sei durch Bogen grösster Kreise, die alle durch A gehen, wie z. B. AD, in Elemente erster Ordnung, diese wieder durch Bogen kleiner Kreise, deren Ebenen alle auf AO senkrecht stehen, in Elemente zweiter Ordnung getheilt. F sei der Mittelpunkt eines dieser kleinen Kreise, und dieser schneide den Bogen AD in E, so ist das bei E liegende Element zweiter Ordnung als ein unendlich kleines Rechteck zu betrachten, dessen auf AD liegende Seite (wenn man $AO = EO = 1$, $\measuredangle AOE = \varphi$ setzt) $= d\varphi$, die andere Seite aber (wenn $\measuredangle CAD = \omega$) $= \sin\varphi \,.\, d\omega$, so dass die Grösse dieses Elements selbst $= \sin\varphi \,.\, d\varphi \,.\, d\omega$. Der Abstand des Punktes (oder Elements) E von der auf dem Radius AO senkrechten Ebene HOK ist $OF = \cos\varphi$, daher das Moment des Elements bei E in Beziehung auf diese Ebene $= \sin\varphi \cos\varphi \,.\, d\varphi \,.\, d\omega$.

Dieser Ausdruck ist nun, um ihn auf die ganze Fläche des Dreiecks auszudehnen, zweimal zu integriren, indem dabei zuerst φ, dann ω als veränderlich betrachtet wird. Die erste zwischen den Grenzen 0 und AD ausgeführte Integration giebt das Moment des Elements erster Ordnung ADD', die zweite Integration, zwischen 0 und $\measuredangle CAB$ ausgeführt, giebt das Moment des ganzen Dreiecks ABC. Es ist nun $\int \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi = \frac{1}{4}\int \sin 2\varphi \,.\, d(2\varphi)$ $= \text{Const} - \frac{1}{4}\cos 2\varphi$; und dieses Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = AD$ genommen, giebt $\frac{1}{4}(1 - \cos 2AD)$ oder $\frac{1}{2}(\sin AD)^2$, so dass also das Moment des Elements ADD' in Beziehung auf die Ebene HOK $= \frac{1}{2}(\sin AD)^2 \,.\, d\omega$.

Um diesen Ausdruck von Neuem zu integriren, ist es zweckmässig, statt ω und des davon abhängigen Bogens AD, den Bo-

gen CD als veränderliche Grösse einzuführen. Zu dem Ende sei Seite $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\measuredangle BAC=\alpha$, $ABC=\beta$, $ACB=\gamma$ gesetzt; nach einer bekannten Relation ist im sphärischen Dreieck ABC: $\cos b \cos\gamma = \sin b \,.\, \operatorname{cotg} CD - \sin\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\omega$, daher, wenn man differenziirt: $\sin b \sin\omega^2 . d(CD) = \sin\gamma . \sin CD^2 . d\omega$, oder da $\sin CD : \sin AD = \sin\omega : \sin\gamma$, auch $\sin b \sin\gamma\, d(CD) = (\sin AD)^2 . d\omega$, folglich das zu integrirende Moment des Elements $ADD' = \frac{1}{2}\sin b \sin\gamma . d(CD)$. Das Integral hiervon giebt: $\frac{1}{2}\sin b \sin\gamma . CD + \text{Const.}$ und wird dasselbe von 0 bis $CB=a$, als Grenzen für CD, ausgedehnt, so ergiebt sich als Moment des ganzen Dreiecks ABC

$$\tfrac{1}{2}a . \sin b \sin\gamma.$$

Setzt man den sphärischen Winkelexcess dieses Dreiecks, d. i. $\alpha+\beta+\gamma-\pi=e$, so ist für den Halbmesser 1 auch der Flächeninhalt des Dreiecks $=e$, folglich der senkrechte Abstand seines Schwerpunkts von der auf OA senkrechten Ebene $HOK = \frac{a \sin b \sin\gamma}{2e}$, oder auch, da $\sin b : \sin c = \sin\beta : \sin\gamma$, derselbe Abstand $= \frac{a \sin c \sin\beta}{2e}$. Eben so ist der Abstand des Schwerpunkts von einer durch O gehenden und auf dem Radius OB senkrechten Ebene $= \frac{b \sin a \sin\gamma}{2e} = \frac{b \sin\alpha \sin c}{2e}$; endlich die Entfernung dieses Punktes von einer durch O senkrecht gegen OC gelegten Ebene $= \frac{c \sin a \sin\beta}{2e} = \frac{c \sin\alpha \sin b}{2e}$. Hierdurch ist die Lage des Schwerpunkts völlig bestimmt und kann auf folgende Weise leicht construirt werden:

ABC (Taf. I. Fig. 3.) sei das gegebene Dreieck, DEF das polare oder reciproke; die Kugelhalbmesser OD, OE, OF stehen also auf den respectiven Ebenen BOC, AOC, AOB, so wie die Halbmesser OA, OB, OC auf den Ebenen EOF, FOD, DOE senkrecht. Auf OD sei ein Stück OP genommen, dessen Länge sich zu $OD(=1)$ eben so verhält, wie die Seite BC (oder a) zum doppelten Ueberschuss der Peripherie eines grössten Kreises über die Summe der drei Seiten des Polardreiecks EDF, (oder, was dasselbe ist, dem doppelten Ueberschuss der drei Winkel des Dreiecks ABC über zwei Rechte, also, nach obiger Bezeichnung, zu $2e$, wodurch $OP = \frac{a}{2e}$. Desgl. seien auf OE und OF von O an die Stücke OQ und OR so genommen, dass $2e : b = OE : OQ$, $2e : c = OF : OR$, wodurch $OQ = \frac{b}{2e}$, $OR = \frac{c}{2e}$. Wird dann über diesen drei Stücken OP, OQ und OR, die sich demnach wie $a : b : c$ verhalten, ein Parallelepipedum construirt, so wird die dem Mittelpunkt der Kugel O gegenüberliegende Ecke G dieses Parallelepipedums der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein.

Denn da AO auf der Ebene EOF senkrecht steht, diese Ebene aber der Ebene PG parallel ist, so steht AO auch auf dieser letztern Ebene senkrecht, und wenn daher AO diese Ebene im Punkte p trifft, so ist Op dem senkrechten Abstande des in dieser Ebene liegenden Punkts G von der Ebene EOF gleich. Da nun

das Dreieck OPp bei p rechtwinkelig ist, so ist $Op = OP . \cos DOA$; nach obiger Construction ist aber $OP = \frac{a}{2e}$, und im sphärischen Dreieck ADB, worin $BD = 90°$, ist $\cos AD$ oder $\cos AOD = \sin AB \cos ABD = \sin c \sin \beta$, daher $Op = \frac{a \sin c \sin \beta}{2e}$; daher liegt der Schwerpunkt in der Ebene PG. Auf gleiche Art wird bewiesen, dass er in den Ebenen QG und RG liegt; er ist also der Durchschnittspunkt G dieser drei Ebenen.

Da $\sin c \sin \beta$ die Länge des von A auf die Ebene BOC gefällt Lothes ausdrückt, so kann man auch noch auf folgende Art verfahren. Auf AO nehme man das Stück $Op =$ der vierten Proportionale zu $2e$, a und dem aus A auf die Ebene BOC gefällten Loth, lege hierauf durch p eine auf AO senkrechte Ebene; auf gleiche Weise verfahre man auf den Halbmessern BO und CO; so erhält man drei auf diesen Halbmessern senkrechte Ebenen, dieselben, welche in der vorigen Construction die Ecke G des Parallelepidums bildeten und deren Durchschnittspunkt G, also der Schwerpunkt ist.

Will man die Lage dieses Punkts durch schiefwinkelige Coordinaten in Bezug auf die drei Ebenen BOC, AOC, AOB bestimmen, so denke man sich durch G eine der BOC parallele, daher auf OD senkrechte Ebene gelegt. Das von ihr auf OA von O an abgeschnittene Stück ist die mit OA parallele Coordinate des Punkts G; sie sei durch x bezeichnet; das von derselben Ebene auf OD von O an abgeschnittene Stück ist $x . \cos AOD$. Projizirt man auf dasselbe drei von O bis G aufeinander folgende Kanten des Parallelepipedums, so erhält man:

$$x . \cos AOD = OP + OQ \cos EOD + OR \cos FOD \text{ oder}$$

$$x \sin c \sin \beta = \frac{a}{2e} - \frac{b}{2e} \cos \gamma - \frac{c}{2e} \cos \beta, \text{ daher}$$

$x = \frac{a - b \cos \gamma - c \cos \beta}{2e \sin c \sin \beta}$, oder, wenn man der Symmetrie wegen das constante Produkt aus dem Sinus einer Dreieckseite und den Sinus der beiden anliegenden Winkel:

$$\sin a \sin \beta \sin \gamma = \sin b \sin \alpha \sin \gamma = \sin c \sin \alpha \sin \beta = K$$

setzt:

$$x = \frac{\sin \alpha}{2eK} (a - b \sin \gamma - c \cos \beta); \text{ eben so ist}$$

$$y = \frac{\sin \beta}{2eK} (b - c \cos \alpha - a \cos \gamma), \; z = \frac{\sin \gamma}{2eK} (c - a \cos \beta - b \cos \alpha).$$

Die Entfernung $\mathfrak{d}$ des Schwerpunkts G vom Mittelpunkte der Kugel, d. i. die Diagonale OG des vorhin zur Construction angewandten Parallelepipedums, ist nach einem bekannten Lehrsatze

$$= \sqrt{(\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 + 2OP . OQ \cos POQ}$$
$$+ 2OP . OR \cos POR + 2OQ . OR . \cos QOR).$$

Substituirt man hierin die vorhin angegebenen Werthe von OP, OQ, OR, so kommt:

$$d = \frac{1}{2e}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - 2ac\cos\beta - 2ab\cos\gamma}.$$

Um endlich noch die Winkel zu bestimmen, welche der durch den Schwerpunkt gehende Halbmesser der Kugel mit den Halbmessern OA, OB, OC macht, betrachte man das bei p rechtwinkelige Dreieck OpG; dasselbe giebt $Op = OG \,.\, \cos AOG$ oder $\frac{aK}{2e\sin\alpha} = d \,.\, \cos AOG$, woraus $\cos AOG = \frac{aK}{2ed\sin\alpha}$; eben so ist $\cos BOG = \frac{bK}{2ed\sin\beta}$, $\cos COG = \frac{cK}{2ed\sin\gamma}$. Diese Cosinus sind also direct den Seiten und umgekehrt den Sinus derselben proportionirt.

Der Schwerpunkt einer von einem sphärischen Dreieck begränzten Kugelpyramide ergiebt sich aus dem Obigen sehr leicht. Er liegt auf der geraden Linie, welche den Mittelpunkt der Kugel mit dem Schwerpunkte jenes sphärischen Dreiecks verbindet, aber um den 4ten Theil dieser Linie dem Mittelpunkte näher als der Schwerpunkt des Dreiecks.

IV.

Ueber die rekurrirende Bestimmung der Bernoullischen Zahlen.

Von

Herrn O. Schlömilch

zu Wien.

---

§. 1.

Wenn man die bekannten Formeln

$$\text{Log}\sin\omega = \text{Log}\,\omega + \text{Log}\left(1 - \frac{\omega^2}{\pi^2}\right) + \text{Log}\left(1 - \frac{\omega^2}{4\pi^2}\right) + \text{Log}\left(1 - \frac{\omega^2}{9\pi^2}\right) + \ldots\ldots$$

$$\text{Log}\cos\tfrac{1}{2}\omega = \text{Log}\left(1 - \frac{\omega^2}{\pi^2}\right) + \text{Log}\left(1 - \frac{\omega^2}{9\pi^2}\right) + \text{Log}\left(1 - \frac{\omega^2}{25\pi^2}\right) + \ldots\ldots$$

nach ω differenziirt, so erhält man leicht die beiden Reihen:

$$\frac{1}{2\omega} - \tfrac{1}{2}\cot\omega = \frac{\omega}{\pi^2 - \omega^2} + \frac{\omega}{4\pi^2 - \omega^2} + \frac{\omega}{9\pi^2 - \omega^2} + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\omega}{\pi^2 - \omega^2} + \frac{\omega}{9\pi^2 - \omega^2} + \frac{\omega}{25\pi^2 - \omega^2} + \ldots\ldots \quad (2)$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, nachdem man diese mit 2 multiplizirt hat, und bemerkt, dass $\cot\omega = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$, $\tan\frac{1}{2}\omega = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$ ist, so kommt:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega - \frac{1}{2\omega} = \frac{\omega}{\pi^2 - \omega^2} - \frac{\omega}{4\pi^2 - \omega^2} + \frac{\omega}{9\pi^2 - \omega^2} - \ldots \quad (3).$$

Diesen schon bekannten Summirungen lässt sich eine sehr vortheilhafte Seite abgewinnen. Drückt man nämlich dieselben Reihen durch bestimmte Integrale aus, so gelangt man, weil jene Summen schon bekannt sind, zur Kenntniss einiger bestimmten Integrale, welche sich unbestimmt nicht angeben lassen, und die sich hernach zur Entwickelung mehrerer rekurrirenden Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen sehr nützlich erweisen werden.

Zu diesem Zwecke erinnere ich an die bekannte Integralformel:

$$\int e^{-k\Theta}\sin h\Theta d\Theta = \frac{-k\sin h\Theta - h\cos h\Theta}{k^2 + h^2} e^{-k\Theta} + \text{Const.}$$

Nehmen wir $\Theta = \infty$, $\Theta = 0$ und subtrahiren beide Werthe, so ergiebt sich das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty e^{-k\Theta}\sin h\Theta d\Theta = \frac{h}{k^2 + h^2}.$$

Für $k = n\pi$, $h = \omega\sqrt{-1}$ geht dasselbe in das folgende über:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-n\pi\Theta}\sin\omega\sqrt{-1}\,\Theta d\Theta = \frac{\omega}{(n\pi)^2 - \omega^2} \ldots \quad (4)$$

worin das Imaginäre nur scheinbar ist, und sogleich verschwindet, wenn man den Sinus durch Exponenzialgrössen ausdrückt. Indessen werden wir doch diese Schreibart der Bequemlichkeit wegen beibehalten und $\sqrt{-1}$ kurz mit i bezeichnen. Betrachten wir die rechte Seite der Gleichung, so findet sich, dass dieselbe nichts Anderes ist, als das allgemeine Glied der Reihen (1), (2), (3). Giebt man also dem n die Werthe, die es dort hat, und addirt alle Glieder auf die nämliche Weise, wie es in jenen Reihen geschieht, so drückt man die nämliche Reihe durch eine Reihe bestimmter Integrale aus, die sich aber sehr leicht in eines zusammenziehen lassen.

1) Nehmen wir zuerst $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, und addiren sämmtliche Glieder mit positivem Zeichen, so bekommen wir auf der rechten Seite die Reihe (1), für die wir gleich ihre Summe setzen wollen; also:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-\pi\Theta}\sin\omega i\Theta d\Theta + \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-2\pi\Theta}\sin\omega i\Theta d\Theta$$
$$+ \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{-3\pi\Theta}\sin\omega i\Theta d\Theta + \ldots\ldots = \frac{1}{2\omega} - \tfrac{1}{2}\cot\omega.$$

Da aber diese Integrale den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{i}$ und gleiche Gränzen besitzen, so können wir dieselben so vereinigen:

$$\frac{1}{i}\int[e^{-\pi\Theta}+e^{-2\pi\Theta}+e^{-3\pi\Theta}+\ldots\ldots]\sin\omega i\Theta d\Theta=\frac{1}{2\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\omega.$$

Weil nun Θ eine positive Grösse ist, so bleibt $e^{-\pi\Theta}$ ein ächter Bruch, und die eingeklammerte Reihe lässt sich nach der Formel

$$x+x^2+x^3+\ldots\ldots=\frac{x}{1-x},\ +1>x>-1$$

summiren. Die Summe ist nämlich:

$$\frac{e^{-\pi\Theta}}{1-e^{-\pi\Theta}}=\frac{1}{e^{\pi\Theta}-1}$$

also:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{\pi\Theta}-1}=\frac{1}{2\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\omega.$$

Schreiben wir noch 2Θ für Θ, $\frac{\omega}{2}$ für ω, so ist

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{2\pi\Theta}-1}=\frac{1}{2\omega}-\tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{2}\omega\ldots(5)$$

2) Eben so leicht ist es die Reihe (3) in ein bestimmtes Integral zu verwandeln. Man nimmt wieder in (4) $n=1, 2, 3, 4\ldots$ addirt aber alle Glieder mit wechselnden Zeichen. So erhält man ganz ähnlich wie vorhin:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty[e^{-\pi\Theta}-e^{-2\pi\Theta}+e^{-3\pi\Theta}-\ldots\ldots]\sin\omega i\Theta d\Theta=\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega-\frac{1}{2\omega}.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist

$$\frac{e^{-\pi\Theta}}{1+e^{-\pi\Theta}}=\frac{1}{e^{\pi\Theta}+1},$$

mithin auch:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{\pi\Theta}+1}=\tfrac{1}{2}\operatorname{cosec}\omega-\frac{1}{2\omega}\ldots(6)$$

3) Für die Reihe (2) setzen wir in (4) $n=1, 3, 5\ldots$ und addiren alle Glieder mit positiven Zeichen. So wird

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty[e^{-\pi\Theta}+e^{-3\pi\Theta}+e^{-5\pi\Theta}+\ldots\ldots]\sin\omega i\Theta d\Theta=\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}\omega.$$

Nach der Formel

$$x+x^3+x^5+\ldots\ldots=\frac{x}{1-x^2},\ +1>x>-1,$$

findet sich als die Summe der Reihe unter dem Integralzeichen:

$$\frac{e^{-\pi\Theta}}{1-e^{-2\pi\Theta}}=\frac{1}{e^{\pi\Theta}-e^{-\pi\Theta}},$$

folglich

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\omega i\Theta d\Theta}{e^{\pi\Theta}-e^{-\pi\Theta}}=\tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}\omega$$

oder, wenn man $\frac{\Theta}{2}$ für Θ, 2ω für ω schreibt:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\sin \omega i\Theta d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \tfrac{1}{2}\tan \omega. \ldots . (7).$$

§. II.

Mittelst der eben gefundenen bestimmten Integrale ist es nun leicht, für irgend eine Bernoullische Zahl mehrere Integrale anzugeben, indem man nämlich beide Seiten von (5), (6), (7) nach Potenzen der willkührlichen Constante ω entwickelt, was auf der rechten Seite mittelst der Bernoullischen Zahlen bewerkstelligt wird, und dann die Coefficienten gleicher Potenzen von ω in eine Gleichung stellt.

1) So haben wir aus (5)

$$\frac{\omega}{1}\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{e^{2\pi\Theta}-1} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{e^{2\pi\Theta}-1} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{e^{2\pi\Theta}-1} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2\omega} - \frac{1}{2\omega} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\omega}{1.2}B_1 + \frac{\omega^3}{1.2.3.4}B_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(2n)}B_{2n-1} + \ldots\right]$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten von ω^{2n-1}, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{e^{2\pi}\Theta-1} = \frac{1}{4n}B_{2n-1}. \ldots . (8).$$

2) Entwickeln wir ebenso die Gleichung (6), so läuft die linke Seite ganz so, wie im vorigen Falle; rechts fängt die Reihe für $\frac{1}{2}$cosec ω mit $\frac{1}{2\omega}$ an, welches sich gegen $-\frac{1}{2\omega}$ hebt, und die allgemeinen Glieder sind:

$$\frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{e^{\pi}\Theta+1} \quad \text{und} \quad \frac{(2^{2n-1}-1)\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(2n)}B_{2n-1},$$

folglich durch Vergleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{e^{\pi}\Theta+1} = \frac{2^{2n-1}-1}{2n}B^{2n-1}. \ldots . (9)$$

3) Endlich giebt die beiderseitige Entwickelung von (7) die allgemeinen Glieder:

$$\frac{\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}.\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n)}B_{2n-1}$$

also wieder durch Gleichsetzen der Koeffizienten:

$$\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{4n}B_{2n-1}. \ldots . (10).$$



Diese bestimmten Integrale für eine beliebige Bernoullische Zahl bieten den Vortheil dar, dass sie den Index $2n-1$ als Exponent enthalten und es dadurch leichter wird, den gegenseitigen Zusammenhang mehrerer auf einander folgenden Zahlen zu entdecken.

Wollte man die Nenner jener Integrale in Reihen verwandeln und die Integration eines einzelnen Gliedes nach bekannten Eigenschaften der Gammafunktionen ausführen, so würde man das schon bekannte Resultat finden, dass die Bernoullischen Zahlen die reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen summiren. Fruchtbarer ist es, die Zähler jener Integrale in eine Rechnung zu verflechten, wie die nachfolgenden Paragraphen zeigen.

§. III.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Formeln (5) und (8), welche wegen der Gleichheit der Nenner zusammengehören.

1) Wir multipliziren beide Theile von (5) mit der Constante $4\sin\omega$, welche wir unter das Integralzeichen thun, und zerlegen das doppelte Sinusprodukt in eine Cosinusdifferenz, so dass wir erhalten

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{\cos(1-i\Theta)\omega-\cos(1+i\Theta)\omega}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta=\frac{2\sin\omega}{\omega}-\cot\tfrac{1}{2}\omega\sin\omega$$
$$=\frac{2\sin\omega}{\omega}-(1+\cos\omega).$$

Entwickeln wir beide Ausdrücke in Reihen, welche nach Potenzen von ω fortschreiten, so sind die allgemeinen Glieder

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3\ldots\ldots(2n)}\int_0^\infty\frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta \text{ und}$$
$$\frac{2(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3\ldots.(2n+1)}-\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3\ldots.(2n)}$$

und weil die Koeffizienten von ω^{2n} einander gleich sein müssen

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty\frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta=\frac{2}{2n+1}-1=-\frac{2n-1}{2n+1}.$$

Es ist aber

$$(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}=-2i[(2n)_1\Theta-(2n)_3\Theta^3+(2n)_5\Theta^5-\ldots\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n)_{2n-1}\Theta^{2n-1}]$$

wobei $(2n)_1$, $(2n)_3$, ... die Binomialkoeffizienten ungerader Stelle für den Exponenten $2n$ bedeuten. Substituiren wir diess und bezeichnen den Nenner des Integrals kurz mit N, so wird

$$(2n)_1\cdot4\int_0^\infty\frac{\Theta d\Theta}{N}-(2n)_3\cdot4\int_0^\infty\frac{\Theta^3d\Theta}{N}+(2n)_5\cdot4\int_0^\infty\frac{\Theta^5d\Theta}{N}-\ldots\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n)_{2n-1}\cdot4\int_0^\infty\frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{N}=\frac{2n-1}{2n+1}.$$

Jedes dieser Integrale lässt sich aber nach (8) ausführen, und so erhalten wir:

$$(2n)_1 B_1 - \tfrac{1}{2}(2n)_3 B_3 + \tfrac{1}{3}(2n)_5 B_5 - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(2n)_{2n-1} B_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n+1} \ldots (11).$$

2) Eine zweite ganz ähnlich gebildete Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen ergiebt sich so. Wir multipliciren (5) mit $4\cos\omega$ und zerlegen wieder unter dem Integralzeichen:

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{\sin(1+i\Theta)\omega - \sin(1-i\Theta)\omega}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta = \frac{2\cos\omega}{\omega} - \cot\tfrac{1}{2}\omega\cos\omega$$
$$= \frac{2\cos\omega}{\omega} - \cot\tfrac{1}{2}\omega + \sin\omega.$$

Verwandelt man beide Seiten in Reihen, so sind die allgemeinen Glieder

$$\frac{2}{i}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3..(2n-1)}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta \text{ und}$$
$$\frac{2(-1)^n\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n)} + \frac{2\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n)}B_{2n-1} + \frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1)}$$

folglich durch Vergleichung der Koeffizienten von ω^{2n-1},

$$\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{2\pi\Theta}-1}\,d\Theta = -\frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1} + 1$$
$$= \frac{n-1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1}.$$

Ferner ist:

$$(1+i\Theta)^{2n-1} - (1-i\Theta)^{2n-1}$$
$$= 2i[(2n-1)_1\Theta - (2n-1)_3\Theta^3 + (2n-1)_5\Theta^5 - \ldots\ldots.$$
$$+ (-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}\Theta^{2n-1}]$$

also, wenn wir diess in das Integral substituiren:

$$(2n-1)_1.4\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{N} - (2n-1)_3.4\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{N} + (2n-1)_5.4\int_0^\infty \frac{\Theta^5 d\Theta}{N} - \ldots.$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}.4\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{N}$$
$$= \frac{n-1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1}.$$

Bestimmen wir den Werth jedes dieser Integrale nach (8), so ergiebt sich

$$(2n-1)_1 B_1 - \tfrac{1}{2}(2n-1)_3 B_3 + \tfrac{1}{3}(2n-1)_5 B_5 - \ldots\ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(2n-1)_{2n-1}B_{2n-1} = \frac{n-1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}B_{2n-1}.$$

Dabei heben sich die mit B_{2n-1} behafteten Glieder und die Reihe bricht also bei dem Gliede $(-1)^n\frac{1}{n-1}(2n-1)_{2n-3}B_{2n-3}$ ab. Schreiben wir daher $n+1$ für n, so ist nun

$$(2n+1)_1 B_1 - \tfrac{1}{2}(2n+1)_3 B_3 + \tfrac{1}{3}(2n+1)_5 B_5 - \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(2n+1)_{2n-1}B_{2n-1} = \frac{n}{n+1}. \ldots (12)$$

Diese Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen ist der (11) ganz analog, auch in so fern, als $\frac{n}{n+1} = \frac{(2n+1)-1}{(2n+1)+1}$ gesetzt werden kann. Es lassen sich daher beide Gleichungen so zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned} m_1 B_1 - \tfrac{1}{2} m_3 B_3 + \tfrac{1}{3} m_5 B_5 - \ldots\ldots \pm \frac{2}{m} m_{m-1} B_{m-1} &= \\ m_1 B_1 - \tfrac{1}{2} m_3 B_3 + \tfrac{1}{3} m_5 B_5 - \ldots\ldots \pm \frac{2}{m-1} m_{m-2} B_{m-2} &= \end{aligned}\right\} \frac{m-1}{m+1} \ldots (13)$$

wobei die obere Reihe für ein gerades, die untere für ein ungerades m gilt.

§. IV.

Auf gleiche Weise soll nun auch die Formel (6) mit Rücksicht auf (9) behandelt worden.

1) Multiplicirt man (6) mit 2 sin ω und zerlegt unter dem Integralzeichen das doppelte Produkt, so kommt:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\cos(1-i\Theta)\omega - \cos(1+i\Theta)\omega}{e^{\pi\Theta}+1}\, d\Theta = 1 - \frac{\sin\omega}{\omega}.$$

Die beiderseitige Entwickelung nach Potenzen von ω giebt die allgemeinen Glieder:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3\ldots,(2n)}\int_0^\infty \frac{(1-i\Theta)^{2n} - (1+i\Theta)^{2n}}{e^{\pi\Theta}+1}\, d\Theta \text{ und}$$
$$\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n}}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)}$$

folglich:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{(1-i\Theta)^{2n} - (1+i\Theta)^{2n}}{e^{\pi\Theta}+1}\, d\Theta = -\frac{1}{2n+1}.$$

Entwickeln wir die Potenzen unter dem Integralzeichen und bezeichnen den Nenner kurz mit M, so ergiebt sich ganz ähnlich wie in §. III. 1):

$$(2n)_1 . 2\int_0^\infty \frac{\Theta d\Theta}{M} - (2n)_3 . 2\int_0^\infty \frac{\Theta^3 d\Theta}{M} + (2n)_5 . 2\int_0^\infty \frac{\Theta^5 d\Theta}{M} - \ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}(2n)_{2n-1} . 2\int_0^\infty \frac{\Theta^{2n-1} d\Theta}{M} = \frac{1}{2n+1}.$$

Aus (9) findet sich aber der Werth jedes einzelnen Integrals, und so hat man:

$$\frac{2-1}{1}(2n)_1 B_1 - \frac{2^3-1}{2}(2n)_3 B_3 + \frac{2^5-1}{3}(2n)_5 B_5 - \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}(2n)_{2n-1}B_{2n-1} = \frac{1}{2n+1}. \ldots (14)$$

2) Durch Multiplikation mit 2cos ω erhalten wir aus (6)

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\sin(1+i\Theta)\omega - \sin(1-i\Theta)\omega}{e^{\pi\Theta}+1}\,d\Theta = \cot\omega - \frac{\cos\omega}{\omega}.$$

Daraus fliessen durch Verwandlung in Reihen die allgemeinen Glieder:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(2n-1)}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\pi\Theta}+1}\,d\Theta \text{ und}$$

$$-\frac{2^{2n}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n)}B_{2n-1}+\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(2n)},$$

folglich:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\pi\Theta}+1}\,d\Theta = \frac{1}{2n}[1+(-1)^n 2^{2n}B_{2n-1}]$$

oder, wenn man die Potenzen wie in §. III. 2) entwickelt und den Nenner mit M bezeichnet:

$$(2n\text{-}1)_1.2\int_0^\infty\frac{\Theta d\Theta}{M}-(2n\text{-}1)_3.2\int_0^\infty\frac{\Theta^3 d\Theta}{M}+(2n\text{-}1)_5.2\int_0^\infty\frac{\Theta^5 d\Theta}{M}-\ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}.2\int_0^\infty\frac{\Theta^{2n-1}}{M}\,d\Theta=\frac{1}{2n}[1+(-1)^n 2^{2n}B_{2n-1}].$$

Führt man jedes dieser Integrale nach (9) aus, so ist:

$$\frac{2-1}{1}(2n-1)_1 B_1-\frac{2^3-1}{2}(2n-1)_3 B_3+\frac{2^5-1}{3}(2n-1)_5 B_5-\ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}(2n-1)_{2n-1}B_{2n-1}=\frac{1}{2n}[1+(-1)^n 2^{2n}B_{2n-1}]$$

Nimmt man auf beiden Seiten die mit B_{2n-1} behafteten Glieder zusammen und schreibt dann $n+1$ für n, so stellt sich diese Relation unter folgender Form dar:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2-1}{1}(2n+1)_1 B_1-\frac{2^3-1}{2}(2n+1)_3 B_3+\frac{2^5-1}{3}(2n+1)_5 B_5-\ldots\ldots\\&\qquad\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}-1}{n}(2n+1)_{2n-1}B_{2n-1}\\&=\frac{1}{n+1}[\tfrac{1}{2}+(-1)^{n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}].\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

§. V.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des letzten Paares zusammengehöriger Integrale, nämlich (7) und (10).

1) Durch Multiplikation mit 2 sin ω entsteht aus (7)

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\cos(1-i\Theta)\omega-\cos(1+i\Theta)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}\,d\Theta=\tan\omega\sin\omega$$

$$=\sec\omega-\cos\omega.$$

Bekanntlich lässt sich nun sec ω in folgende Reihe verwandeln

$$B_0+\frac{\omega^2}{1.2}B_2+\frac{\omega^4}{1.2.3.4}B_4+\ldots\ldots$$

worin $B_0, B_2, B_4, \ldots$ gewisse Koeffizienten bedeuten, welche

einige Analogie zu den Bernoullischen Zahlen besitzen. Es sind die allgemeinen Glieder der Reihen:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^n\omega^{2n}}{1.2.3\ldots.(2n)}\int_0^\infty\frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta \text{ und}$$

$$\frac{\omega^{2n}B^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}+\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n}}{1.2.3\ldots.(2n)};$$

folglich:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{(1-i\Theta)^{2n}-(1+i\Theta)^{2n}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta=(-1)^nB_{2n}-1.$$

Entwickelt man wieder die Potenzen unter dem Integralzeichen und bezeichnet den Nenner mit L, so ist nun:

$$(2n)_1.2\int_0^\infty\frac{\Theta d\Theta}{L}-(2n)_3.2\int_0^\infty\frac{\Theta^3d\Theta}{L}+(2n)_5.2\int_0^\infty\frac{\Theta^5d\Theta}{L}-\ldots.$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n)_{2n-1}.2\int_0^\infty\frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{L}=1-(-1)^nB_{2n}$$

$$=1+(-1)^{n+1}B_{2n}.$$

woraus sich vermöge der Formel (10) sogleich ergiebt:

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}(2n)_1B_1-\frac{2^4(2^4-1)}{4}(2n)_3B_3+\frac{2^6(2^6-1)}{6}(2n)_5B_5-\ldots\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}(2n)_{2n-1}B_{2n-1}=1+(-1)^{n+1}B_{2n}\ldots.\ (16)$$

2) Multiplizirt man (7) mit $2\cos\,\omega$, so ist:

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\sin\,(1+i\Theta)\omega-\sin\,(1-i\Theta)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta=\sin\,\omega.$$

Daraus entspringen die allgemeinen Glieder der Reihenentwickelung:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1)}\int_0^\infty\frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta \text{ und}$$

$$\frac{(-1)^{n+1}\omega^{2n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1)},$$

und so die Gleichung

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{(1+i\Theta)^{2n-1}-(1-i\Theta)^{2n-1}}{e^{\frac{\pi}{2}\Theta}-e^{-\frac{\pi}{2}\Theta}}d\Theta=1.$$

Diess giebt durch Entwickelung:

$$(2n-1)_1.2\int_0^\infty\frac{\Theta d\Theta}{L}-(2n-1)_3.2\int_0^\infty\frac{\Theta^3d\Theta}{L}+(2n-1)_5.2\int_0^\infty\frac{\Theta^5d\Theta}{L}-\ldots..$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}(2n-1)_{2n-1}.2\int_0^\infty\frac{\Theta^{2n-1}d\Theta}{L}=1$$

und durch Ausführung aller Integrale nach (10)

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}(2n-1)_1 B_1 - \frac{2^4(2^4-1)}{4}(2n-1)_3 B_3 + \frac{2^6(2^6-1)}{6}(2n-1)_5 B_5 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}(2n-1)_{2n-1} B_{2n-1} = 1 \ldots (17).$$

Die bisher entwickelten Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen, welche gar nicht bekannt zu sein scheinen, enthalten die Auflösung der Aufgabe von der rekurrirenden Bestimmung jener Zahlen; und zugleich führt die Formel (16) die Berechnung der Sekantenkoeffizienten auf die der Bernoullischen Zahlen zurück.

Die Anzahl der Rekursionsformeln für diese Zahlen liesse sich noch vermehren, indem man die bisher gefundenen Formeln durch Addition und Subtraktion combinirte. Diess will ich aber übergehen, da die Ableitung dieser Relationen leicht ist und ohnediess zu weniger einfachen Resultaten führt.

V.

Ueber den Schwerpunkt des körperlichen Sectors eines Ellipsoids mit drei Achsen.

Von

Herrn Lieutenant von Seydlitz

im Königl. Preuss. 8ten (Leib-) Infanterie Regiment.

Aufgabe I.

(Welche als Einleitung zur zweiten Aufgabe dient).

Es ist ein Ellipsoid mit drei Achsen a, b und c, welche den rechtwinklichen Coordinaten X, Y, Z entsprechen, gegeben. KS (Taf. I. Fig. 4.) sei der Schnitt durch den Mittelpunkt O, winkelrecht zur Coordinatenebene XZ. MT sei ein anderer zu derselben Ebene winkelrechter Schnitt durch den Punkt Q, in der Entfernung $OQ = x$ von O. Es soll der Schwerpunkt des körperlichen Sektors $MNQOLK$ bestimmt werden, dessen Centriwinkel $MQN = KOL = \alpha$ ist.

Die Coordinaten des zu bestimmenden Schwerpunktes s zu den respektiven Achsen seien:

$$OD = x', \ DU = y', \ SU = z'$$

so wird x' auch dasselbe x' des Schwerpunktes des Körpers $MKST$ sein, der zwischen den beiden Schnittellipsen liegt, und es ist daher nach einer bekannten Entwickelung:

$$x' = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a^2 - x^2}{3a^2 - x^2} x.$$

Die Fläche MNQ sei gleich F und die Coordinaten des Schwerpunktes von F seien y'' und z'', so ist:

$$\int y'' F dx = y' \int F dx,$$

$$y' = \frac{\int y'' F dx}{\int F dx} \quad (1)$$

Eben so:

$$z' = \frac{\int z'' F dx}{\int F dx} \quad (2)$$

Bezeichnen wir in Taf. I. Fig. 5., welche die Schnittellipse MT vorstelle, die halbe grosse Achse MQ durch γ, und die halbe kleine Achse RQ durch β, ferner durch φ den Bogen für den Radius $= 1$, welcher dem Winkel HQM entspricht ($HQ = QM$ und NP, deren Verlängerung HQ in H schneidet, winkelrecht auf MQ), so ist nach Lehren der analytischen Geometrie

$$F = \tfrac{1}{2}\gamma\beta\varphi \quad (3)$$

$$F = \text{Fläche } NPM(F_,) + \Delta NQP(F_{,,}).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten $s_,\ i$ und $s_{,,}\ h$ der Schwerpunkte $s_,$ und $s_{,,}$ der Flächen $F_,$ und $F_{,,}$ mit $y_,$ und $y_{,,}$, so ist

$$y''F = y_, F_, + y_{,,} F_{,,}.$$

Nach den Lehren der Berechnung des Schwerpunktes ebener Flächen folgt, wenn wir einstweilen M als Anfangspunkt der Coordinaten betrachten und MP mit x, ferner NP mit y bezeichnen:

$$y_, F_, = \frac{\beta^2(3\gamma - x)x^2}{6\gamma^2} \quad (4)$$

$$y_{,,} F_{,,} = \frac{y^2}{6}(\gamma - x) \quad (5)$$

$$y''F = \frac{\beta^2(3\gamma - x)x^2}{6\gamma^2} + \frac{y^2}{6}(\gamma - x) \quad (6)$$

Statt x, $\gamma - QP = \gamma - \gamma \cos\varphi$ gesetzt und statt y, $NP = \beta \sin\varphi$ *) und diese Werthe in die Gleichung (6) substituirt, giebt:

---

*) Schlägt man nämlich um Q (Taf. I. Fig. 6.) mit der kleinen halben Achse RQ einen Kreis, so schneiden sich die Peripherie dieses Kreises, die Winkelrechte Np und der Radius HQ in einem Punkte o (laut analytischer Geometrie)

$$\begin{aligned} \text{folglich } op &= NP \\ &= Qo \sin HQM \\ &= \beta \sin \varphi. \end{aligned}$$

$$y''F = \frac{\frac{\beta^2}{\gamma^2}(2\gamma + \gamma\cos\varphi)(\gamma - \gamma\cos\varphi)^2 + \beta^2\sin\varphi^2 . \gamma\cos\varphi}{6}.$$

Dies giebt nach gehöriger Auflösung

$$y''F = \frac{2\beta^2\gamma(1-\cos\varphi)}{6} \quad (7)$$

$$y'' . \tfrac{1}{2}\gamma\beta\varphi = \frac{2\beta^2\gamma(1-\cos\varphi)}{6}$$

$$y'' = \frac{2\beta(1-\cos\varphi)}{3\varphi} \quad (8)$$

Bezeichnen wir nun eben so die Coordinaten Qi und Qh der Schwerpunkte $s_{,}$ und $s_{,,}$ mit $z_{,}$ und $z_{,,}$, so ist

$$z''F = z_{,}F_{,} + z_{,,}F_{,,}.$$

Nach denselben Annahmen wie bei den Gleichungen (4) und (5) folgt:

$$z_{,}F_{,} = \gamma F_{,} - \frac{\gamma^2}{3\beta^2}y^3,$$

$F_{,} = \frac{1}{2}\gamma\beta(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)$, nach Lehren der analytischen Geometrie.

$$z_{,}F_{,} = \tfrac{1}{2}\gamma^2\beta(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi) - \frac{\gamma^2}{3\beta^2}y^3 \quad (9)$$

$$z_{,,}F_{,,} = \frac{(2x+\gamma)\,y(\gamma - x)}{6} \quad (10)$$

$$z''F = \tfrac{1}{2}\gamma^2\beta(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi) - \frac{\gamma^2}{3\beta^2}y^3 + \frac{(2x+\gamma)\,y(\gamma-x)}{6}.$$

Für x und y die Werthe $\gamma - \gamma\cos\varphi$ und $\beta\sin\varphi$ substituirt, giebt nach gehöriger Auflösung:

$$z''F = \frac{2\gamma^2\beta\sin\varphi}{6} \quad (11)$$

$$z'' = \frac{2\gamma\sin\varphi}{3\varphi} \quad (12)$$

Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse $AKBS$ (Taf. I. Fig. 4.) folgt:

$$MQ = \gamma = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

und aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse $ARHB$:

$$RQ = \beta = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Diese Werthe in die Gleichungen (7) und (11) substituirt, giebt:

$$y''F = \frac{\frac{2b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.(1-\cos\varphi)}{6}$$

$$= \frac{b^2c}{3a^3}(1-\cos\varphi)\sqrt{(a^2 - x^2)^3} \quad (13)$$

und eben so:

$$x''F = \frac{c^2b}{3a^3} \sin\varphi \sqrt{(a^2-x^2)^3} \quad (14)$$

$$\int y''F dx = \frac{b^2c}{3a^3}(1-\cos\varphi)\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}dx$$

$$\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}dx = (\frac{a^2-x^2}{4}+\frac{3a^2}{8})x\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{3a^4}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

(Man sehe Meyer Hirsch Integraltafeln pag. 155.)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{\text{arc sin } x}{a}$$ (M. s. Meyer Hirsch Integraltafeln p. 141.)

$$\int F dx = \int \tfrac{1}{2}\gamma\beta\varphi dx = \tfrac{1}{2}\varphi\int(a^2-x^2)\frac{bc}{a^2}dx$$

$$= \frac{bc\varphi}{2a^2}\int(a^2-x^2)dx = \frac{bc\varphi x}{2a^2}(a^2-\frac{x^2}{3}).$$

Es ist mithin nach Gleichung (1)

$$y' = \frac{2b(1-\cos\varphi)\,\{(\frac{a^2-x^2}{4}+\frac{3a^2}{8})x\sqrt{(a^2-x^2)}+\frac{3a^3}{8}\text{ arc sin } x\}}{3a\varphi x(a^2-\frac{x^2}{3})} \quad (15)$$

Eben so ist nach Gleichung (2)

$$x' = \frac{2c\sin\varphi\{(\frac{a^2-x^2}{4}+\frac{3a^2}{8})x\sqrt{(a^2-x^2)}+\frac{3a^3}{8}\text{ arc sin } x\}}{3a\varphi x(a^2-\frac{x^2}{3})} \quad (16)$$

Wird in (15) und (16) $x=0$, so erhält man, nachdem man Zähler und Nenner durch x dividirt hat:

$$y' = \frac{2b(1-\cos\varphi)}{3a^3\varphi}\{(\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{8})\,a + \frac{\frac{3a^3}{8}\text{ arc sin } x}{x}\},$$

$$\frac{\frac{3a^3}{8}\text{ arc sin } x}{x} = \frac{0}{0} = \frac{3a^3}{8},$$

$$y' = \frac{2b(1-\cos\varphi)}{3\varphi} \quad (17)$$

und eben so:

$$x' = \frac{2c(1-\cos\varphi)}{3\varphi} \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) sind mit (8) und (12) zu vergleichen. Es ist aber wohl zu beachten, dass der Werth von φ in (17) und (18) ein anderer ist, als in (8) und (12), indem φ eine Funktion von x ist.

Wird in (16) φ zu π, also der entsprechende Winkel $=180°$, mithin auch Winkel $\alpha=180°$, so wird $x'=0$. Wird φ zu 2π,

also auch Winkel $\alpha = 360^\circ$, so wird z' ebenfalls $= 0$. Werden endlich φ und α mit x gleichzeitig $= 0$, so erhält man aus (18)

$$z' = \frac{0}{0} = \frac{2}{3}c \quad (19).$$

Aufgabe II.

Den geometrischen Ort des in Aufgabe I. gesuchten Schwerpunktes s zu bestimmen, wenn Winkel α zwischen den Grenzen 0 und 360° sich stetig ändert.

Taf. I. Fig. 7. stelle die zur Koordinatenebene XZ (Taf. I. Fig. 4.) rechtwinkliche Schnittellipse vor, die von dem Mittelpunkte O des Ellipsoids um x' (siehe Aufgabe I.) entfernt ist, so wird die zu bestimmende Curve in der Ebene dieser Ellipse liegen, so lange x als constant betrachtet wird. Der geometrische Ort wird aber eine Curve doppelter Krümmung werden, wenn x mit α gleichzeitig als variabel eingeführt wird, wenn x z. B. alle Werthe von 0 bis a durchläuft, während α zwischen den Grenzen 0 und 360° sich stetig ändert.

Wir betrachten hier x aber nur als constant. Dann wird der Ausdruck:

$$\frac{\left(\frac{a^2 - x^2}{4} + \frac{3a^2}{8}\right)x\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{3a^2}{8} \text{ arc sin } x}{ax\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right)} = \mathfrak{I}$$

(Siehe (15) und (16) der Aufgabe I.).

Es sei nun s (Taf. I. Fig. 7.) der Schwerpunkt, der in der Aufgabe I. bestimmt ist und der dem Winkel $EDF = \alpha$ entspricht, sC und CD seien die Coordinaten y' und z', W. sDC sei $= \eta$ und $sD = v'$, so ist:

$$(1) \quad v' \sin \eta = y' = \frac{2b(1 - \cos \varphi)}{3\varphi} \mathfrak{I} \text{ (Siehe Aufgabe I. Formel (15))}$$

$$(2) \quad v' \cos \eta = z' = \frac{2c \sin \varphi}{3\varphi} \mathfrak{I} \text{ (Siehe Aufgabe I. Formel (16))}$$

$$v' = \frac{z'}{\cos \eta}$$

$$y' = \frac{z'}{\cos \eta} \sin \eta = \frac{2b(1 - \cos \varphi)}{3\varphi} \mathfrak{I}$$

$$\sin \eta = \frac{b(1 - \cos \varphi) \cos \eta}{c \sin \varphi}$$

$$= \frac{b(1 - \cos \varphi) \sqrt{(1 - \sin \eta^2)}}{c \sin \varphi}$$

$$\sin \eta^2 = \frac{b^2(1 - \cos \varphi)^2 (1 - \sin \eta^2)}{c^2 \sin \varphi^2}.$$

Hieraus den Werth für $\sin \eta^2$ bestimmt giebt:

$$\sin \eta^2 = \frac{b^2(1 + \cos \varphi^2 - 2\cos \varphi)}{c^2 \sin \varphi^2 + b^2(1 + \cos \varphi^2 - 2\cos \varphi)}$$

$$= \frac{b^2(1-\cos\varphi)^2}{c^2 \sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2} \quad (3)$$

$$\sin\eta = \frac{b(1-\cos\varphi)}{\sqrt{\{c^2 \sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}} \quad (4)$$

Aus Formel (1) folgt:

$$v' = \frac{2b(1-\cos\varphi)}{3\varphi \sin\eta} \mathfrak{J}.$$

Hierin den Werth von $\sin\eta$ aus Formel (4) gesetzt, giebt

$$v' = \frac{2\sqrt{\{c^2 \sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}}{3\varphi} \mathfrak{J}. \quad (5)$$

(4) und (5) bestimmen die Curve vollständig, die nach der Form dieser beiden Gleichungen im Allgemeinen eine Spirale sein wird.

Nehmen wir $x=0$ an, so wird der constante Faktor $\mathfrak{J}=1$ und dann bestimmen die Gleichungen (4) und (5) die Curve, die der Schwerpunkt eines Ellipsensektors LOK (Taf. I. Fig. 8.) beschreibt, wenn α, also auch φ, von 0 bis 360° sich stetig ändert. Wir wollen (4) und (5) für $x=0$ noch einmal neben einander stellen:

$$\sin\eta = \frac{b(1-\cos\varphi)}{\sqrt{\{c^2 \sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}} \quad (6)$$

$$v' = \frac{2\sqrt{\{c^2 \sin\varphi^2 + b^2(1-\cos\varphi)^2\}}}{3\varphi} \quad (7)$$

Wird $\varphi=0$, so wird auch $\eta=0$, v' wird dann $=\frac{0}{0}=\frac{2}{3}c$. (Vergleiche hiermit Formel (19) der vorigen Aufgabe).

Wird $\varphi=\frac{\pi}{2}$, also $\varphi=90^\circ=\alpha$, so wird nach (6)

$$\sin\eta = \frac{b}{\sqrt{(c^2+b^2)}} = \frac{b}{HK} \text{ (Taf. I. Fig. 8.)}$$

$$HK \,.\, \sin\eta = b. \quad \text{Folglich } \eta = HKO.$$

Halbirt man daher OK (Taf. I. Fig. 8.), errichtet in dem Halbirungspunkte B eine Winkelrechte, bis diese die Linie HK in G schneidet, und verbindet man G mit O, so ist GO ein geometrischer Ort für den Schwerpunkt s des Ellipsensektors HOK.

v' wird für $\varphi=\frac{\pi}{2}=90^\circ$ nach Formel (7)

$$= \frac{2\sqrt{(c^2+b^2)}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{(c^2+b^2)}}{\pi} = \frac{4HK}{\pi} \text{ (Taf. I. Fig. 8.).}$$

Wird $\varphi=\pi=180^\circ$, so wird $\sin\eta=1$, folglich $\eta=90^\circ$,

$$v' = \frac{4b}{3\pi}.$$

Wird $\varphi=2\pi=360^\circ$, so wird

$$\eta = 360^\circ,$$
$$v' = 0.$$

v' wird ein Maximum für $\varphi = 0$.

Nehmen wir nun an, α, also φ wachse über 360° hinaus, φ werde z. B. zu $\varphi + 2\pi$, so wird die Deutung dieser Annahme folgende sein:

Die ganze Ellipsenfläche KS (Taf. I. Fig. 8.), die wir hier als ein Körperdifferential ansehen, und die dadurch entstanden ist, dass α alle Werthe von 0 bis 360° durchlaufen hat, habe eine gewisse Dichtigkeit D, so wird, wenn α zu $\alpha + 2\pi$ wird, der Sektor LOK, der dem Winkel α entspricht, von noch einmal so grosser Dichtigkeit sein, als der übrige Theil der Ellipse. Hat α alle Werthe von 2π bis 4π durchlaufen, d. h. ist die 2te ganze Drehung vollendet, so wird der Sektor LOK abermals zur ganzen Ellipsenfläche geworden sein, die nun aber die Dichtigkeit $2D$ hat. Wird α zu $\alpha + 4\pi$, so wird der Sektor LOK, der dem Winkel α entspricht, eine Dichtigkeit haben, die sich zu dem übrigen Theile der Ellipse verhält wie 3 : 2. Nach Vollendung der 3ten ganzen Drehung wird die ganze Ellipsenfläche nur die Dichtigkeit $3D$ haben, u. s. w.

Wird α zu $\alpha + 2\pi$, so wird auch φ zu $\varphi + 2\pi$, und es bleibt in Formel (6) $\sin \eta$ ungeändert, in der 2ten Seite der Gleichung (7) ändert sich nur der Nenner.

Bezeichnen wir den Vektor (v) während der 2ten Drehung ($\varphi + 2\pi$) mit $v^{(2)}$, den Vektor während der 3ten Drehung ($\varphi + 4\pi$) mit $v^{(3)}$ u. s. w., so verhalten sich:

$$v^{(1)},\ v^{(2)},\ v^{(3)},\ v^{(4)}, \ldots . v^{(n)}$$

umgekehrt wie die Glieder der Reihe

$$\varphi,\ \varphi + 2\pi,\ \varphi + 4\pi,\ \varphi + 6\pi, \ldots . \varphi + 2(n-1)\pi.$$

Z. B.

$$v^{(2)} : v^{(1)} = \varphi : \varphi + 2\pi$$

$$\frac{v^{(1)}}{v^{(2)}} = \frac{\varphi + 2\pi}{\varphi} = 1 + \frac{2\pi}{\varphi}.$$

Wird hiernach $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, so wird:

$$v^{(2)} = \frac{1}{9} v^{(1)}.$$

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, so wird:

$$v^{(2)} = \frac{1}{5} v^{(1)}.$$

Wird $\varphi = \pi = 180^\circ$, so wird:

$$v^{(2)} = \frac{1}{3} v^{(1)}.$$

Wird $\varphi = 2\pi = 360^\circ$, so würde hiernach $v^{(2)} = \frac{1}{2} v^{(1)}$ werden, nach Formel (7) werden aber beide Vektoren $= 0$. Es kommt also

$v^{(2)}$, je mehr φ sich 360° nähert, dem Werthe von $\frac{1}{2}v^{(1)}$ die Winkel auch immer näher, bis auf eine Differenz, die kleiner ist, als eine noch so kleine anzunehmende Grösse. Ist $\varphi = 0$, so wird der Exponent des Verhältnisses, $v^{(2)} : v^{(1)}$, unendlich gross, $v^{(2)}$ macht demnach, während φ sich stetig zwischen den Grenzen 0 und 360° ändert, alle Werthe zwischen den Grenzen von $\frac{1}{\alpha}v^{(1)}$ und $\frac{1}{2}v^{(1)}$ durch.

Folgende Tafel giebt die Verhältnisse von $v^{(2)}$, $v^{(3)}$, $v^{(4)}$.... $v^{(n)}$ zu $v^{(1)}$ für gewisse Werthe von φ; sie wird ein ungefähres Bild davon geben, auf welche Art sich die verschiedenen Vektoren bei den respektiven Drehungen verändern.

Tafel I.

	Werthe in Theilen von $v^{(1)}$				
	$v^{(2)}$	$v^{(3)}$	$v^{(4)}$	$v^{(5)}$	$v^{(n)}$
$\varphi = 22\frac{1}{2}°$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{16n-15}$
$\varphi = 45°$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{8n-7}$
$\varphi = \alpha = 90°$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{4n-3}$
$\varphi = \alpha = 180°$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2n-1}$
Kommt bei der Annäherung von φ zu 360° unendlich nahe dem Werthe	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{n}$

Tafel II.

Verhältniss der Dichtigkeit des Sektors zu dem übrigen Theile der Ellipse.			
Während der 1sten Drehung	Während der 2ten Drehung	Während der 3ten Drehung	Während der *n*ten Drehung
1 : 0	2 : 1	3 : 2	$n : n-1$

Nach diesen beiden Tafeln und mit Hülfe der Gleichungen (4) und (5) der Aufgabe II. lässt sich der Schwerpunkt des von den beiden Schnittellipsen *MT* und *KS* (Taf. I. Fig. 4.) eingeschlossenen Körpers bestimmen, wenn der Sektor *MNQOLK* aus einer specifisch schwereren Masse besteht, als der übrige Theil des Kör-

pers, und wenn das Verhältniss der beiden Dichtigkeiten sich auf eins der in Tafel II. angegebenen Verhältnisse zurückführen lässt.

Der Sektor entspreche z. B. dem W. $\varphi = 45^\circ$ und bestehe aus Platina, während der übrige Theil des Körpers aus Gold. Die Dichtigkeit des Platina zur Dichtigkeit des Goldes verhält sich wie 235 : 193, was dem Verhältniss von 5 : 4 ziemlich nahe kommt. Diesem Verhältniss entspricht nach Tafel II. die 5te Drehung und der Vektor $v^{(5)}$. In Tafel I. suche man nun den Werth von $v^{(5)}$ in Theilen von $v^{(1)}$ für $\varphi = 45^\circ$

$$v^{(5)} = \frac{1}{33} v^{(1)}.$$

Wir können hiernach indessen nur den Schwerpunkt des in Rede stehenden Körpers bestimmen, wenn der Exponent des Verhältnisses der Dichtigkeit (D') des Sektors zur Dichtigkeit (D) des übrigen Theiles des Körpers $= \frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}$ ist, wobei n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Zur Bestimmung des Schwerpunktes für jedes beliebige andere Verhältniss der beiden Dichtigkeiten zu einander diene folgende Betrachtung.

Hat der Sektor gleiche Dichtigkeit mit dem übrigen Theile des Körpers, so wird der Vektor (v) während jeder ($n$ten) Drehung $=0$.

$$v^{(n)} = 0, \text{ wenn } \frac{D}{D'} = 1.$$

Ist die Dichtigkeit des übrigen Theils des Körpers $=0$, so verschwindet eben dieser übrige Theil, es bleibt der Sektor allein zu betrachten übrig, also:

$$v^{(n)} = v^{(1)}, \text{ wenn } \frac{D}{D'} = 0.$$

Es ist nun offenbar, dass $v^{(n)}$ eine Funktion von $\frac{D}{D'}$ ist, und dass zwischen den Grenzen von $\frac{D}{D'} = 1$ und $\frac{D}{D'} = 0$, $v^{(n)}$ sich stetig zwischen den Grenzen 0 und $v^{(1)}$ ändert.

Hiernach und aus der Anschauung der beiden obigen Tafeln folgt:

$$\text{Für } \varphi = \alpha = 180^\circ \text{ ist } v^{(n)} = \frac{1}{2n-1} v^{(1)} = f\left(\frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\text{,,} \quad = 90^\circ \quad \text{,,} \quad = \frac{1}{4n-3} v^{(1)} = F\left(\frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\text{Für } \varphi = 45^\circ \quad \text{,,} \quad = \frac{1}{8n-7} v^{(1)} = \mathfrak{f}\left(\frac{D}{D'} = \frac{n-1}{n}\right).$$

Setzen wir statt 1, n; so wird $\frac{D}{D'} = 0$ und $v^{(n)}$ für alle Werthe von $\varphi = v^{(1)}$.

Setzen wir statt 1, 0; so wird $\frac{D}{D'} = 1$ und $v^{(n)}$ für alle Werthe von $\varphi = 0$.

Setzen wir nun statt 1, x; so wird:

$$\text{Für } \varphi = \alpha = 180^\circ,\ v^{(n)} = \frac{x}{2n-x} v^{(1)} = f\left(\frac{n-x}{n}\right)$$

$$\text{„} \quad = 90^\circ,\ v^{(n)} = \frac{x}{4n-3x} v^{(1)} = F\left(\frac{n-x}{n}\right)$$

$$\text{Für } \varphi = 45^\circ,\ v^{(n)} = \frac{x}{8n-7x} v^{(1)} = \mathfrak{f}\left(\frac{n-x}{n}\right) \text{ u. s. w.}$$

Behalten wir unser obiges Beispiel mit dem Platina und Golde bei, so können wir jetzt den Schwerpunkt des ganzen Körpers so genau bestimmen, als das Verhältniss der Dichtigkeit des Platina zum Golde 235 : 193 genau bestimmt ist, indem wir $n = 235$ und $x = 235 - 193 = 42$ setzen. Dann ist:

$$\text{Für } \varphi = 45^\circ,\ v^{(n)} = \frac{42}{8 \,.\, 235 - 7 \,.\, 42} \,.\, v^{(1)} = \frac{21}{793} v^{(1)}.$$

VI.

Berechnung der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so wie mehrerer anderer mit ihr zusammenhängender Zahlwerthe.

Von

Herrn Prof. C. A. Bretschneider

in Gotha.

Die numerischen Constanten der Arithmetik haben in neuerer Zeit durch ihren Einfluss auf die Berechnung der begränzten Integrale einen höheren Werth erhalten, als man ihnen früher zuschrieb, und es ist daher doppelt nothwendig geworden, die wichtigsten derselben auf eine grosse Reihe von Decimalstellen mit vollkommenster Sicherheit zu kennen. Gleichwohl ist diese Forderung nur bei einer einzigen dieser Zahlen, nämlich bei der Zahl π, in aller Strenge erfüllt. Der Werth derselben ist durch wiederholte Berechnung bis auf 150 Decimalen sicher gestellt und jedes grössere Tafelwerk pflegt einen diplomatisch genauen Abdruck derselben zu enthalten. Nicht eben dasselbe kann man von den übrigen arithmetischen Constanten sagen, und schon die der Zahl π so nahe verwandte Grundzahl e der natürlichen Logarithmen

lässt Zweifel über ihre absolute Richtigkeit zu. Fast alle unsere mathematischen Tafelwerke haben die üble Gewohnheit, in einem Anhange die Zahlwerthe der am häufigsten vorkommenden numerischen Constanten aufzuführen, ohne auch nur mit einem Worte zu erwähnen, ob sie von den Verfassern neu berechnet oder aus anderen ähnlichen Werken entlehnt worden sind. Will man dann einen solchen Zahlwerth für irgend eine grössere numerische Rechnung zu Grunde legen, so findet man sich über die Zuverlässigkeit desselben in peinlicher Ungewissheit; ja man ist oft nicht einmal im Stande zu erkennen, ob die in der Tafel stehenden Ziffern von Druckfehlern frei sind.

Eine Vergleichung mehrerer Tafeln mit einander kann hier natürlich nicht zum Zwecke führen; denn wenn die aufgenommenen Data aus einer in die andere übergegangen sind, so sind alle Rechnungs- und Druckfehler ebenfalls copirt worden.

Aus diesem Grunde habe ich bereits vor längerer Zeit eine Revision der wichtigsten numerischen Constanten begonnen und theile hier die Resultate für die Zahl e und einige verwandte Grössen als Probe mit.

Es wurden zuvörderst die Summen der vier Reihen

$$\mathrm{I} = 1 + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \dots$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} + \dots$$

$$\mathrm{III} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{10!} + \dots$$

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{3!} + \frac{7}{7!} + \frac{1}{11!} + \dots$$

gesucht und aus ihnen durch gehörige Verbindung die nachstehenden sechs Zahlwerthe abgeleitet:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352$$
$$66249\ 77572\ 47093\ 69995\ 95749\ 66967$$
$$62772\ 40766\ 30353\ 54759\ 45713\ 82178$$
$$52516\ 64274\ 27466$$

$$\frac{1}{e} = 0{,}36787\ 94411\ 71442\ 32159\ 55237\ 70161$$
$$46086\ 74458\ 11131\ 03176\ 78345\ 07836$$
$$80169\ 74614\ 95744\ 89980\ 33571\ 47274$$
$$34591\ 96437\ 46627$$

$$\mathfrak{Cos}\ 1 = 1{,}54308\ 06348\ 15243\ 77847\ 79056\ 20757$$
$$06168\ 26015\ 29112\ 36586\ 37047\ 37402$$
$$21471\ 07690\ 63049\ 22369\ 89642\ 64726$$
$$43554\ 30355\ 87046:$$

Sin 1 = 1,17520 11936 43801 45688 23818 50595
60081 51557 17981 33409 58702 29565
41301 33075 67304 32389 56071 17452
08962 33918 40419:

cos 1 = 0,54030 23058 68139 71740 09366 07442
97660 37323 10420 61792 22276 70097
25538 11003 94774 47176 45179 51856
08718 30893 43571:

sin 1 = 0,84147 09848 07896 50665 25023 21630
29899 96225 63060 79837 10656 72751
70999 19104 04391 23966 89486 39743
54305 26958 54349

Die Funktionen Cos und Sin sind die von Gudermann eingeführten hyperbolischen Cosinus und Sinus. Vorstehende Resultate sind auf 115 Decimalstellen berechnet, die letzten zehn jedoch hier weggelassen worden. Uebrigens habe ich die letzte Ziffer stets ungeändert gelassen, jedoch in dem Falle, wenn die nächstfolgende 106te Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9 war, dies durch ein beigesetztes Colon angedeutet. Dass die ganze Rechnung, ohne alle Ausnahme doppelt geführt worden ist, versteht sich von selbst; und ich habe noch ausserdem die Wiederholung derselben ein ganzes Jahr später vorgenommen, als die erste Rechnung, da ich früherhin bei einer anderen Rechnung ähnlicher Art die Erfahrung gemacht hatte, dass ich bei unmittelbarer Wiederholung des Calculs zweimal den nämlichen zufälligen Fehler beging. Da übrigens die Resultate beider Berechnungen im vorliegenden Falle nur um 12 Einheiten der letzten 115ten Decimalstelle von einander abwichen, so dürfen die hier gegebenen Ziffern wohl als völlig sicher angesehen werden.

In der Einleitung zu Callet's tables portatives de logarithmes etc. pg. 112 findet sich der Werth von e auf 61 Decimalstellen, aus dem Modulus der briggischen Logarithmen abgeleitet. Die ersten 41 Decimalen sind richtig, die letzten 20 total falsch. Es ist nämlich der Werth von e von der 40sten Stelle an

nach Callet . . 46928 08355 51550 58417 2; dagegen

der wahre Werth 47093 69995 95749 66967 6.

Im Vega'schen thesaurus findet sich pg. 309 die Zahl e auf 44 Decimalen berechnet, nur um 3 Einheiten der letzten 44sten Stelle zu gross; denn Vega hat . . . 77572 4712, anstatt des wahren Werthes . . 77572 4709.

Gudermann, in seiner Theorie der Potenzialfunktionen, hat die Werthe von Sin 1, Cos 1, sin 1 und cos 1 auf 25 Decimalen gegeben. Mit Ausnahme der letzten Ziffern jeder dieser Zahlen sind die übrigen sämmtlich richtig. Nur in dem Werthe von cos 1 ist die 13te Decimale falsch, indem es statt . . 68039 . . vielmehr . . 68139 . . heissen muss.

Ganz eben so wie für e habe ich dann ferner die Summen der vier Reihen

$$1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots$$

$$\frac{x^1}{1!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$$

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

$$\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

für alle Werthe von x, von 2 bis zu 10, auf 25 Decimalen berechnet und dadurch die Zahlen erhalten, welche unten in der ersten Tafel bis auf 20 Decimalen zusammengestellt sind. Die Probe der Richtigkeit der einzelnen Resultate wurde dadurch erhalten, dass die Summe der oben angeführten vier Reihen genau denselben Werth für e^x ergeben musste, der durch successive Multiplication von e gefunden worden war. Bei der grossen Leichtigkeit mit der sich aus den Gliedern der Reihe für e^x die Glieder der Reihe für $\int e^x d.(lx)$ finden lassen, habe ich auch die Werthe der Integralfunktionen

$$\int e^{\pm x}\frac{dx}{x}=li\ (\pm x)$$

$$\int \mathfrak{Cos}\ x.\frac{dx}{x}=\mathfrak{CJ}\ x;\ \int \cos x.\frac{dx}{x}=\mathrm{ci}\ x$$

$$\int \mathfrak{Sin}\ x.\frac{dx}{x}=\mathfrak{SJ}\ x;\ \int \sin x.\frac{dx}{x}=\mathrm{si}\ x$$

in Rechnung genommen. Zu dem Ende wurden die Summen der vier Reihen

$$\gamma+lx+\frac{1}{4}.\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{8}.\frac{x^8}{8!}+\ldots$$

$$\frac{1}{1}.\frac{x}{1!}+\frac{1}{5}.\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{9}.\frac{x^9}{9!}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{6}.\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{10}.\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

$$\frac{1}{3}.\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{7}.\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{11}.\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

für die Werthe von $x=1$ bis $x=10$ gesucht und aus ihnen die Werthe obiger Integralfunktionen abgeleitet. Eine Probe der Rechnung erhielt ich dadurch, dass ich den Werth li e^x unmittelbar aus der von mir früher entwickelten Formel (theoriae logarithmi integralis lineamenta nova in Crelle's Journal Bd. 17. pg. 284 Nr. 59.)

$$\mathrm{li}\ e^{x+1}=\mathrm{li}\ e^x+e^{x+1}\{K_0-K_1+K_2-K_3+\ldots\}$$

berechnete, in welcher die Grössen $K_0 K_1 K_2$ u. s. w. mittelst der Recursionsformeln

$$K_0 = \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$K_1 = (x+1)K_0 - \frac{1}{1}$$

$$K_2 = 1!(x+1)K_1 - \frac{1}{2}$$

$$K_3 = 2!(x+1)K_2 - \frac{1}{3} \text{ u. s. w.}$$

abgeleitet werden können. Da aber diese Formel den Werth von li e nothwendig voraussetzt, so wurde letzterer aus der Grundformel

$$\text{li } e = \gamma + 1 + \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{4.4!} + \ldots.$$

durch zweimalige Berechnung auf 40 Decimalstellen entwickelt, woraus sich, mit Weglassung der 5 letzten Stellen, folgende Resultate ergaben:

$$\text{li } e = +1{,}89511\ 78163\ 55936\ 75546\ 65209\ 34331\ 63426:$$

$$\text{li } \frac{1}{e} = -0{,}21938\ 39343\ 95520\ 27367\ 71637\ 75460\ 12164:$$

$$\mathfrak{CI}\ 1 = +0{,}83786\ 69409\ 80208\ 24089\ 46785\ 79435\ 75630:$$

$$\mathfrak{SI}\ 1 = +1{,}05725\ 08753\ 75728\ 51457\ 18423\ 54895\ 87795:$$

$$\text{ci } 1 = +0{,}33740\ 39229\ 00968\ 13466\ 26462\ 03889\ 15076:$$

$$\text{si } 1 = +0{,}94608\ 30703\ 67183\ 01494\ 13533\ 13823\ 17965:$$

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass ich vor Kurzem einen ganz einfachen Weg aufgefunden habe, die bisher immer noch so mühsame Berechnung der Integrallogarithmen sehr grosser Zahlen ausnehmend leicht zu bewerkstelligen. Man hat nämlich allgemein folgende Formel:

$$\text{li } (e^n + x) = \text{li } e^n + \lg\left[\frac{\lg(e^n + x)}{n}\right]$$
$$+ e^n\left\{\frac{\lg \nu}{1!}\, C_1^{-n} + \frac{(\lg \nu)^2}{2!}\, C_2^{-n} + \frac{(\lg \nu)^3}{3!}\, C_3^{-n} + \ldots\right\}$$

in welcher $\nu = 1 + \frac{x}{e^n}$ ist und die Coefficienten C_p^{-n} durch die Gleichung

$$C_p^{-n} = \frac{1}{p} - \frac{n}{p(p+1)} + \frac{n^2}{p(p+1)(p+2)} - + \ldots$$

bestimmt werden. Setzt man nun in obiger Formel z. B. $n = 10$, also $e^n = 22026{,}46579\ldots$ so braucht man nur $x = -0{,}46579\ldots$ d. h. gleich dem, mit der Potenz e^n verbundenen Decimalbruch, zu setzen, um sofort den Integrallogarithmen der hohen Zahl 22026 zu erhalten. Es ergiebt sich daraus der Werth von $\lg \nu = 0{,}00002113\ldots$ so dass die zu berechnende Reihe ausserordentlich schnell convergirt. Man kann nun leicht weiter gehen und für x grössere

Werthe nehmen, und wird für lg ν immer noch sehr kleine Werthe erhalten. So ist z. B. für

$$x = - \ 1{,}46579 \,.. \quad e^{10} + x = 22025 \text{ und } \lg \nu = 0{,}00006654$$
$$x = - \ 6{,}46579 \,.. \quad e^{10} + x = 22020 \text{ und } \lg \nu = 0{,}00029357$$
$$x = - 26{,}46579 \,.. \quad e^{10} + x = 22000 \text{ und } \lg \nu = 0{,}00120226$$

u. s. w. woraus sich die ungemeine Brauchbarkeit der zu Grunde gelegten Formel wohl sattsam ergiebt. Selbst bei weit niedrigeren Potenzen von e wird sie noch mit Vortheil angewendet werden können. Denn es ist z. B. für die dritte Potenz von e der Werth $e^3 = 20{,}08553 \,..$ und dies giebt

$$\text{für } x = -0{,}08553 \,.. \quad e^3 + x = 20 \text{ und } \lg \nu = 0{,}00426772$$
$$\text{für } x = -1{,}08553 \,.. \quad e^3 + x = 19 \text{ und } \lg \nu = 0{,}05556101$$
$$\text{für } x = -2{,}08553 \,.. \quad e^3 + x = 18 \text{ und } \lg \nu = 0{,}10962823.$$

ingleichen

$$\text{für } x = + \ 0{,}91446 \,.. \quad e^3 + x = 21 \text{ und } \lg \nu = 0{,}04452244$$
$$\text{für } x = + \ 1{,}91446 \,.. \quad e^3 + x = 22 \text{ und } \lg \nu = 0{,}09104245$$
$$\text{für } x = + 14{,}91446 \,.. \quad e^3 + x = 35 \text{ und } \lg \nu = 0{,}55534806$$

so dass selbst für $x > \frac{1}{2}e^n$ jedes folgende Glied der Reihe um mehr als die Hälfte kleiner ist, als das vorhergehende.

x	e^x	Cos x	cos x
1	2,71828 18284 59045 23536	1,54308 06348 15243 77847:	+ 0,54030 23058 68139 71740
2	7,38905 60989 30650 22723	3,76219 56910 83631 45956	— 0,41614 68365 47142 38699:
3	20,08553 69231 87667 74092:	10,06766 19957 77765 84195	— 0,98999 24966 00445 45727
4	54,59815 00331 44239 07811	27,30823 28360 16486 62920	— 0,65364 36208 63611 91463:
5	148,41315 91025 76603 42111:	74,20994 85247 87844 44410:	+ 0,28366 21854 63226 26446:
6	403,42879 34927 35122 60838:	201,71563 61224 55894 48340:	+ 0,96017 02866 50366 02054:
7	1096,63315 84284 58599 26372	548,31703 51552 12076 88996	+ 0,75390 22543 43304 63814
8	2980,95798 70417 28274 74359	1490,47916 12521 78088 62771:	— 0,14550 00338 08613 52586:
9	8103,08392 75753 84007 70999:	4051,54202 54925 94047 19477	— 0,91113 02618 84676 98836:
10	22026,46579 48067 16516 95790	11013,23292 01033 23139 72137:	— 0,83907 15290 76452 45225:
x	e^{-x}	Sin x	sin x
1	0,36787 94411 71442 32159:	1,17520 11936 43801 45688	+ 0,84147 09848 07896 50665
2	0,13533 52832 36612 69189	3,62686 04078 47018 76766	+ 0,90929 74268 25681 69539:
3	0,04978 70683 67863 94297:	10,01787 49274 09901 89897	+ 0,14112 00080 59867 22210
4	0,01831 56388 88734 18029	27,28991 71971 27752 44890:	— 0,75680 24953 07928 25137
5	0,00673 79469 99085 46709:	74,20321 05777 88758 97700:	— 0,95892 42746 63138 46889
6	0,00247 87521 76666 35842	201,71315 73702 79228 12498	— 0,27941 54981 98925 87281
7	0,00091 18819 65554 51620:	548,31612 32732 46522 37375:	+ 0,65698 65987 18789 09039:
8	0,00033 54626 27902 51183:	1490,47882 57895 50186 11587:	+ 0,98935 82466 23381 77780:
9	0,00012 34098 04086 67954:	4051,54190 20827 89960 51522	+ 0,41211 84852 41756 56975:
10	0,00004 53999 29762 48485	11013,23287 47033 93377 23652	— 0,54402 11108 89369 81340

x	li . e^x	𝔈𝔍 . x	ci . x
1	+ 1,89511 78163 55936 75546:	+ 0,83786 69409 80208 24089	+ 0,33740 39229 00968 13466
2	+ 4,95423 43560 01890 16337:	+ 2,45266 69226 46914 52190:	+ 0,42298 08287 74864 99569:
3	+ 9,93383 25706 25416 55800:	+ 4,96039 20947 65609 76029:	+ 0,11962 97860 08000 32762:
4	+ 19,63087 44700 56220 02264:	+ 9,81354 75588 23185 55808	− 0,14098 16978 86930 41163:
5	+ 40,18527 53558 03177 45509	+ 20,09206 35301 05951 06464:	− 0,19002 97496 56643 87861:
6	+ 85,98976 21424 39204 80358	+ 42,99470 10299 93521 07246	− 0,06805 72438 93247 12620
7	+ 191,50474 33355 01395 95306	+ 95,75231 39268 84892 80742	+ 0,07669 52784 82184 51838
8	+ 440 37989 95348 38268 99742	+ 220,18993 09346 07712 53626	+ 0,12243 38825 32009 55729
9	+ 1037,87829 07170 89587 65757	+ 518,93913 91348 67704 82565	+ 0,05534 75313 33133 60708:
10	+ 2492,22897 62418 77759 13844	+ 1246,11448 60424 54414 72655:	− 0,04545 64330 04455 37263
	li . e^{-x}	𝔖𝔍 . x	ſi . x
1	− 0,21938 39343 95520 27367:	+ 1,05725 08753 75728 51457	+ 0,94608 30703 67183 01494
2	− 0,04890 05107 08061 11956:	+ 2,50156 74333 54975 64147	+ 1,60541 29768 02694 84857:
3	− 0,01304 83810 94197 03741	+ 4,97344 04758 59806 79771	+ 1,84865 25279 99468 25639:
4	− 0,00377 93524 09848 90647:	+ 9,81732 69112 33034 46456	+ 1,75820 31389 49053 05810:
5	− 0,00144 82955 91275 32579:	+ 20,09321 18256 97226 39044	+ 1,54993 12449 44674 13727
6	− 0,00036 00824 52162 65865:	+ 42,99506 11124 45683 73112	+ 1,42468 75512 80506 53576:
7	− 0,00011 54817 31610 33821:	+ 95,75242 94086 16503 14563:	+ 1,45459 66142 48093 59061
8	− 0,00003 76656 22843 92490	+ 220,18996 86002 30556 46116	+ 1,57418 68217 06942 05208
9	− 0,00001 24473 54178 00627	+ 518,93915 15822 21882 83192	+ 1,66504 00758 29602 49510:
10	− 0,00000 41569 68929 68532	+ 1246,11449 01994 23344 41188	+ 1,65834 75942 18874 04933

VII.

Ueber eine geodätische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

Bei einer Triangulirung kann zuweilen der folgende Fall vorkommen. M und M_1 sind zwei Punkte, deren Lage aus einer frühern Messung bekannt ist. Man kann aber keinen dieser beiden Punkte von dem andern aus sehen. Dagegen sieht man sowohl von M, als auch von M_1 aus, drei andere ihrer Lage nach unbekannte Punkte A, B, C, und misst in M die 180° nicht übersteigenden Winkel AMB, BMC, CMA, in M_1 die 180° nicht übersteigenden Winkel AM_1B, BM_1C, CM_1A. Ist es dann noch möglich, die drei Winkel A, B, C des durch die eben so bezeichneten Punkte bestimmten Dreiecks ABC, dessen den Winkeln A, B, C gegenüberstehende Seiten wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnet werden sollen, zu messen, so kann man jederzeit die Lage der drei Punkte A, B, C bestimmen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Man nehme eine Seite des Dreiecks ABC, etwa die Seite c, als Längeneinheit an, so hat man für die drei Seiten a, b, c des in Rede stehenden Dreiecks nach einem bekannten Elementarsatze der ebenen Trigonometrie die folgenden Ausdrücke:

$$1) \quad \ldots a = \frac{\sin A}{\sin C}, \; b = \frac{\sin B}{\sin C}, \; c = 1;$$

und kann also die drei Seiten a, b, c in Bezug auf die angenommene Längeneinheit aus den gemessenen Winkeln A, B, C leicht berechnen.

Da die Lage der Punkte M, M_1 als bekannt vorausgesetzt wird, so nehmen wir an, dass die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges Coordinatensystem, welches im Folgenden das primitive System genannt werden soll, gegeben sind. Nimmt man nun A als den Anfang, AB als den positiven Theil der Axe der ξ eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $\xi\eta$, und, was offenbar immer möglich ist, den positiven Theil der Axe der η so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der ξ durch den rechten Winkel $(\xi\eta)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der η zu gelangen, ganz nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der ersten Axe des primitiven Systems durch den primitiven Coordinatenwinkel hindurch zu

dem positiven Theile der zweiten Axe des primitiven Systems zu gelangen; so sind in Bezug auf dieses angenommene neue rechtwinklige Coordinatensystem die Coordinaten der drei Punkte A, B, C offenbar respective:

$$0,\ 0;\ c,\ 0;\ b\cos A,\ \pm b\sin A;$$

oder nach dem Vorhergehenden:

$$0,\ 0;\ 1,\ 0;\ \frac{\cos A\sin B}{\sin C},\ \pm\frac{\sin A\sin B}{\sin C};$$

wo in dem Ausdrucke der zweiten Coordinate des Punktes C das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem der positive Theil der Axe der η auf derselben Seite von AB wie der Punkt C oder auf der entgegengesetzten Seite von AB liegt. Aus diesen so eben bestimmten Coordinaten der Punkte A, B, C und den in M und M_1 gemessenen, 180° nicht übersteigenden Winkeln AMB, BMC, CMA und AM_1B, BM_1C, CM_1A kann man nun nach dem Pothenot'schen oder vielmehr Snellius'schen Problem, etwa mittelst der Thl. I. S. 446—S. 448 entwickelten Formeln, die Coordinaten ξ, η und ξ_1, η_1 der Punkte M und M_1 in dem Systeme der $\xi\eta$, so wie auch die Entfernungen MA, MB, MC und M_1A, M_1B, M_1C berechnen.

Denkt man sich jetzt durch den Punkt M als Anfang ein dem Systeme der $\xi\eta$ paralleles System der $\xi'\eta'$ gelegt, und bezeichnet die Coordinaten des Punktes M_1 in diesem Systeme durch ξ'_1, η'_1, die Länge der Linie MM_1 durch (ϱ), und den von dieser Linie mit dem positiven Theile der Axe der ξ' eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der ξ' an durch den rechten Winkel $(\xi'\eta')$ hindurch von 0 bis 360° zählt, durch Θ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$2)\ \ldots\ \xi'_1=(\varrho)\cos\Theta,\ \eta'_1=(\varrho)\sin\Theta.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber offenbar

$$\xi_1=\xi+\xi'_1,\ \eta_1=\eta+\eta'_1$$

oder

$$\xi'_1=\xi_1-\xi,\ \eta'_1=\eta_1-\eta;$$

d. i. nach dem Obigen

$$3)\ \ldots\ (\varrho)\cos\Theta=\xi_1-\xi,\ (\varrho)\sin\Theta=\eta_1-\eta;$$

also

$$4)\ \ldots\ \operatorname{tang}\Theta=\frac{\eta_1-\eta}{\xi_1-\xi}$$

und

$$5)\ \ldots\ (\varrho)=\frac{\xi_1-\xi}{\cos\Theta}=\frac{\eta_1-\eta}{\sin\Theta},$$

mittelst welcher Formeln Θ und (ϱ) leicht berechnet werden können. Ob man den positiven Winkel oder Bogen Θ, welcher 360° nicht übersteigt, zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat, entscheidet man dadurch, dass man für Θ im-

mer denjenigen der beiden in Rede stehenden Werthe zu setzen hat, welcher mittelst der Formeln 5) für (ϱ) einen positiven Werth liefert.

Wohl zu beachten hat man, dass bis jetzt immer die Seite AB oder c des Dreiecks ABC als Längeneinheit angenommen worden ist.

Da die Lage der Punkte M und M_1 als bekannt angenommen wird, so sind, wie schon vorher bemerkt worden ist, ihre Coordinaten x, y und x_1, y_1 in Bezug auf ein gewisses rechtwinkliges Coordinatensystem der xy und eine bestimmte Längeneinheit, welche durch μ bezeichnet werden mag, gegeben. Legen wir nun durch den Punkt M ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $x'y'$, und bezeichnen die Coordinaten des Punktes M_1 in diesem Systeme durch x'_1, y'_1, den numerischen Ausdruck der Länge der Linie MM_1 in Bezug auf die Längeneinheit μ durch ϱ, und den von der Linie MM_1 mit dem positiven Theile der Axe der x' eingeschlossenen, von dem positiven Theile der Axe der x' an durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch φ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$6) \quad \ldots x'_1 = \varrho \cos \varphi,\ y'_1 = \varrho \sin \varphi,$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist

$$x_1 = x + x'_1,\ y_1 = y + y'_1$$

oder

$$x'_1 = x_1 - x,\ y'_1 = y_1 - y,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$7) \quad \ldots \varrho \cos \varphi = x_1 - x,\ \varrho \sin \varphi = y_1 - y,$$

folglich

$$8) \quad \ldots \operatorname{tang} \varphi = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

und

$$9) \quad \ldots \varrho = \frac{x_1 - x}{\cos \varphi} = \frac{y_1 - y}{\sin \varphi},$$

mittelst welcher Formeln φ und ϱ berechnet werden können. Ob man den positiven, 360° nicht übersteigenden Winkel oder Bogen φ zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° zu nehmen hat, wird dadurch jederzeit leicht entschieden, dass man für φ immer denjenigen der beiden in Rede stehenden Werthe zu setzen hat, welcher mittelst der Formeln 9) für ϱ einen positiven Werth liefert.

Nach dem Vorhergehenden sind (ϱ) und ϱ die numerischen Ausdrücke derselben Linie MM_1 in Bezug auf verschiedene Längeneinheiten, nämlich respective in Bezug auf die Längeneinheiten c und μ, und es ist also eigentlich

$$MM_1 = (\varrho)c,\ MM_1 = \varrho\mu,$$

folglich

$$(\varrho)c = \varrho\mu,$$

woraus sogleich

$$10) \quad \ldots c = \frac{\varrho}{(\varrho)}\mu$$

folgt, oder auch

$$11) \quad \ldots c = \frac{\varrho}{(\varrho)},$$

wenn man nur den Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf die Längeneinheit μ bezieht, wodurch also die wahre Grösse von c in Bezug auf die der ursprünglichen Messung, aus welcher die Lage der Punkte M und M_1 hergeleitet wurde, zum Grunde gelegte Längeneinheit μ gefunden ist. Die numerischen Ausdrücke aller im Vorhergehenden in Bezug auf die Längeneinheit c berechneten Längen in Bezug auf die Längeneinheit μ erhält man, wenn man die in Rede stehenden Längen in Bezug auf die Längeneinheit c sämmtlich mit dem Bruche $\frac{\varrho}{(\varrho)}$ multiplicirt, wie auf der Stelle erhellen wird, so dass also hiernach auch die numerischen Ausdrücke aller dieser Längen in Bezug auf die der ursprünglichen Messung, aus welcher die Lage der Punkte M und M_1 hergeleitet wurde, zum Grunde gelegte Längeneinheit μ ohne Schwierigkeit gefunden werden kann.

Endlich wollen wir nun noch zeigen, wie, indem wir von jetzt an natürlich immer die Längeneinheit μ zum Grunde legen, die Coordinaten X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2 der drei Punkte A, B, C, deren Lage zu bestimmen unsere eigentliche Aufgabe ist, in Bezug auf das primitive System der xy gefunden werden können.

Zu dem Ende bemerken wir zuvörderst, dass aus den bekannten Winkeln Θ und φ immer leicht der Winkel ψ abgeleitet werden kann, welchen der positive Theil der Axe der ξ' mit dem positiven Theile der Axe der x' einschliesst, wobei man diesen Winkel wie gewöhnlich von dem positiven Theile der Axe der x' an durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch von 0 bis 360° zählt. Bei der Aufstellung der an sich übrigens sehr einfachen allgemeinen Regeln für die Ableitung des Winkels ψ aus den Winkeln Θ und φ wollen wir uns hier jedoch nicht aufhalten, weil man sich, wenn nicht auf andere Weise, doch immer durch eine leicht zu entwerfende Figur bei diesem Geschäft wird helfen können.

Die Coordinaten der Punkte A, B, C im Systeme der $x'y'$, dessen Anfang M ist, seien X', Y'; X'_1, Y'_1; X'_2, Y'_2; und $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{Y}'_1$; $\mathfrak{X}'_2$, $\mathfrak{Y}'_2$ seien die Coordinaten der Punkte A, B, C im Systeme der $\xi'\eta'$, dessen Anfang ebenfalls M ist.

Da das System der $\xi'\eta'$ dem Systeme der $\xi\eta$ parallel ist, und ξ, η die Coordinaten des Punktes M in dem letztern Systeme in Bezug auf die Längeneinheit c sind; so ist, weil nach dem Obigen

$$0,\ 0;\ \frac{\varrho}{(\varrho)},\ 0;\ \frac{b\varrho}{(\varrho)}\cos A,\ \pm\frac{b\varrho}{(\varrho)}\sin A\,^{*})$$

die Coordinaten der Punkte A, B, C in dem Systeme der $\xi\eta$

*) Wegen des Vorzeichens ist schon oben die nöthige Bestimmung gegeben worden.

(jetzt natürlich immer in Bezug auf die Längeneinheit μ) sind, nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$0 = \frac{\varrho}{(\varrho)}\xi + \mathfrak{X}',\ 0 = \frac{\varrho}{(\varrho)}\eta + \mathfrak{Y}';$$

$$\frac{\varrho}{(\varrho)} = \frac{\varrho}{(\varrho)}\xi + \mathfrak{X}'_1,\ 0 = \frac{\varrho}{(\varrho)}\eta + \mathfrak{Y}'_1;$$

$$\frac{b\varrho}{(\varrho)}\cos A = \frac{\varrho}{(\varrho)}\xi + \mathfrak{X}'_2,\ \pm\frac{b\varrho}{(\varrho)}\sin A = \frac{\varrho}{(\varrho)}\eta + \mathfrak{Y}'_2;$$

also

$$12)\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}' = -\frac{\varrho}{(\varrho)}\xi,\ \mathfrak{Y}' = -\frac{\varrho}{(\varrho)}\eta; \\ \mathfrak{X}'_1 = \frac{\varrho}{(\varrho)}(1-\xi),\ \mathfrak{Y}'_1 = -\frac{\varrho}{(\varrho)}\eta; \\ \mathfrak{X}'_2 = \frac{\varrho}{(\varrho)}(b\cos A - \xi),\ \mathfrak{Y}'_2 = \pm\frac{\varrho}{(\varrho)}(b\sin A \mp \eta); \end{array}\right.$$

mittelst welcher Formeln die Coordinaten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{Y}'_1$; $\mathfrak{X}'_2$, $\mathfrak{Y}'_2$ berechnet werden können.

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist nun ferner

$$12)\ \left\{\begin{array}{l} X' = \mathfrak{X}'\cos\psi - \mathfrak{Y}'\sin\psi,\ Y' = \mathfrak{X}'\sin\psi + \mathfrak{Y}'\cos\psi; \\ X'_1 = \mathfrak{X}'_1\cos\psi - \mathfrak{Y}'_1\sin\psi,\ Y'_1 = \mathfrak{X}'_1\sin\psi + \mathfrak{Y}'_1\cos\psi; \\ X'_2 = \mathfrak{X}'_2\cos\psi - \mathfrak{Y}'_2\sin\psi,\ Y'_2 = \mathfrak{X}'_2\sin\psi + \mathfrak{Y}'_2\cos\psi; \end{array}\right.$$

und

$$(14\ \left\{\begin{array}{l} X = x + X',\ Y = y + Y', \\ X_1 = x + X'_1,\ Y = y + Y'_1; \\ X_2 = x + X'_2,\ Y = y + Y'_2; \end{array}\right.$$

mittelst welcher Formeln also jetzt die gesuchten Coordinaten X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2 der Punkte A, B, C in Bezug auf das primitive System der xy gefunden werden können, und die Lage dieser Punkte daher bestimmt ist, wie verlangt wurde.

Bezeichnet man die von den Linien MA, MB, MC mit dem positiven Theile der Axe der ξ' eingeschlossenen und auf gewöhnliche Weise von 0 bis 360° gezählten Winkel durch ζ, ζ_1, ζ_2 und setzt $MA = r$, $MB = r_1$, $MC = r_2$; so ist offenbar

$$\mathfrak{X}' = r\cos\zeta,\ \mathfrak{Y}' = r\sin\zeta;$$

$$\mathfrak{X}'_1 = r_1\cos\zeta_1,\ \mathfrak{Y}'_1 = r_1\sin\zeta_1;$$

$$\mathfrak{X}'_2 = r_2\cos\zeta_2,\ \mathfrak{Y}'_2 = r_2\sin\zeta_2;$$

also

$$15)\ \left\{\begin{array}{l} \cos\zeta = \frac{\mathfrak{X}'}{r},\ \sin\zeta = \frac{\mathfrak{Y}'}{r},\ \tang\zeta = \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{X}'}; \\ \cos\zeta_1 = \frac{\mathfrak{X}'_1}{r_1},\ \sin\zeta_1 = \frac{\mathfrak{Y}'_1}{r_1},\ \tang\zeta_1 = \frac{\mathfrak{Y}'_1}{\mathfrak{X}'_1}; \\ \cos\zeta_2 = \frac{\mathfrak{X}'_2}{r_2},\ \sin\zeta_2 = \frac{\mathfrak{Y}'_2}{r_2},\ \tang\zeta_2 = \frac{\mathfrak{Y}'_2}{\mathfrak{X}'_2}; \end{array}\right.$$

mittelst welcher Formeln die Winkel ζ, ζ_1, ζ_2 berechnet werden können *). Hat man aber diese Winkel, so ist nach 13)

$$16)\begin{cases} X'=r\cos(\psi+\zeta),\quad Y'=r\sin(\psi+\zeta); \\ X'_1=r_1\cos(\psi+\zeta_1),\quad Y'_1=r_1\sin(\psi+\zeta_1); \\ X'_2=r_2\cos(\psi+\zeta_2),\quad Y'_2=r_2\sin(\psi+\zeta_2); \end{cases}$$

und also nach 14)

$$17)\begin{cases} X=x+r\cos(\psi+\zeta),\quad Y=y+r\sin(\psi+\zeta); \\ X_1=x+r_1\cos(\psi+\zeta_1),\quad Y_1=y+r_1\sin(\psi+\zeta_1); \\ X_2=x+r_2\cos(\psi+\zeta_2),\quad Y_2=y+r_2\sin(\psi+\zeta_2). \end{cases}$$

Die vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe, obgleich dieselbe eine doppelte Anwendung des Pothenot'schen oder vielmehr Snellius'schen Problems in Anspruch nimmt, scheint uns dessenungeachtet für die wirkliche Anwendung die meisten Vortheile zu gewähren, weshalb wir für jetzt andere Auflösungen derselben nicht geben, und mit der Bemerkung schliessen wollen, dass man diese Aufgabe, unter einem rein-geometrischen Gesichtspunkte aufgefasst, auch auf folgende Art ausdrücken kann:

Es seien zwei Punkte M und M_1 gegeben; man soll durch den Punkt M drei unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien (1), (2), (3), durch den Punkt M_1 drei ebenfalls unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien (1_1), (2_1), (3_1) so legen, dass das durch die Durchschnittspunkte der Linien (1) und (1_1), der Linien (2) und (2_1), und der Linien (3) und (3_1) bestimmte Dreieck einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Wir möchten uns wohl erlauben, dieses Problem den Lesern des Archivs zur weiteren Untersuchung zu empfehlen, da dasselbe, so viel uns wenigstens bekannt ist, sonst noch keine Behandlung gefunden hat.

*) Die Grössen $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$; $\mathfrak{X}'_1$, $\mathfrak{Y}'_1$; $\mathfrak{X}'_2$, $\mathfrak{Y}'_2$ und r, r_1, r_2 sind aus dem Vorhergehenden bekannt.

VIII.

Ueber die höhern Differentialquotienten der Functionen

$$P=\frac{\sin x}{1+2y\cos x+y^2},\quad Q=\frac{y+\cos x}{1+2y\cos x+y^2}$$

in Bezug auf x als veränderliche Grösse.

Nach Theoremata nova de integralibus definitis, summatione serierum earumque in alias series transformatione. Auctore C. J. Malmsten, Phil. Mag. ad Reg Acad. Upsal. Math. infer. Doc. Upsaliae. MDCCCXLII. p. 26—35 frei bearbeitet von

dem Herausgeber.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Lehre von den höhern Differentialquotienten zu noch manchen interessanten neuen Untersuchungen Gelegenheit darbieten kann, und es ist nach unserer Ueberzeugung jedenfalls sehr wünschenswerth, dass man sich noch mehr als bisher geschehen ist mit der Entwickelung allgemeiner Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten der Functionen, beschäftige, da ja dieselben bekanntlich für die Entwickelung der Functionen in Reihen, für die Theorie der bestimmten Integrale und für viele andere Untersuchungen von sehr grosser Wichtigkeit sind. Ein schönes Beispiel einer solchen Untersuchung über höhere Differentialquotienten hat neuerlichst Herr C. J. Malmsten zu Upsala in der oben genannten, noch viele andere bemerkenswerthe Resultate enthaltenden Abhandlung gegeben, und wir glauben, um so mehr, weil diese Abhandlung wohl schwerlich in die Hände vieler deutschen Mathematiker gelangen wird, den Lesern des Archivs einen Dienst zu leisten, wenn wir ihnen die in Rede stehende Untersuchung des Herrn C. J. Malmsten ihrem wesentlichen Inhalte nach im Folgenden mittheilen.

Die beiden gegebenen Functionen sind

$$P=\frac{\sin x}{1+2y\cos x+y^2},$$

$$Q=\frac{y+\cos x}{1+2y\cos x+y^2};$$

und die Aufgabe ist, allgemeine Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten dieser beiden Functionen zu finden, wenn man in ihnen x als veränderliche Grösse, y dagegen als constant betrachtet.

Wenn das Symbol e seine gewöhnliche Bedeutung hat und der Kürze wegen i für $\sqrt{-1}$ geschrieben wird, so setzen wir im Folgenden

$$U_0 = (1 + ye^{-ix})^{-1} = e^{ix}(y + e^{ix})^{-1},$$
$$V_0 = (1 + ye^{ix})^{-1} = e^{-ix}(y + e^{-ix})^{-1}$$

und

$$U_r = \frac{d^r U_0}{dx^r},\ V_r = \frac{d^r V_0}{dx^r}.$$

Aus den beiden obigen Ausdrücken von U_0 und V_0 erhält man durch ganz elementare Rechnungen

$$U_0 V_0 = \{1 + y(e^{ix} + e^{-ix}) + y^2\}^{-1},$$
$$U_0 - V_0 = \frac{y(e^{ix} - e^{-ix})}{1 + y(e^{ix} + e^{-ix}) + y^2},$$
$$U_0 + V_0 = \frac{2 + y(e^{ix} + e^{-ix})}{1 + y(e^{ix} + e^{-ix}) + y^2}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

also

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x,\ e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

ist; so ist

$$U_0 V_0 = (1 + 2y \cos x + y^2)^{-1},$$
$$U_0 - V_0 = \frac{2iy \sin x}{1 + 2y \cos x + y^2},$$
$$U_0 + V_0 = \frac{2 + 2y \cos x}{1 + 2y \cos x + y^2};$$

oder

$$\frac{U_0 - V_0}{2i} = yP,$$
$$\frac{U_0 + V_0}{2} = \frac{1 + y \cos x}{1 + 2y \cos x + y^2}.$$

Durch Differentiation von U_0 und V_0 nach x erhält man ohne Schwierigkeit

$$U_1 = \frac{dU_0}{dx} = \frac{iye^{-ix}}{(1 + ye^{-ix})^2},$$
$$V_1 = \frac{dV_0}{dx} = -\frac{iye^{ix}}{(1 + ye^{ix})^2};$$

also, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$U_1 + V_1 = -\frac{iy(1-y^2)\,(e^{ix}-e^{-ix})}{\{1+y(e^{ix}+e^{-ix})+y^2\}^2},$$

oder nach dem Obigen

$$\frac{U_1+V_1}{2} = \frac{y(1-y^2)\sin x}{(1+2y\cos x+y^2)^2}.$$

Differentiirt man ferner die Function Q nach x, so erhält man

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{(1-y^2)\sin x}{(1+2y\cos x+y^2)^2},$$

und nach dem Vorhergehenden ist folglich

$$\frac{U_1+V_1}{2} = -y\frac{dQ}{dx}.$$

Daher haben wir jetzt die beiden folgenden Relationen

$$1)\ \ldots\ \frac{U_1+V_1}{2} = -y\frac{dQ}{dx},\quad \frac{U_0-V_0}{2i} = yP;$$

aus denen sich durch fortgesetzte Differentiation, unter Anwendung der oben eingeführten Bezeichnung, unmittelbar die beiden folgenden Relationen ergeben:

$$2)\ \ldots\ \frac{U_r+V_r}{2} = -y\frac{d^rQ}{dx^r},\quad \frac{U_r-V_r}{2i} = y\frac{d^rP}{dx^r},$$

deren erste, wie aus dem Obigen hervorgeht, für $r=0$ nicht, sondern bloss für $r>0$, die zweite dagegen für $r \overline{\overline{>}} 0$ gilt.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass es, um $\frac{d^rP}{dx^r}$ und $\frac{d^rQ}{dx^r}$ zu finden, darauf ankommt, U_r und V_r zu finden. Weil aber V_0 aus U_0 erhalten wird, wenn man in der letztern Grösse $-x$ für x setzt, so geht offenbar $U_r = \frac{d^rU_0}{dx^r}$, wenn man darin $-x$ für x setzt, in

$$\frac{d^rV_0}{(d(-x))^r} = \frac{d^rV_0}{(-1)^r dx^r},$$

d. i. in

$$(-1)^r\frac{d^rV_0}{dx^r} = (-1)^r V_r$$

über, und es wird also jetzt bloss darauf ankommen, die Grösse U_r zu finden, aus welcher sich dann V_r durch die in Rede stehende Substitution leicht herleiten lassen wird.

Nach dem Obigen ist

$$U_1 = \frac{iye^{-ix}}{(1+ye^{-ix})^2},$$

und wegen der Gleichung

$$U_0 = (1+ye^{-ix})^{-1}$$

ist

$$1+ye^{-ix} = \frac{1}{U_0},\quad ye^{-ix} = \frac{1-U_0}{U_0},$$

woraus sich leicht

$$U_1 = i\ U_0(1 - U_0) = i(U_0 - U_0^2)$$

ergiebt. Weil nun überhaupt

$$U_{r+1} = \frac{dU_r}{dx}$$

ist, so erhält man leicht nach und nach

$$U_0 = U_0,$$

$$\frac{U_1}{i} = U_0 - U_0^2,$$

$$\frac{U_2}{i^2} = U_0 - 3U_0^2 + 2U_0^3,$$

$$\frac{U_3}{i^3} = U_0 - 7U_0^2 + 12U_0^3 - 6U_0^4,$$

u. s. w.

Bezeichnet man also überhaupt den numerischen Coefficienten von U_0^k in der Entwickelung von $\frac{U_r}{i^r}$ nach den Potenzen von U_0 durch das Symbol $\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}$; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$3) \ldots \frac{U_r}{i^r} = \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}\ U_0^k,$$

folglich, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$4) \ldots \frac{U_{r+1}}{i^{r+1}} = \sum_{k=0}^{k=r+1} (-1)^k \overset{(r+1,\,k+1)}{\mathfrak{a}}\ U_0^{k+1}.$$

Differentiirt man die Gleichung 3), natürlich in Bezug auf x als veränderliche Grösse, so erhält man mit Hülfe der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$U_1 = i(U_0 - U_0^2)$$

ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned}\frac{U_{r+1}}{i^{r+1}} = & \overset{(r,\,1)}{\mathfrak{a}}\,U_0 \\ & - \{2\overset{(r,\,2)}{\mathfrak{a}} + \overset{(r,\,1)}{\mathfrak{a}}\}U_0^2 \\ & + \{3\overset{(r,\,3)}{\mathfrak{a}} + 2\overset{(r,\,2)}{\mathfrak{a}}\}U_0^3 \\ & - \{4\overset{(r,\,4)}{\mathfrak{a}} + 3\overset{(r,\,3)}{\mathfrak{a}}\}U_0^4 \\ & \text{u. s. w.} \\ & + (-1)^r\{(r+1)\overset{(r,\,r+1)}{\mathfrak{a}} + r\overset{(r,\,r)}{\mathfrak{a}}\}U_0^{r+1} \\ & + (-1)^{r+1}(r+1)\overset{(r,\,r+1)}{\mathfrak{a}}\ U_0^{r+2}.\end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit der Gleichung 4), nämlich mit der Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{U_{r+1}}{i^{r+1}} = & \overset{(r+1,\,1)}{a} \; U_0 \\ & - \overset{(r+1,\,2)}{a} \; U_0^2 \\ & + \overset{(r+1,\,3)}{a} \; U_0^3 \\ & - \overset{(r+1,\,4)}{a} \; U_0^4 \\ & \text{u. s. w.} \\ & + (-1)^r \overset{(r+1,\,r+1)}{a} \; U_0^{r+1} \\ & + (-1)^{r+1} \overset{(r+1,\,r+2)}{a} \; U_0^{r+2};\end{aligned}$$

so erhält man zwischen den numerischen Coefficienten von $\frac{U_r}{i^r}$ und $\frac{U_{r+1}}{i^{r+1}}$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\overset{(r+1,\,1)}{a} &= \overset{(r,\,1)}{a}, \\ \overset{(r+1,\,2)}{a} &= 2\,\overset{(r,\,2)}{a} + \overset{(r,\,1)}{a}, \\ \overset{(r+1,\,3)}{a} &= 3\,\overset{(r,\,3)}{a} + 2\,\overset{(r,\,2)}{a}, \\ \overset{(r+1,\,4)}{a} &= 4\,\overset{(r,\,4)}{a} + 3\,\overset{(r,\,3)}{a}, \\ & \text{u. s. w.} \\ \overset{(r+1,\,r+1)}{a} &= (r+1)\,\overset{(r,\,r+1)}{a} + r\,\overset{(r,\,r)}{a}, \\ \overset{(r+1,\,r+2)}{a} &= (r+1)\,\overset{(r,\,r+1)}{a}.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass in der Reihe

$$\overset{(r,\,1)}{a}, \quad \overset{(r,\,2)}{a}, \quad \overset{(r,\,3)}{a}, \quad \overset{(r,\,4)}{a}, \text{ u. s. w.}$$

alle Glieder von dem Gliede $\overset{(r,\,r+2)}{a}$ an verschwinden, so kann man in völliger Allgemeinheit

$$5) \ldots \overset{(r+1,\,k)}{a} = k\,\overset{(r,\,k)}{a} + (k-1)\,\overset{(r,\,k-1)}{a}$$

setzen.

Mittelst dieser Gleichung kann man nun mit Hülfe der bekannten Bernoulli'schen Schlussart und einiger einfachen Sätze von den Binomial-Coefficienten sehr leicht zeigen, dass allgemein

$$\begin{aligned}6) \ldots \overset{(r,\,k)}{a} = k^r & - \frac{k-1}{1}(k-1)^r \\ & + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}(k-2)^r \\ & - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3}(k-3)^r \\ & \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

$$+(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)(k-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\cdot 1^r$$

oder, in der bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten,

$$7)\ \ldots \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}=k^r-(k-1)_1(k-1)^r+(k-1)_2(k-2)^r-(k-1)_3(k-3)^r+\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{k-1}(k-1)_{k-1}\cdot 1^r$$

ist, welches weitläufiger aus einander zu setzen hier unnöthig ist, und die Grösse $\frac{U_r}{i^r}$ ist also jetzt als mittelst des Ausdrucks 3) vollständig entwickelt zu betrachten.

Setzt man in der Gleichung 3) statt x die Grösse $-x$, so geht dieselbe nach dem Obigen in

$$\frac{(-1)^r V_r}{i^r}=\sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}V_0{}^k$$

oder in die Gleichung

$$8)\ \ldots\frac{V_r}{i^r}=(-1)^r\sum_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}V_0{}^k$$

über, wodurch nun also auch $\frac{V_r}{i^r}$ gefunden ist.

Aus den Gleichungen 3) und 8) ergiebt sich durch Addition und Subtraction

$$9)\begin{cases}\dfrac{U_r+V_r}{i^r}=\sum\limits_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}\{U_0{}^k+(-1)^r V_0{}^k\},\\[2ex]\dfrac{U_r-V_r}{i^r}=\sum\limits_{k=1}^{k=r+1}(-1)^{k-1}\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}\{U_0{}^k-(-1)^r V_0{}^k\}.\end{cases}$$

Aus diesen Formeln und aus 2) erhält man nun leicht die folgenden Ausdrücke:

$$10)\begin{cases}y\dfrac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}}=(-1)^n\sum\limits_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\dfrac{U_0{}^k+V_0{}^k}{2},\\[2ex]y\dfrac{d^{2n}P}{dx^{2n}}=(-1)^n\sum\limits_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\dfrac{U_0{}^k-V_0{}^k}{2i},\\[2ex]y\dfrac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}}=(-1)^n\sum\limits_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\dfrac{U_0{}^k-V_0{}^k}{2i},\\[2ex]y\dfrac{d^{2n}Q}{dx^{2n}}=(-1)^n\sum\limits_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\dfrac{U_0{}^k+V_0{}^k}{2}.\end{cases}$$

Setzen wir jetzt in U_0 und V_0

$$1+y\cos x=\mu\cos\varphi,\ y\sin x=\mu\sin\varphi;$$

so erhalten wir

$$\varphi=\mathrm{Arctang}\,\frac{y\sin x}{1+y\cos x},\ \mu=\sqrt{1+2y\cos x+y^2},$$

wobei man jedoch zu bemerken hat, dass man den Bogen

$$\text{Arctang}\,\frac{y\sin x}{1+y\cos x},$$

insofern nämlich die Grösse μ immer positiv sein soll, so nehmen muss, dass er sich, jenachdem von den Grössen $1+y\cos x$ und $y\sin x$ die erste positiv und auch die zweite positiv, die erste negativ und die zweite positiv, die erste negativ und auch die zweite negativ, die erste positiv und die zweite negativ ist, respective im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, welche Bedingung sich auch leicht analytisch ausdrücken lassen würde, wobei wir uns jedoch jetzt nicht aufhalten wollen.

Weil nun nach dem Obigen

$$U_0=(1+ye^{-ix})^{-1},\quad V_0=(1+ye^{ix})^{-1},$$

also

$$U_0{}^k=(1+ye^{-ix})^{-k},\quad V_0{}^k=(1+ye^{ix})^{-k};$$

und

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

also

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$$

ist; so ist

$$U_0{}^k=\{1+y(\cos x-i\sin x)\}^{-k},$$
$$V_0{}^k=\{1+y(\cos x+i\sin x)\}^{-k}$$

oder

$$U_0{}^k=(1+y\cos x-iy\sin x)^{-k},$$
$$V_0{}^k=(1+y\cos x+iy\sin x)^{-k}:$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$U_0{}^k=\mu^{-k}(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{-k},$$
$$V_0{}^k=\mu^{-k}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-k};$$

folglich nach den Moivre'schen Formeln:

$$U_0{}^k=\mu^{-k}(\cos k\varphi+i\sin k\varphi),$$
$$V_0{}^k=\mu^{-k}(\cos k\varphi-i\sin k\varphi);$$

also

$$\frac{U_0{}^k+V_0{}^k}{2}=\frac{\cos k\varphi}{\mu^k},$$
$$\frac{U_0{}^k-V_0{}^k}{2i}=\frac{\sin k\varphi}{\mu^k};$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{U_0{}^k+V_0{}^k}{2}=\frac{\cos k\,\text{Arctang}\,\frac{y\sin x}{1+y\cos x}}{(1+2y\cos x+y^2)^{\frac{k}{2}}},$$

$$\frac{U_0{}^k - V_0{}^k}{2i} = \frac{\sin k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1+y \cos x}}{(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Führt man dies in die Formeln 10) ein, so erhält man:

$$11) \left\{\begin{aligned}
\frac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}} &= \frac{(-1)^n}{y} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1+y \cos x}}{(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\
\frac{d^{2n}P}{dx^{2n}} &= \frac{(-1)^n}{y} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1+y \cos x}}{(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\
\frac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}} &= \frac{(-1)^n}{y} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1+y \cos x}}{(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\
\frac{d^{2n}Q}{dx^{2n}} &= \frac{(-1)^n}{y} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1+y \cos x}}{(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

Aus der ersten und vierten der vorhergehenden Gleichungen folgt, wenn man dieselben auf beiden Seiten mit y multiplicirt, und dann $y=0$ setzt, unmittelbar:

$$12) \left\{\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \overset{(2n+1,\,k)}{a} &= 0, \\
\sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \overset{(2n,\,k)}{a} &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Die Differentialquotienten von

$$\sin k \operatorname{Arctang} \frac{y \sin x}{1+y \cos x} \text{ und } y(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}$$

in Bezug auf y als veränderliche Grösse sind, wie man leicht findet, respective

$$\frac{k \sin x}{1+2y \cos x + y^2} \cos k \operatorname{Arctang} \frac{y \sin x}{1+y \cos x}$$

und

$$(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}} + ky(y+\cos x)\,(1+2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Nimmt man hierzu, dass für $y=0$

$$\frac{d^{2n}P}{dx^{2n}} = \frac{d^{2n} \sin x}{dx^{2n}} = (-1)^n \sin x,$$

$$\frac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}} = \frac{d^{2n+1} \cos x}{dx^{2n+1}} = (-1)^{n+1} \sin x$$

ist; so ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung aus der zweiten und dritten der Gleichungen 11) leicht, dass

$$13)\begin{cases}\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}k\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}=1,\\ \sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}k\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}=-1\end{cases}$$

ist.

Aus den aus dem Obigen bekannten Relationen

$$\overset{(r+1,\,1)}{\mathfrak{a}}=\overset{(r,\,1)}{\mathfrak{a}} \text{ und } \overset{(r+1,\,r+2)}{\mathfrak{a}}=(r+1)\overset{(r,\,r+1)}{\mathfrak{a}}$$

ergiebt sich leicht

$$14)\ \ldots \overset{(r,\,1)}{\mathfrak{a}}=1 \text{ und } \overset{(r,\,r+1)}{\mathfrak{a}}=1.2.3\ldots r=\Gamma(r+1)\ ^{*}).$$

Für $y=1$ ist

$$P=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x,\quad Q=\tfrac{1}{2}.$$

Also ist nach der ersten und zweiten der Gleichungen 11), wenn man in denselben $y=1$ setzt,

$$\tfrac{1}{2}.\frac{d^{2n+1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}}=(-1)^n\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos k\operatorname{Arctangtang}\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k},$$

$$\tfrac{1}{2}.\frac{d^{2n}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{dx^{2n}}=(-1)^n\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin k\operatorname{Arctangtang}\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k}$$

oder

$$\frac{d^{2n+1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}}=(-1)^n.2\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos k\operatorname{Arctangtang}\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k},$$

$$\frac{d^{2n}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{dx^{2n}}=(-1)^n.2\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin k\operatorname{Arctangtang}\frac{1}{2}x}{2^k\cos\frac{1}{2}x^k};$$

wo nach dem Obigen, weil $1+\cos x=2\cos\frac{1}{2}x^2$ immer positiv ist, der Bogen Arctangtang $\frac{1}{2}x$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist.

Setzt man $2x$ für x, so erhält man

$$15)\begin{cases}\dfrac{d^{2n+1}\operatorname{tang}x}{dx^{2n+1}}=(-1)^n.2^{2n+2}\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{\mathfrak{a}}\cos k\operatorname{Arctangtang}x}{2^k\cos x^k},\\[2ex] \dfrac{d^{2n}\operatorname{tang}x}{dx^{2n}}=(-1)^n.2^{2n+1}\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{\overset{(2n,\,k)}{\mathfrak{a}}\sin k\operatorname{Arctangtang}x}{2^k\cos x^k};\end{cases}$$

wo der Bogen Arctangtang x so genommen werden muss, dass

---

*) Thl. II. S. 304.

er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $\sin 2x$ positiv oder negativ ist.

Ist der absolute Werth von x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, so ist offenbar immer $\sin 2x$ positiv oder negativ, jenachdem x positiv oder negativ ist, oder $\sin 2x$ hat mit $\sin x$ immer einerlei Vorzeichen, und in diesem Falle kann man also, wie sogleich in die Augen fallen wird, immer $\text{Arctang} \operatorname{tang} x = x$, folglich nach 15)

$$16)\left\{\begin{aligned} \frac{d^{2n+1} \operatorname{tang} x}{dx^{2n+1}} &= (-1)^n . 2^{2n+2} \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos kx}{2^k \cos x^k} \\ \frac{d^{2n} \operatorname{tang} x}{dx^{2n}} &= (-1)^n . 2^{2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin kx}{2^k \cos x^k} \end{aligned}\right.$$

setzen.

Für $y = -1$ ist

$$P = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}x, \quad Q = -\tfrac{1}{2}.$$

Also ist wieder nach der ersten und zweiten der Gleichungen 11), wenn man $y = -1$ setzt,

$$\tfrac{1}{2} . \frac{d^{2n+1} \cot \frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k \,\text{Arctang}\,(-\cot \frac{1}{2}x)}{2^k \sin \frac{1}{2}x^k},$$

$$\tfrac{1}{2} . \frac{d^{2n} \cot \frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = -(-1)^n \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k \,\text{Arctang}\,(-\cot \frac{1}{2}x)}{2^k \sin \frac{1}{2}x^k}$$

oder

$$\frac{d^{2n+1} \cot \frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n . 2 \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k \,\text{Arctang}\,(-\cot \frac{1}{2}x)}{2^k \sin \frac{1}{2}x^k},$$

$$\frac{d^{2n} \cot \frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = -(-1)^n . 2 \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k \,\text{Arctang}\,(-\cot \frac{1}{2}x)}{2^k \sin \frac{1}{2}x^k};$$

wo nach dem Obigen, weil $1 - \cos x = 2 \sin \frac{1}{2}x^2$ immer positiv ist, der Bogen $\text{Arctang}\,(-\cot \frac{1}{2}x)$ so zu nehmen ist, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $-\sin x$ positiv oder negativ, d. i. jenachdem $\sin x$ negativ oder positiv ist. Offenbar kann man aber auch

$$\frac{d^{2n+1} \cot \frac{1}{2}x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n . 2 \sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k \,\text{Arctangcot}\, \frac{1}{2}x}{2^k \sin \frac{1}{2}x^k},$$

$$\frac{d^{2n} \cot \frac{1}{2}x}{dx^{2n}} = (-1)^n . 2 \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k \,\text{Arctangcot}\, \frac{1}{2}x}{2^k \sin \frac{1}{2}x^k}$$

setzen, wo nun der Bogen $\text{Arctang} \cot \frac{1}{2}x$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist.

Setzt man $2x$ für x, so erhält man

$$17)\begin{cases}\dfrac{d^{2n+1}\cot x}{dx^{2n+1}} \\ \quad = -(-1)^n \cdot 2^{2n+2} \sum\limits_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctangcot} x}{2^k \sin x^k}, \\ \dfrac{d^{2n}\cot x}{dx^{2n}} \\ \quad = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \sum\limits_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctangcot} x}{2^k \sin x^k}; \end{cases}$$

wo der Bogen Arctang cot x so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin $2x$ positiv oder negativ ist.

Wenn x positiv und nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist offenbar sin $2x$ positiv, und man kann also, wie sogleich in die Augen fällt, unter dieser Voraussetzung immer Arctang cot $x = \frac{1}{2}\pi - x$, also

$$18)\begin{cases}\dfrac{d^{2n+1}\cot x}{dx^{2n+1}} = -(-1)^n \cdot 2^{2n+2} \sum\limits_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \cos k(\frac{1}{2}\pi - x)}{2^k \sin x^k}, \\ \dfrac{d^{2n}\cot x}{dx^{2n}} = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \sum\limits_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a} \sin k(\frac{1}{2}\pi - x)}{2^k \sin x^k} \end{cases}$$

setzen, weil unter der gemachten Voraussetzung der Bogen $\frac{1}{2}\pi - x$ sich im ersten Quadranten endigt, wie es erforderlich ist.

Aus der dritten und vierten der Gleichungen 11) erhält man für $y = 1$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctangtang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(2n,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctangtang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k} = 0,$$

wo der Bogen Arctang tang $\frac{1}{2}x$ so zu nehmen ist, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin x positiv oder negativ ist; oder, wenn man $2x$ für x setzt,

$$19)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{k=2n+2} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a} \sin k \operatorname{Arctangtang} x}{2^k \cos x^k} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a} \cos k \operatorname{Arctangtang} x}{2^k \cos x^k} = 0; \end{cases}$$

wo der Bogen Arctangtang x so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem sin $2x$ positiv oder negativ ist.

Wenn der absolute Werth von x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann Arctangtang $x = x$ gesetzt werden, und es ist folglich unter dieser Voraussetzung

$$20)\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a}\sin kx}{2^k\cos x^k}=0,\\&\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{a}\cos kx}{2^k\cos x^k}=0.\end{aligned}\right.$$

Für $x=0$ giebt die zweite dieser Gleichungen

$$20^*)\ldots\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{a}}{2^k}=0.$$

Aus denselben Gleichungen erhält man für $y=-1$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a}\sin k\operatorname{Arctang}(-\cot\tfrac{1}{2}x)}{2^k\sin\tfrac{1}{2}x^k}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{a}\cos k\operatorname{Arctang}(-\cot\tfrac{1}{2}x)}{2^k\sin\tfrac{1}{2}x^k}=0,$$

wo der Bogen Arctang $(-\cot\frac{1}{2}x)$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadanten endigt, jenachdem $-\sin x$ positiv oder negativ, d. i. jenachdem $\sin x$ negativ oder positiv ist. Offenbar kann man aber auch

$$\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a}\sin k\operatorname{Arctang}\cot\tfrac{1}{2}x}{2^k\sin\tfrac{1}{2}x^k}=0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{a}\cos k\operatorname{Arctang}\cot\tfrac{1}{2}x}{2^k\sin\tfrac{1}{2}x^k}=0$$

setzen, wo der Bogen Arctang $\cot\frac{1}{2}x$ so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist.

Folglich ist

$$21)\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n+1,\,k)}{a}\sin k\operatorname{Arctang}\cot x}{2^k\sin x^k}=0,\\&\sum_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\overset{(2n,\,k)}{a}\cos k\operatorname{Arctang}\cot x}{2^k\sin x^k}=0,\end{aligned}\right.$$

wo der Bogen Arctangcot x so genommen werden muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem $\sin 2x$ positiv oder negativ ist.

Wenn x positiv und nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann man Arctangcot $x=\frac{1}{2}\pi-x$ setzen, und es ist also nach den vorhergehenden Formeln unter dieser Voraussetzung

$$22)\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{k=2n+2}(-1)^{k-1}\dfrac{\overset{(2n+1,\,k)}{a}\sin k(\frac{1}{2}\pi-x)}{2^k\sin x^k}=0,\\[2ex]\sum\limits_{k=1}^{k=2n+1}(-1)^{k-1}\dfrac{\overset{(2n,\,k)}{a}\sin k(\frac{1}{2}\pi-x)}{2^k\sin x^k}=0.\end{cases}$$

Zwischen den Grössen

$$23)\begin{cases}M_r=\dfrac{yd(yd(yd(\ldots yd(yQ)}{dy^r},\\[2ex]N_r=\dfrac{yd(yd(yd(\ldots yd(yP)}{dy^r}\end{cases}$$

und den Differentialquotienten $\frac{d^rP}{dx^r}$, $\frac{d^rQ}{dx^r}$ finden die folgenden merkwürdigen Relationen Statt:

$$24)\begin{cases}y\,\dfrac{d^{2n+1}P}{dx^{2n+1}}=(-1)^nM_{2n+1},\\[2ex]y\,\dfrac{d^{2n+1}Q}{dx^{2n+1}}=(-1)^{n+1}N_{2n+1};\\[2ex]y\,\dfrac{d^{2n}P}{dx^{2n}}=(-1)^nN_{2n};\\[2ex]y\,\dfrac{d^{2n}Q}{dx^{2n}}=(-1)^nM_{2n};\end{cases}$$

zu denen Herr Malmsten auf folgende Art gelangt.

Man setze

$$J_r=\frac{yd(yd(yd(\ldots yd(y(y+e^{-ix})^{-1})}{dy^r},$$

$$K_r=\frac{yd(yd(yd(\ldots yd(y(y+e^{ix})^{-1})}{dy^r}.$$

Weil nun

$$(y+e^{-ix})^{-1}+(y+e^{ix})^{-1}=\frac{2y+e^{ix}+e^{-ix}}{1+y(e^{ix}+e^{-ix})+y^2},$$

$$(y+e^{-ix})^{-1}-(y+e^{ix})^{-1}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{1+y(e^{ix}+e^{-ix})+y^2};$$

d. i.

$$(y+e^{-ix})^{-1}+(y+e^{ix})^{-1}=\frac{2(y+\cos x)}{1+2y\cos x+y^2},$$

$$(y+e^{-ix})^{-1}-(y+e^{ix})^{-1}=\frac{2i\sin x}{1+2y\cos x+y^2}$$

oder nach dem Obigen

$$(y+e^{-ix})^{-1}+(y+e^{ix})^{-1}=2Q,$$

$$(y+e^{-ix})^{-1}-(y+e^{ix})^{-1}=2Pi$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$25) \begin{cases} J_r + K_r = 2M_r, \\ J_r - K_r = 2iN_r. \end{cases}$$

Kann man also J_r und K_r finden, so kann man auch M_r und N_r entwickeln. Weil aber offenbar K_r aus J_r erhalten wird, wenn man in letzterer Grösse $-x$ für x setzt, so kommt es bloss darauf an, J_r zu finden, und mit der Entwickelung dieser Grösse wollen wir uns daher jetzt zunächst beschäftigen.

Zuvörderst leuchtet sogleich die Richtigkeit der folgenden Ausdrücke ein:

$$J_0 = y(y + e^{-ix})^{-1}, \quad J_{r+1} = y\frac{dJ_r}{dy}.$$

Setzen wir aber

$$y + e^{-ix} = u, \quad dy = du;$$

so wird, wie man leicht findet,

$$J_0 = 1 - \frac{e^{-ix}}{u}, \quad J_{r+1} = (u - e^{-ix})\frac{dJ_r}{du};$$

und durch Anwendung dieser Relationen erhält man nun leicht:

$$J_0 = 1 - \frac{e^{-ix}}{u},$$

$$J_1 = \frac{e^{-ix}}{u} - \frac{e^{-2ix}}{u^2},$$

$$J_2 = -\frac{e^{-ix}}{u} + \frac{3e^{-2ix}}{u^2} - \frac{2e^{-3ix}}{u^3},$$

$$J_3 = \frac{e^{-ix}}{u} - \frac{7e^{-2ix}}{u^2} + \frac{12e^{-3ix}}{u^3} - \frac{6e^{-4ix}}{u^4},$$

u. s. w.

oder, wenn wir den numerischen Coefficienten von $\frac{e^{-kix}}{u^k}$ in J_r durch $\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}}$ bezeichnen, allgemein:

$$26) \ldots J_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}}\, e^{-kix}}{u^k}$$

Auf einem ganz ähnlichen Wege, wie wir oben zu der Gleichung 5) gelangten, gelangt man nun mittelst der vorhergehenden Gleichungen leicht zu der Gleichung

$$27) \ldots \overset{(r+1,\,k)}{\mathfrak{c}} = k\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}} + (k-1)\overset{(r,\,k-1)}{\mathfrak{c}},$$

und schliesst hieraus, wenn man dies mit dem Obigen, insbesondere mit der Gleichung 5) vergleicht, unmittelbar, dass überhaupt

$$28) \ldots \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{c}} = \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}$$

ist. Also ist nach 26)

$$29) \ldots J_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}\, e^{-kix}}{u^k},$$

oder, wenn man für u wieder den Werth $y + e^{-ix}$ einführt,

$$30) \ldots J_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}}{(1 + ye^{ix})^k}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $-x$ für x, so erhält man

$$31) \ldots K_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \frac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}}}{(1 + ye^{-ix})^k}.$$

Folglich ist nach 25)

$$2M_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}} \{(1 + ye^{ix})^{-k} + (1 + ye^{-ix})^{-k}\},$$

$$2iN_r = (-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}} \{(1 + ye^{ix})^{-k} - (1 + ye^{-ix})^{-k}\}.$$

Nach dem Obigen ist

$$(1 + ye^{ix})^{-k} + (1 + ye^{-ix})^{-k} = V_0{}^k + U_0{}^k = \frac{2 \cos k\varphi}{\mu^k},$$

$$(1 + ye^{ix})^{-k} - (1 + ye^{-ix})^{-k} = V_0{}^k - U_0{}^k = -\frac{2i \sin k\varphi}{\mu^k};$$

und folglich, wenn man für φ und μ ihre aus dem Obigen bekannten Werthe einführt:

$$32) \begin{cases} M_r = (-1)^{r-1} \sum\limits_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}} \cos k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1 + y \cos x}}{(1 + 2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}, \\[2ex] N_r = (-1)^{r} \sum\limits_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}} \sin k \operatorname{Arctang} \dfrac{y \sin x}{1 + y \cos x}}{(1 + 2y \cos x + y^2)^{\frac{k}{2}}}; \end{cases}$$

wo wegen des Bogens

$$\operatorname{Arctang} \frac{y \sin x}{1 + y \cos x}$$

die oben gegebenen Bestimmungen auch jetzt noch gelten.

Vergleicht man diese Formeln mit den Formeln 11), so erhält man die zu beweisenden Relationen 24).

Setzt man in den Formeln 32) die Grösse $y = 1$, und bezeichnet die diesem Werthe von y entsprechenden Werthe von M_r und N_r respective durch $M'_r(x)$ und $N'_r(x)$, so erhält man:

$$33) \begin{cases} M'_r(x) = (-1)^{r-1} \sum\limits_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}} \cos k \operatorname{Arctang} \operatorname{tang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}, \\[2ex] N'_r(x) = (-1)^{r} \sum\limits_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{\mathfrak{a}} \sin k \operatorname{Arctang} \operatorname{tang} \frac{1}{2}x}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}. \end{cases}$$

Wenn der absolute Werth von x nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so kann man, wie aus dem Obigen geschlossen wird, immer Arctang tang $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$ setzen, und in diesem Falle ist also nach 33) jederzeit

$$34) \begin{cases} M'_r(x) = (-1)^{r-1} \sum\limits_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{a} \cos \frac{1}{2}kx}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}, \\ N'_r(x) = (-1)^{r} \sum\limits_{k=1}^{k=r+1} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(r,\,k)}{a} \sin \frac{1}{2}kx}{2^k \cos \frac{1}{2}x^k}. \end{cases}$$

Verbindet man hiermit die Formeln 20), so erhält man

$$35)\quad M'_{2n}(x) = 0,\quad N'_{2n+1}(x) = 0.$$

IX.

Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts einer Kugelzone.

Von

dem Herausgeber.

Die folgende Entwickelung der bekannten Formel für den Flächeninhalt einer Kugelzone scheint mir durch ihre besondere Strenge und Evidenz empfehlenswerth zu sein.

Wenn O in Fig. 9. auf Taf. I. der Mittelpunkt der Kugel ist und AC, BD die Halbmesser der die Zone begränzenden Kugelkreise sind, so ziehe man AB, fälle von O auf AB das Perpendikel OE, von A auf BD das Perpendikel AG, und ziehe durch den Mittelpunkt E von AB mit AC und BD die Parallele EF. Weil nun die Winkel BAG und OEF offenbar einander gleich sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke BAG und OEF einander ähnlich, und wir haben also die Proportion

$$AB : AG = OE : EF,$$

oder, weil nach einem Satze, der hier füglich als bekannt vorausgesetzt werden kann,

$$EF = \frac{AC + BD}{2}$$

ist, die Proportion

$$AB : AG = OE : \frac{AC + BD}{2},$$

von welcher nachher mehrfacher Gebrauch gemacht werden wird.

Man bezeichne nun den Halbmesser der Kugel durch r, die sogenannte Höhe der Kugelzone durch h, und theile letztere in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in n gleiche Theile. Durch alle Theilpunkte lege man Ebenen, welche mit den Ebenen der die Zone begränzenden Kreise parallel sind, und stelle sich die Seitenflächen der Kegel, deren Grundflächen die durch die in Rede stehenden Ebenen bestimmten Kugelkreise sind, in die Kugelzone beschrieben vor. Die Seiten dieser n Kegelflächen seien nach der Reihe

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots . s_n$$

und

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots . r_n$$

seien die auf diese Seiten von dem Mittelpunkte der Kugel gefällten Perpendikel. Die Halbmesser der Grundflächen der in Rede stehenden Kegel seien

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots . \varrho_n.$$

Nach einem bekannten Satze sind die Seitenflächen dieser Kegel nach der Reihe

$$\begin{gathered} s_1(\varrho + \varrho_1)\pi, \\ s_2(\varrho_1 + \varrho_2)\pi, \\ s_3(\varrho_2 + \varrho_3)\pi, \\ \text{u. s. w.} \\ s_n(\varrho_{n-1} + \varrho_n)\pi; \end{gathered}$$

und wenn wir nun

$$\begin{aligned} \Sigma = \quad & s_1(\varrho + \varrho_1)\pi \\ & + s_2(\varrho_1 + \varrho_2)\pi \\ & + s_3(\varrho_2 + \varrho_3)\pi \\ & \text{u. s. w.} \\ & + s_n(\varrho_{n-1} + \varrho_n)\pi \end{aligned}$$

setzen, den gesuchten Flächeninhalt der Kugelzone aber durch Z bezeichnen; so ist offenbar Z die Gränze, welcher sich Σ bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, wodurch also unsere Aufgabe auf die Bestimmung dieser Gränze zurückgeführt ist.

Nach der im Obigen bewiesenen Proportion ist nun

$$s_1 : \frac{h}{n} = r_1 : \frac{\varrho + \varrho_1}{2},$$

$$s_2 : \frac{h}{n} = r_2 : \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2},$$

$$s_3 : \frac{h}{n} = r_3 : \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{2},$$

u. s. w.

$$s_n : \frac{h}{n} = r_n : \frac{\varrho_{n-1} + \varrho_n}{2};$$

also

$$s_1(\varrho + \varrho_1) = \frac{2hr_1}{n},$$

$$s_2(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{2hr_2}{n},$$

$$s_3(\varrho_2 + \varrho_3) = \frac{2hr_3}{n},$$

u. s. w.

$$s_n(\varrho_{n-1} + \varrho_n) = \frac{2hr_n}{n};$$

und folglich nach dem Obigen

$$\Sigma = \frac{2h\pi}{n}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \ldots\ldots + r_n).$$

Lässt man n in's Unendliche wachsen, so nähern sich die Grössen $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots r_n$ offenbar sämmtlich dem Halbmesser r der Kugel als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, und wenn wir folglich

$$r_1 = r - \delta_1,$$

$$r_2 = r - \delta_2,$$

$$r_3 = r - \delta_3,$$

u. s. w.

$$r_n = r - \delta_n,$$

also

$$\Sigma = \frac{2h\pi}{n}(nr - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \ldots - \delta_n)$$

oder

$$\Sigma = 2hr\pi\left(1 - \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{nr}\right)$$

setzen, so nähern sich, wenn n in's Unendliche wächst, die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ sämmtlich der Null als ihrer Gränze bis zu jedem beliebigen Grade.

Wir wollen nun voraussetzen, dass der Mittelpunkt der Kugel nicht in der Höhe der Zone liege, so dass also letztere jedenfalls nicht grösser als die Halbkugel ist, und wollen, was offenbar verstattet ist, annehmen, dass die Halbmesser

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \ldots \varrho_n$$

nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet seien, wobei unter der gemachten Voraussetzung zugleich erhellet, dass diese Halbmesser fortwährend wachsen. Bezeichnen wir nun durch q die Entfernung

des Halbmessers ϱ von dem höchsten Punkte der Halbkugel, in welcher die Zone liegt; so ist nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises

$$\varrho^2 = q(2r - q),$$

$$\varrho_1^2 = (q + \frac{h}{n})\ (2r - q - \frac{h}{n}),$$

$$\varrho_2^2 = (q + \frac{2h}{n})\ (2r - q - \frac{2h}{n});$$

also, wie man leicht findet,

$$\varrho_1^2 - \varrho^2 = \frac{h}{n}(2r - 2q - \frac{h}{n}),$$

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = \frac{h}{n}(2r - 2q - \frac{3h}{n});$$

folglich

$$\varrho_2^2 - \varrho_1^2 < \varrho_1^2 - \varrho^2$$

oder

$$(\varrho_2 - \varrho_1)\ (\varrho_2 + \varrho_1) < (\varrho_1 - \varrho)\ (\varrho_1 + \varrho),$$

also

$$\varrho_2 - \varrho_1 < \frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2}\ (\varrho_1 - \varrho).$$

Weil nun

$$\varrho < \varrho_1 < \varrho_2,$$

und folglich auch

$$\varrho + \varrho_1 < \varrho_1 + \varrho_2,$$

also

$$\frac{\varrho + \varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2} < 1$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\varrho_2 - \varrho_1 < \varrho_1 - \varrho.$$

Offenbar ist

$$s_1^2 = (\frac{h}{n})^2 + (\varrho_1 - \varrho)^2,\ s_2^2 = (\frac{h}{n})^2 + (\varrho_2 - \varrho_1)^2,$$

also $s_2^2 < s_1^2$, und folglich auch $\frac{1}{4}s_2^2 < \frac{1}{4}s_1^2$. Weil nun, wie sogleich erhellet,

$$\tfrac{1}{4}s_1^2 = r^2 - r_1^2,\ \tfrac{1}{4}s_2^2 = r^2 - r_2^2$$

ist, so ist

$$r^2 - r_2^2 < r^2 - r_1^2,$$

also $r_2^2 > r_1^2$, und folglich auch $r_2 > r_1$, woraus sich ferner

$$r - r_2 < r - r_1,$$

d. i. nach dem Obigen $\delta_2 < \delta_1$ oder $\delta_1 > \delta_2$ ergiebt, und ganz eben so ist nun überhaupt

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \delta_4 \ldots > \delta_{n-1} > \delta_n;$$

folglich

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n < n\delta_1$$

oder

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n} < \delta_1.$$

Wenn n in's Unendliche wächst, so nähert sich δ_1 bis zu jedem beliebigen Grade der Null als seiner Gränze, und dies gilt daher nach dem Vorhergehenden um so mehr von der Grösse

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n}.$$

Lässt man also in der oben gefundenen Gleichung

$$\Sigma = 2hr\pi(1 - \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{nr})$$

oder

$$\Sigma = 2hr\pi - 2h\pi \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n}{n}$$

die Grösse n in's Unendliche wachsen, so nähert sich offenbar Σ der Grösse $2hr\pi$ als seiner Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, und da nun nach dem Obigen diese Gränze der Inhalt Z der Kugelzone ist, so ist

$$Z = 2hr\pi.$$

Bis jetzt ist angenommen worden, dass der Mittelpunkt der Kugel nicht in der Höhe h der Kugelzone liegt. Liegt aber der Mittelpunkt der Kugel in der Höhe h, so wird letztere durch ersteren in zwei Theile h' und h'' getheilt, und es ist nun nach dem Vorhergehenden, wenn wir die diesen Höhen entsprechenden Kugelzonen durch Z' und Z'' bezeichnen,

$$Z' = 2h'r\pi, \quad Z'' = 2h''r\pi.$$

Weil nun $Z = Z' + Z''$ ist, so ist

$$Z = 2(h' + h'')r\pi,$$

und folglich, weil $h = h' + h''$ ist, wieder

$$Z = 2hr\pi,$$

so dass also diese Formel für jede Kugelzone gilt.

Will man den Inhalt K der ganzen Kugelfläche haben, so muss man in der vorhergehenden Formel $h = 2r$ setzen, wodurch sich

$$K = 4r^2\pi$$

ergiebt.

Dass für dieselbe Kugel Kugelzonen von gleicher Höhe gleiche Flächenräume haben, ergiebt sich aus der Formel $Z=2hr\pi$ auf der Stelle. Ueberhaupt erhält man den Flächeninhalt einer jeden Kugelzone, wenn man die Peripherie eines grössten Kugelkreises mit der Höhe der Zone multiplicirt. Die ganze Kugelfläche ist vier Mal so gross als der Flächeninhalt eines grössten Kugelkreises.

X.

Ueber die Bestimmung des Schwerpunkts einer Kugelzone.

Von

dem Herausgeber.

Der folgende elementare Beweis eines bekannten Satzes der Statik scheint sich uns durch seine Strenge und Evidenz, und daher für elementare Vorträge der Statik zu empfehlen.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer Kugelzone, worunter wir wie gewöhnlich jeden von zwei Kugelkreisen, deren Ebenen einander parallel sind, begränzten Theil der Oberfläche einer Kugel verstehen, liegt in der Mitte der die Mittelpunkte der beiden die Zone begränzenden Kreise verbindenden Axe der Zone.

Beweis. Man denke sich die Mittelpunkte der beiden die Zone begränzenden Kreise durch A und B, die Axe der Zone also durch AB bezeichnet, setze der Kürze wegen im Folgenden $AB=a$, theile die Axe AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. B. in n gleiche Theile, und lege durch jeden Theilpunkt eine auf der Axe AB senkrechte, also mit den Ebenen der die Zone begränzenden Kreise parallele Ebene; so theilen diese Ebenen die gegebene Zone in n Zonen von gleicher Höhe, die also nach einem bekannten Satze *) sämmtlich gleiche Flächenräume haben.

---

*) M. s. z. B. den vorhergehenden Aufsatz oder Elem. de Géom. par Legendre. Onz. éd. Livre VIII. Prop. XI.

Lässt man n in's Unendliche wachsen, so nähern sich diese Zonen sämmtlich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade den Peripherieen von Kreisen, deren Ebenen alle auf der Axe AB senkrecht stehen, und da nun die Schwerpunkte der Peripherieen aller dieser Kreise nach der Lehre vom Schwerpunkte in ihren Mittelpunkten, also sämmtlich in der Axe AB liegen; so muss offenbar nach der Lehre vom Schwerpunkte auch der gesuchte Schwerpunkt der gegebenen Zone in deren Axe AB liegen.

Um nun die Lage des Schwerpunkts der gegebenen Zone in der Axe AB zu bestimmen, bezeichne man dessen Entfernung von dem Punkte A durch x, und auf ähnliche Art seien

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_n$$

die Entfernungen der Schwerpunkte der n gleichen Zonen, in welche die gegebene Zone getheilt worden ist, von dem Punkte A nach der Ordnung dieser Zonen, von dem Punkte A an gerechnet. Dann ist, wenn wir den Flächeninhalt der gegebenen Zone durch Z, also den Flächeninhalt jeder der n gleichen Zonen, in welche die erstere getheilt worden ist, durch $\frac{Z}{n}$ bezeichnen, nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\frac{Z}{n} = xZ,$$

und folglich

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Nun ist aber, wie aus der Lehre vom Schwerpunkte leicht erhellet, weil oben $AB = a$ gesetzt worden ist,

$$x_1 > 0,$$

$$x_2 > \frac{a}{n},$$

$$x_3 > \frac{2a}{n},$$

$$x_4 > \frac{3a}{n},$$

u. s. w.

$$x_n > \frac{(n-1)a}{n};$$

also nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n > \frac{n(n-1)}{2n}a;$$

und ganz eben so ist

$$x_1 < \frac{a}{n},$$

$$x_2 < \frac{2a}{n},$$

$$x_3 < \frac{3a}{n},$$

$$x_4 < \frac{4a}{n},$$

u. s. w.

$$x_n < \frac{na}{n};$$

also nach der Lehre von den arithmetischen Progressionen

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n < \frac{n(n+1)}{2n}\, a.$$

Folglich ist für jedes positive ganze n

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) a,$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a;$$

also nach dem Obigen für jedes positive ganze n

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) a < x < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a.$$

Wäre nun nicht $x = \frac{1}{2}a$, so könnte nur

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \delta$$

sein. Wäre zuvörderst

$$x = \tfrac{1}{2}a + \delta,$$

so nehme man, was offenbar immer möglich ist, die positive ganze Zahl n so, dass

$$n > \frac{a}{2\delta}, \text{ also } \frac{a}{2n} < \delta$$

ist; dann ist offenbar

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a < \tfrac{1}{2}a + \delta,$$

d. i. $x > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a$, da doch nach dem Obigen für jedes positive ganze n

$$x < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) a$$

ist. Wäre ferner

$$x = \tfrac{1}{2}a - \delta,$$

so nehme man die positive ganze Zahl n wieder so, dass

$$n > \frac{a}{2\delta}, \text{ also } \frac{a}{2n} < \delta$$

ist; dann ist offenbar

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) a > \tfrac{1}{2}a - \delta,$$

d. i. $x < (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})\, a$, da doch nach dem Obigen für jedes positive ganze n

$$x > (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})\, a$$

ist. Also kann weder $x = \frac{1}{2}a + \delta$, noch $x = \frac{1}{2}a - \delta$ sein, und es ist folglich $x = \frac{1}{2}a$, wie behauptet wurde.

Der Schwerpunkt einer Halbkugelfläche liegt also in der Mitte ihrer Höhe, d. h. in der Mitte ihres auf der Ebene des sie begränzenden grössten Kugelkreises senkrecht stehenden Halbmessers.

XI.

Einige Bemerkungen zu der Abhandlung Nr. IV. in diesem Hefte über Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin*).

Die in dieser Abhandlung entwickelten recurrenten Formeln (11—17) lassen sich aus derselben Quelle etwas einfacher ableiten, wenn man aus der dort gebrauchten Methode alle ausserwesentlichen Elemente ausscheidet. So z. B. gelangt man zu der Formel (11), wenn man die Gleichung (5)

$$\frac{1}{2\omega} - \frac{1}{4}\cot\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{4}B_1\omega + \frac{1}{4}B_3\frac{\omega^3}{3!} + \frac{1}{12}B_5\frac{\omega^5}{5!} + \ldots$$

mit der Gleichung

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \ldots.$$

*) Herr Göpel in Berlin hat die Güte, die erste Correctur des Archivs zu besorgen, wodurch es erklärlich wird, dass Herr Göpel die Abhandlung Nr. IV. in diesem Hefte kennen konnte, bevor dasselbe ausgegeben wurde. G.

multiplicirt. Man erhält dann

$$\frac{\sin\omega}{2\omega} - (1 + \cos\omega) = \tfrac{1}{4}B_1\omega^2 - (\frac{1}{4\,.\,3!}B_1 - \frac{1}{8\,.\,3!}B_2)\omega^4 + \ldots$$

Entwickelt man jetzt auch die linke Seite, so giebt die Vergleichung der beiderseitigen allgemeinen Glieder nach Hinwegschaffung der überflüssigen Factoren unmittelbar die Formel (11). Ein ähnliches gilt für die übrigen.

Bezeichnet im allgemeinen

$$F(\omega) = a_1B_1\omega + a_2B_2\omega^3 + a_3B_3\omega^5 + \ldots.$$

irgend eine der Gleichungen (5)—(7) oder irgend eine andere Entwickelung, deren Coefficienten einfach durch die Bernoullischen oder Secanten-Zahlen bestimmt sind, und multiplicirt man dieselbe mit irgend einer andern Entwickelung

$$f(\omega) = b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \ldots.,$$

so erhält man $F(\omega).f(\omega)$ gleich einer Reihe, deren allgemeines Glied leicht darstellbar ist. Ist nun die Function $f(\omega)$ so beschaffen, dass sich das Product $F(\omega).f(\omega)$ vermittelst trigonometrischer Relationen in ein Aggregat einfacher trigonometrischer Functionen umformen lässt die sich mit oder ohne Hülfe der Bernoullischen und Secanten-Zahlen entwickeln lassen, so ergiebt sich durch Vergleichung der allgemeinen Glieder immer eine Recursionsformel für die genannten Zahlen; untermischt oder gesondert, je nachdem man die Functionen F und f wählt. Enthält die Entwickelung von $f(\omega)$ die Bernoullischen Zahlen nicht, so wird die Formel in Bezug auf sie linear; dergleichen $f(\omega)$ sind $\sin\omega$, $\sin 2\omega, \ldots \cos\omega$, $\cos 2\omega$, $\ldots \sin\omega^2$, u. s. w. Lässt sich $f(\omega)$ nicht ohne diese Zahlen entwickeln, so wird die Formel in Bezug auf sie von der 2ten Dimension. Man erhält z. B. die bekannten Relationen, wenn die Gleichung (5) mit sich selbst multiplicirt und dabei die Formel

$$\cot\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{\sin\tfrac{1}{2}\omega^2} - 1 = -2\frac{d\cot\tfrac{1}{2}\omega}{d\omega} - 1$$

angewandt wird.

Hiebei versteht es sich von selbst, dass man auch, anstatt $F(\omega)$ mit $f(\omega)$ unmittelbar zu multipliciren, vorher die eine Entwickelung, wie in der citirten Abhandlung geschehen ist, oder wenn man will beide Entwickelungen in bestimmte Integrale zusammenfassen und darauf deren Product wieder entwickeln kann, und auf diese Art mit etwas mehr Rechnung dasselbe Resultat erreichen wird.

Da man sich dem Obigen zufolge Recursionsformeln in beliebiger Menge verschaffen kann, so möchte es nicht von grosser Erheblichkeit sein, deren neue aufzusuchen; es gelänge denn eine solche aufzufinden, die einen tieferen Blick in den Bau dieser Zahlen verstattete. Indessen mag hier noch erwähnt werden, dass die Formeln (11) und (12) durch die einzige Formel

$$1 + m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots = A_m,\ m > 1$$

ausgedrückt werden können, welche unter andern von Ettings-

hausen in seinen Vorlesungen über höhere Mathematik p. 282 aufführt und aus welcher jene für m unpaar und paar hervorgehen. In derselben bedeuten A_2, A_4, A_6, ... die Bernoullischen Zahlen mit abwechselnden Zeichen und es wird $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_3 = A_5 = \ldots = 0$. Die in Grunerts Mathematischen Abhandlungen. Altona 1822. 4. p. 57 ff. entwickelte Formel

$$\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}}{(2n)!} - \frac{2^{2n-3}B_{2n-3}}{(2n-2)!\,3!} + \ldots + \frac{2B_1(-1)^{n+1}}{2!\,(2n-1)!} + \frac{n(-1)^n}{(2n+1)!} = 0$$

oder

$$2^2(2n+1)_2 B_1 - 2^4(2n+1)_4 B_3 + \ldots \\ + (-1)^{n+1}2^{2n}(2n+1)_{2n} B_{2n-1} = 2n$$

nebst ihrer Supplementarformel

$$2^2(2n)_2 B_1 - 2^4(2n)_4 B_3 + \ldots + (-1)^{n+1}2^{2n}(2n)_{2n} B_{2n-1} \\ = 2n - 1 + (-1)^n(2^{2n} - 2)B_{2n-1}$$

ergiebt die Formeln (14) und (15), nachdem man letztere durch Addition von beziehlich (12) und (13) etwas vereinfacht hat *), wonach die Differenzen in den einzelnen Gliedern herausfallen. Sie lassen sich beide in die eine Gleichung

$$1 + 2m_1 A_1 + 2^2 m_2 A_2 + 2^3 m_3 A_3 + \ldots = -(2^m - 2)A_m$$

zusammenfassen. Die Formel (17) endlich hat unter andern Bartels in seinen Vorlesungen über mathematische Analysis Dorpat. 1837. p. 203 gegeben. Nach gehöriger Vereinfachung lässt sie sich mit der (16) in die folgende vereinigen:

$$1 + 2^2 m_1 A_1 + 2^4 m_2 A_2 + 2^6 m_3 A_3 + \ldots = -m C_{m-1} - (2^m - 2)A_m,$$

wo C_1, C_3, ... $= 0$ und C_0, C_2, C_4, ... die Secantencoefficienten mit abwechselnden Zeichen sind.

Am leichtesten erhält man alle drei, wenn man in die Grundformel (5) imaginäre Argumente einführt, woraus

$$\tfrac{1}{2}\omega \operatorname{Cot} \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\omega \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\omega} = 1 + A_1\omega + A_2\frac{\omega^2}{2!} + A_3\frac{\omega^3}{3!} + \ldots$$

entsteht, und diese der Reihe nach mit

$$e^{\omega} = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots$$

$$e^{\frac{1}{2}\omega} = 1 + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{2^2 . 2!} + \ldots$$

$$e^{\frac{1}{4}\omega} = 1 + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega^2}{2^4 . 2!} + \ldots$$

---

*) Wodurch aber der Werth der Abhandlung Nr. IV. keineswegs geschmälert wird. G.

multiplicirt, wobei die Relation $\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}\omega}=\mathfrak{Cot}\,\frac{1}{4}\omega-\mathfrak{Cot}\,\frac{1}{2}\omega$ zu berücksichtigen ist. Dass die obigen Formeln auch mit abwechselnden Zeichen dargestellt werden können, bedarf hienach kaum einer besonderen Erwähnung.

XII.

Gleichung der graden Linie und der Ebene, auf schiefwinklige Coordinaten bezogen.

Von

Herrn Dr. Haedenkamp

Oberlehrer der Mathem. und der Naturwissensch. am Gymnasium zu Hamm.

Kristallographische Untersuchungen, die mich seit einiger Zeit beschäftigen, machten es nothwendig, die Gleichung der Graden und der Ebene auf schiefwinklige Coordinaten zu beziehen, wodurch in gewissen Fällen die Kristallflächen zu den Axen des Kristalls einfachere Beziehungen erhalten. Da die hieher gehörigen Sätze auch noch wohl anderweitiges Interesse haben, so theile ich hier Einiges, die grade Linie und Ebene betreffend, im Zusammenhange mit.

Die drei Coordinaten-Axen bilden bei einem schiefwinkligen Axen-System eine dreiseitige Raumecke, deren Spitze wir mit O die drei Seiten durch A, B, C und die des Polardreiecks durch A', B', C' bezeichnen. Denkt man sich nun durch einen Punkt P im Raume mit den Coordinaten-Ebenen parallele Ebenen gelegt, so schneiden diese von den Axen Längen ab, die die Coordinaten des Punktes P genannt werden, und die wir durch x, y, z bezeichnen wollen; die Cosinus der Winkel, die OP mit den drei Axen bildet, sollen durch α, β, γ bezeichnet werden; eben so wollen wir, wenn die Entfernung OP gleich der Einheit ist, x, y, z durch a, b, c bezeichnen.

1) Der Zusammenhang der Grössen a, b, c und α, β, γ ist nun folgender, wie man sich leicht deutlich macht:

$$\alpha=a+b\cos C+c\cos B,$$
$$\beta=b+c\cos B+a\cos C,$$
$$\gamma=c+a\cos B+b\cos A,$$

oder auch:

$$a\Pi^2 = (\alpha \sin A + \beta \sin B \cos C' + \gamma \sin C \cos B') \sin A$$
$$b\Pi^2 = (\beta \sin B + \gamma \sin C \cos A' + \alpha \sin A \cos C') \sin B$$
$$c\Pi^2 = (\gamma \sin C + \alpha \sin A \cos B' + \beta \sin B \cos A') \sin C;$$

wo

$$\Pi^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C.$$

2) Die Entfernung des Punktes P von O, die wir durch r bezeichnen, wird so ausgedrückt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos C + 2xz \cos B + 2yz \cos A;$$

setzt man $r = 1$, so wird unserer Bezeichnung zufolge:

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos C + 2ac \cos B + 2bc \cos A,$$

oder auch, für a, b, c die Werthe aus (1) gesetzt:

$$\Pi^2 = \alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos C'$$
$$+ 2\alpha\gamma \sin A \sin C \cos B' + 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos A'.$$

Hieraus erhält man auch noch leicht folgende Relation:

$$1 = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

3) Die Entfernung zweier Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ ist, wenn wir dieselbe durch ϱ bezeichnen:

$$\varrho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + 2(x - x')(y - y') \cos C$$
$$+ 2(x - x')(z - z') \cos B + 2(y - y')(z - z') \cos A$$
$$= r^2 + r'^2 - 2[(xy' + x'y) \cos C + (xz' + x'z) \cos B$$
$$+ (yz' + z'y) \cos A]$$
$$= (yz' - y'z)^2 \sin^2 A + (x'z - xz')^2 \sin^2 B + (x'y - y'x)^2 \sin^2 C$$
$$+ 2(yz' - y'z)(x'z - xz') \sin A \sin B \cos C'$$
$$+ 2(yz' - y'z)(x'y - y'x) \sin A \sin C \cos B'$$
$$+ 2(x'z - xz')(x'y - y'x) \sin B \sin C \cos A',$$

wenn r und r' die Entfernungen der Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ von O sind.

4) Die Gleichung einer Graden, die durch den Mittelpunkt der Coordinaten geht, ist folgende:

$$x = \frac{a}{c} z, \quad y = \frac{b}{c} z;$$

wo a, b, c die Coordinaten des Punktes der Linie sind, dessen Entfernung von O der Einheit gleich ist, und die Determinanten der Linie genannt werden; eben so nennen wir auch die Cosinus der Winkel, die die Grade mit den Axen bildet, die Determinanten der Linie, und bezeichnen sie durch die respectiven griechischen Buchstaben α, β, γ, wodurch man also für eine Grade ein Determinanten-Paar erhält. Bei rechtwinkligen Coordinaten-Axen ist $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$.

Die Gleichungen zweier Linien, die parallel sind, werden:

$$x = Az + B,\ y = A'z + B'$$
$$x = Az + C,\ y = A'z + C'.$$

Geht eine Linie durch zwei Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$, so ist deren Gleichung:

$$x = \frac{x'-x''}{z'-z''}z + \frac{x''z'-z''x'}{z'-z''},\ y = \frac{y'-y''}{z'-z''}z + \frac{z'y''-y'z''}{z'-z''}.$$

5) Sind die Determinanten-Paare zweier Linien a, b, c, α, β, γ und a', b', c', α', β', γ'; so findet man den Neigungswinkel ν dieser Linien mit Hülfe der Formeln (3), wenn man für die dortigen r und r' die Einheit setzt:

$$\cos\nu = aa' + bb' + cc' + (bc' + b'c)\cos A + (ac' + ca')\cos B + (ab' + a'b)\cos C,$$

oder mit Hülfe der Relationen in (1):

$$\cos\nu = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

Nennt man die Projectionen des Dreiecks auf die drei Coordinaten-Ebenen, dessen Seiten 1, 1, ϱ sind: $\frac{D}{2}$, $\frac{D'}{2}$, $\frac{D''}{2}$; wo dann ν der der Seite ϱ gegenüberstehende Winkel ist, so wird auch nach (3):

$$\sin^2\nu = D^2 + D'^2 + D''^2 + 2DD'\cos C' + 2DD''\cos B' + 2D'D''\cos A'.$$

Es ist nemlich:

$$D = (bc' - b'c)\sin A,\ D' = (ca' - ac')\sin B,$$
$$D'' = (ab' - a'b)\sin C;$$

setzt man nun noch:

$$\Delta = \beta\gamma' - \gamma\beta',\ \Delta' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma',\ \Delta'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$

so erhält man noch folgende Relationen:

$$\Delta = (D + D'\cos C' + D''\cos B')\sin A$$
$$\Delta' = (D' + D''\cos A' + D\cos C')\sin B$$
$$\Delta'' = (D'' + D\cos B' + D'\cos A')\sin C$$
$$D\Pi^2 = (\Delta + \Delta'\cos C + \Delta''\cos B)\sin A$$
$$D'\Pi^2 = (\Delta' + \Delta\cos C + \Delta''\cos A)\sin B$$
$$D''\Pi^2 = (\Delta'' + \Delta\cos B + \Delta'\cos A)\sin C$$
$$\Pi^2\sin^2\nu = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + 2\Delta\Delta'\cos C + 2\Delta\Delta''\cos B + 2\Delta'\Delta''\cos A.$$

Die Bedingung, dass zwei Linien auf einander senkrecht sind, ist:

$$o = aa' + bb' + cc' + (cb' + c'b)\cos A + (ac' + a'c)\cos B + (ab' + a'b)\cos C,$$

oder

$$1 = D^2 + D'^2 + D''^2 + 2DD'\cos C' + 2DD''\cos B' + 2D''D'\cos A'.$$

6) Die Lage einer Ebene gegen die Coordinaten-Axen ist bestimmt durch die Lage und Länge des auf die Ebene gefällten Perpendikels. Wir werden auch das Determinanten-Paar dieses Lothes das Determinanten-Paar der Ebene nennen. Wird das Determinanten-Paar einer Ebene durch a, b, c, α, β, γ bezeichnet, das Perpendikel durch p, so ist die Gleichung der Ebene:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p,$$

die Gleichung des Lothes:

$$x = \frac{a}{c} z,\; y = \frac{b}{c} z;$$

die Coordinaten $x'y'z'$ des Fusspunktes des Lothes sind

$$x' = ap,\; y' = bp,\; z' = cp.$$

Bezeichnet man die Längen der Linien, welche die Ebene von den Coordinaten-Axen abschneidet, durch $ll'l''$, dann ist auch die Gleichung der Ebene:

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{l'} + \frac{z}{l''} = 1.$$

7) Die Determinanten-Paare einer Ebene zu finden, die durch zwei, im Mittelpunkt des Coordinaten-Systems sich schneidende Grade gelegt ist. Seien die Determinanten-Paare der gegebenen Linien a', b', c', α', β', γ' und a'', b'', c'', α'', β'', γ'', und die der gesuchten Ebene a, b, c, α, β, γ; so findet man nach einigen Reductionen:

$$\Pi a = \frac{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}{\sin\nu},\; \Pi b = \frac{\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'}{\sin\nu},\; \Pi c = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\sin\nu};$$

$$\alpha = \frac{(b'c'' - b''c')\Pi}{\sin\nu},\; \beta = \frac{(c'a'' - a'c'')\Pi}{\sin\nu}\quad \gamma = \frac{(a'b'' - a''b')\Pi}{\sin\nu};$$

wo ν die Neigung der beiden Linien ist und Π die oben angegebene Bedeutung hat. Die hier gefundenen Determinanten sind zugleich die Determinanten der Durchschnittslinie zweier Ebenen, deren Determinanten die der gegebenen Linien sind.

8) Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist das Supplement des Winkels, den die auf die Ebenen gefällten Lothe mit einander bilden, und wird also nach (5) bestimmt.

9) Will man die Determinanten-Paare einer Ebene finden, die den Neigungswinkel zweier Ebenen halbirt, so dienen dazu nach (5) folgende Gleichungen, wenn ν der Neigungswinkel ist, a', b', c', α', β', γ' und a'', b'', c'', α'', β'', γ'' die gegebenen und a, b, c α, β, γ die gesuchten Determinanten-Paare sind:

$$\sin\frac{\nu}{2} = \alpha'a + \beta'b + \gamma'c = \alpha a' + \beta b' + \gamma c',$$

$$\sin\frac{\nu}{2} = \alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'';$$

denen noch nach (7) diese hinzugefügt werden können:

$$0 = a(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + b(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + c(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')$$
$$0 = \alpha(b'c'' - b''c') + \beta(c'a'' - a'c'') + \gamma(a'b'' - a''b).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man nach einigen Reductionen:

$$a = \frac{a' + a''}{2 \sin \frac{\nu}{2}},\ \beta = \frac{b' + b''}{2 \sin \frac{\nu}{2}},\ \gamma = \frac{c' + c''}{2 \sin \frac{\nu}{2}};$$

$$a = \frac{\alpha' + \alpha''}{2 \sin \frac{\nu}{2}},\ b = \frac{\beta' + \beta''}{2 \sin \frac{\nu}{2}},\ c = \frac{\gamma' + \gamma''}{2 \sin \frac{\nu}{2}}.$$

10) Um die Determinanten-Paare der Ebene zu erhalten, welche den Nebenwinkel von ν halbirt, braucht man nur in den vorhergehenden Formeln $-a''$, $-b''$, $-c''$ statt a'', b'', c'' und $\pi - \nu$ statt ν zu setzen, und man erhält die Determinanten-Paare a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1:

$$\alpha_1 = \frac{a' - a''}{2 \cos \frac{\nu}{2}},\ \beta_1 = \frac{b' - b''}{2 \cos \frac{\nu}{2}},\ \gamma_1 = \frac{c' - c''}{2 \cos \frac{\nu}{2}};$$

$$a_1 = \frac{\alpha' - \alpha''}{2 \cos \frac{\nu}{2}},\ b_1 = \frac{\beta' - \beta''}{2 \cos \frac{\nu}{2}},\ c_1 = \frac{\gamma' - \gamma''}{2 \cos \frac{\nu}{2}}.$$

11) Eben so leicht kann man auch noch das Determinanten-Paar der Ebene finden, die mit den gegebenen Ebenen die Winkel φ' und φ bildet, so dass $\varphi' + \varphi = \nu$ ist. Man findet auf gleiche Weise, wenn dieselben Bezeichnungen wie die Vorigen beibehalten werden, folgende Formeln:

$$\alpha = \frac{a' \cos \varphi + a'' \cos \varphi'}{\sin \nu},\ \beta = \frac{b' \cos \varphi + b'' \cos \varphi'}{\sin \nu},$$

$$\gamma = \frac{c' \cos \varphi + c'' \cos \varphi'}{\sin \nu},$$

$$a = \frac{\alpha' \cos \varphi + \alpha'' \cos \varphi'}{\sin \nu},\ b = \frac{\beta' \cos \varphi + \beta'' \cos \varphi'}{\sin \nu},$$

$$c = \frac{\gamma' \cos \varphi + \gamma'' \cos \varphi'}{\sin \nu};$$

$$\alpha_1 = \frac{a' \sin \varphi - a'' \sin \varphi'}{\sin \nu},\ \beta_1 = \frac{b' \sin \varphi - b'' \sin \varphi'}{\sin \nu},$$

$$\gamma_1 = \frac{c' \sin \varphi - c'' \sin \varphi'}{\sin \nu},$$

$$a_1 = \frac{\alpha' \sin \varphi - \alpha'' \sin \varphi'}{\sin \nu},\ b_1 = \frac{\beta' \sin \varphi - \beta'' \sin \varphi'}{\sin \nu},$$

$$c_1 = \frac{\gamma' \sin \varphi - \gamma'' \sin \varphi'}{\sin \nu}.$$

Der Fall, wo $\varphi - \varphi' = \nu$, kann hieraus auch leicht abgeleitet werden.

12) Die Determinanten-Paare einer Ebene zu finden, die durch die 3 Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ gelegt wird. Sind die gesuchten Determinanten-Paare a, b, c, α, β, γ, so erhält man zu ihrer Bestimmung folgende drei Gleichungen nach (6):

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = p$$
$$\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = p$$
$$\alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = p,$$

aus denen man durch Elimination zweier Unbekannten, z. B. β, γ, erhält:

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{y_2 z_3 - z_2 y_3 + z_1 y_3 - z_3 y_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(z_1 y_3 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - z_1 y_2)}.$$

Multiplizirt man den Zähler mit sin A, so wird derselbe der doppelte Flächenraum der Projection des durch die drei Punkte gelegten Dreiecks auf die Coordinaten-Ebene (yx); nennt man daher diese Δ und den Nenner K, so erhält man, wenn noch Δ', Δ'' die Projectionen desselben Dreiecks auf die beiden andern Ebenen genannt werden, diese drei Gleichungen:

$$\alpha \sin A = \frac{p\Delta}{K},\ \beta \sin B = \frac{p\Delta'}{K},\ \gamma \sin C = \frac{p\Delta''}{K}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (1):

$$\Pi^2 = \alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C + 2\alpha\gamma \sin A \sin C \cos B' + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos C' + 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos A'$$

und bemerkt, dass wenn durch D der Flächenraum des durch die drei Punkte gelegten Dreiecks bezeichnet wird,

$$D^2 = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + 2\Delta\Delta' \cos C' + 2\Delta\Delta'' \cos B' + 2\Delta'\Delta'' \cos A'$$

ist, und daher

$$\Pi = \frac{pD}{K} \text{ oder } K\Pi = pD;$$

$$\alpha \sin A = \frac{\Delta}{D}\Pi,\ \beta \sin B = \frac{\Delta'}{D}\Pi,\ \gamma \sin C = \frac{\Delta''}{D}\Pi;$$

$$a\Pi D = \Delta + \Delta' \cos C' + \Delta'' \cos B',$$
$$b\Pi D = \Delta' + \Delta'' \cos A' + \Delta' \cos C',$$
$$c\Pi D = \Delta'' + \Delta \cos B' + \Delta' \cos A'.$$

13) Wir wollen jetzt noch die Coordinaten x, y, z eines Punktes P auf ein anderes Coordinaten-System von demselben Mittelpunkte übertragen. Wir bezeichnen die Coordinaten eines Punktes, auf die neuen Axen bezogen, durch x', y', z'; die Winkel, die die neuen Axen mit einander bilden, seien A_0, B_0, C_0; die Winkel des durch A_0, B_0, C_0 gegebenen Polardreiecks A'_0, B'_0, C'_0; ferner die Determinanten-Paare der Axe der x', auf das ursprüngliche Axen-System bezogen: a, b, c, α, β, γ; die der Axe der y': a', b', c', α', β', γ' und endlich die der Axe der z': a'', b'', c'', α'', β'', γ'', und

$$\Pi_0^2 = 1 - \cos^2 A_0 - \cos^2 B_0 - \cos^2 C_0 + 2\cos A_0 \cos B_0 \cos C_0.$$

Hält man diese Bezeichnungen fest, so findet man:

$$x' = ax + by + cz,$$
$$y' = a'x + b'y + c'z,$$
$$z' = a''x + b''y + c''z;$$

und umgekehrt:

$$\lambda x = (b'c'' - c'b'')x' + (cb'' - c''b)y' + (bc' - b'c)z'$$
$$\lambda y = (c'a'' - c''a')x' + (ac'' - ca'')y' + (ca' - ac')z'$$
$$\lambda z = (a'b'' - a''b')x' + (ba'' - ab'')y' + (ab' - a'b)z';$$

wo

$$\lambda = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - c''b) + a''(bc' - b'c) = \frac{\Pi}{\Pi_0}.$$

Der Zusammenhang der Grössen a, b, c und α, β, γ u. s. w. ist nach den Gleichungen in (1) dieser:

$$\alpha = a + a' \cos C_0 + a'' \cos B_0,$$
$$\alpha' = a' + a'' \cos A_0 + a' \cos C_0,$$
$$\alpha'' = a'' + a' \cos A_0 + a \cos B_0,$$
$$\beta = b + b' \cos C_0 + b'' \cos B_0,$$
$$\beta' = b' + b'' \cos A_0 + b' \cos C_0,$$
$$\beta'' = b'' + b' \cos A_0 + b \cos B_0,$$
$$\gamma = c + c' \cos C_0 + c'' \cos B_0,$$
$$\gamma' = c' + c'' \cos A_0 + c \cos C_0,$$
$$\gamma'' = c'' + c \cos B_0 + c' \cos A_0.$$

Es finden noch eine Menge anderer Relationen zwischen den Constanten der beiden Axen-Systeme statt, wovon noch folgende hier ihren Platz haben mögen. Nennt man die Determinanten-Paare der drei neuen Coordinaten-Ebenen nach einander: m, n, p, μ, ν, π u. s. w., so erhält man nach (7):

$$\Pi m = \frac{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}{\sin A_0},\ \Pi n = \frac{\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''}{\sin A_0},\ \Pi p = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\sin A_0}$$

$$\mu = \frac{(b'c'' - c'b'')\Pi}{\sin A_0},\ \nu = \frac{c'a'' - a'c''}{\sin A_0}\Pi,\ \pi = \frac{a'b'' - a''b'}{\sin A_0}\Pi$$

$$\Pi m' = \frac{\gamma\beta'' - \beta\gamma''}{\sin B_0},\ \Pi n' = \frac{\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma}{\sin B_0},\ \Pi p' = \frac{\beta\alpha'' - \alpha\beta''}{\sin B_0}$$

$$\mu' = \frac{(cb'' - c''b)\Pi}{\sin B_0},\ \nu' = \frac{(c''a - a''c)}{\sin B_0}\Pi,\ \pi' = \frac{(ba'' - b''a)}{\sin B_0}\Pi$$

$$\Pi m'' = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\sin C_0},\ \Pi n'' = \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\sin C_0},\ \Pi p'' = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sin C_0}$$

$$\mu'' = \frac{(bc' - cb')}{\sin C_0}\Pi,\ \nu'' = \frac{ca' - ac'}{\sin C_0}\Pi,\ \pi'' = \frac{ab' - a'b}{\sin C_0}\Pi.$$

$$\cos A_0 = a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma',$$
$$\cos B_0 = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'',$$
$$\cos C_0 = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

$$\cos A'_0 = m'\mu'' + n'\nu'' + p'\pi'' = m''\mu' + n''\nu' + p''\pi',$$
$$\cos B'_0 = m\mu'' + n\nu'' + p\pi'' = m''\mu + n''\nu + p''\pi,$$
$$\cos C'_0 = m\mu' + n\nu' + p\pi' = m'\mu + n'\nu + p'\pi.$$
$$\Pi a = \frac{\nu'\pi'' - \nu''\pi'}{\sin A'_0},\quad \Pi b = \frac{\pi'\mu'' - \pi''\mu'}{\sin A'_0},\quad \Pi c = \frac{\mu'\nu'' - \mu''\nu'}{\sin A'_0};$$
$$\alpha = \frac{n'p'' - n''p'}{\sin A'_0}\Pi,\quad \beta = \frac{p'm'' - p''m'}{\sin A'_0}\Pi,\quad \gamma = \frac{m'n'' - n'm''}{\sin A'_0}\Pi,$$
$$\Pi a' = \frac{\pi\nu'' - \nu\pi''}{\sin B'_0},\quad \Pi b' = \frac{\mu\pi'' - \pi\mu''}{\sin B'_0},\quad \Pi c' = \frac{\nu\mu'' - \nu''\mu}{\sin B'_0}$$
$$\alpha' = \frac{pn'' - p''n}{\sin B'_0}\Pi,\quad \beta' = \frac{mp'' - m''p}{\sin B'_0}\Pi,\quad \gamma' = \frac{nm'' - n''m}{\sin B'_0}\Pi$$
$$\Pi a'' = \frac{\pi'\nu - \pi\nu'}{\sin C'_0},\quad \Pi b'' = \frac{\pi\mu' - \pi'\mu}{\sin C'_0},\quad \Pi c'' = \frac{\mu\nu' - \mu'\nu}{\sin C'_0}$$
$$\alpha'' = \frac{np' - n'p}{\sin C'_0}\Pi,\quad \beta'' = \frac{pm' - p'm}{\sin C'_0}\Pi,\quad \gamma'' = \frac{mn' - m'n}{\sin C'_0}\Pi.$$
$$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \alpha'(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \gamma\beta') = \Pi\Pi_0$$

Die letzteren Formeln bestimmen noch die Determinanten der neuen Axen durch die Determinanten der neuen Coordinaten-Ebenen. Durch die im Vorstehenden gegebenen Formeln lassen sich alle, die gegenseitige Abhängigkeit der Kristallflächen betreffenden Aufgaben der Kristallographie lösen.

XIII.

Neue Construktion einer Lambert'schen Aufgabe aus der praktischen Geometrie.

Von

Herrn G. D. E. Weyer

Assistenten an der Sternwarte zu Hamburg.

Lambert giebt im ersten Theil seiner Beiträge. Seite 72 die folgende Aufgabe, welche er eine der schönsten und zugleich eine der schwersten aus der praktischen Geometrie nennt:

Die relative Lage von sechs Punkten zu bestimmen, wenn man in dreien derselben die Abweichung der drei übrigen von der Mittagslinie beobachtet hat.

Die folgende Auflösung gründet sich auf der eleganten Construction der Pothenotschen Aufgabe von **Bessel** und **Kulenkamp**, auf welche **Claussen** in Nr. 430. der **Astronomischen Nachrichten** aufmerksam machte und welche sich in **Grunerts Geodäsie Seite** 224 vorgetragen findet.

Bezeichnen die Buchstaben A, B, C (Taf. I. Fig. 10.) die drei Stationen und D, E, F die drei observirten Punkte, so sind zunächst gegeben die Winkel

$$DAE,\ EAF$$
$$DBE,\ EBF$$
$$DCE,\ ECF$$

wodurch in Verbindung mit der Mittagslinie auch folgende Winkel bekannt sind:

$$ADB,\ BDC$$
$$AEB,\ BEC$$
$$AFB,\ BFC$$

Betrachtet man jetzt die Punkte A, B, C, D als eine Pothenotsche Aufgabe und construirt z. B. über der willkührlich angenommenen Linie AC die Winkel $CAG=BDC$ und $ACG=ADB$, so liefert dies einen Durchschnittspunkt G, welcher mit D und B in gerader Linie liegt. Eben so geben die Punkte A, B, C, E einen zweiten Durchschnittspunkt H, welcher mit E und B in einer geraden Linie liegt, und so auch die Punkte A, B, C, F einen dritten Durchschnittspunkt J, welcher mit F und B in gerader Linie liegt. Die drei Punkte G, H, J werden also bekannt, und da man auch die Winkel kennt, welche sie von dem Punkte B aus gesehen bilden, so ist dieser Punkt B und folglich alle übrigen leicht bestimmt.

Zusatz des Herausgebers.

Die vorbergehende schöne Construction des obigen Lambertschen Problems, welches jedenfalls bei geodätischen Aufnahmen häufig mit grossem Vortheil angewandt werden kann, veranlasst mich zu der Mittheilung der folgenden analytischen Auflösung dieses Problems, weil mir die von **Lambert** selbst a. a. O. S. 81 gegebene analytische Auflösung, insbesondere wenn man sich der Coordinatenmethode zu bedienen beabsichtigt, nicht so einfach zu sein, und namentlich nicht ohne alle weitere Berücksichtigung der Figur oder vielmehr des durch dieselbe dargestellten speciellen Falls zum Zweck zu führen scheint, wie es wohl zu wünschen wäre, wobei übrigens auch nicht unerwähnt bleiben darf, dass der

von Lambert a. a. O. gegebene analytische Ausdruck falsch ist, indem sowohl im Zähler, als auch im Nenner desselben, aus Versehen ein Factor ausgelassen worden ist. Der Fehler wurde zuerst von Good entdeckt (Lambert's gelehrter Briefwechsel. Bd. 2. S. 232), und von Lambert (Ebendas. S. 236) anerkannt. Die richtige Formel findet man u. A. in Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben. Erster Theil. Berlin. 1805. S. 86.

Die sechs Punkte wollen wir jetzt durch A, A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 bezeichnen, und wollen annehmen, dass in jedem der drei ersten Punkte A, A_1, A_2 die Winkel gemessen worden seien, welche die von jedem dieser Punkte nach den drei letztern Punkten A', A'_1, A'_2 gezogenen geraden Linien mit gewissen von den drei erstern Punkten aus nach denselben Seiten hin gezogenen einander parallelen geraden Linien einschliessen, wobei diese Winkel von den in Rede stehenden einander parallelen Linien an immer nach denselben Seiten hin von 0 bis 360° gezählt werden sollen. Die von A, A_1, A_2 aus nach denselben Seiten hin gezogenen Parallellinien können die nach Norden oder Süden gerichteten Theile des astronomischen Meridians oder auch die gleichnamigen Theile des magnetischen Meridians sein. Näherungsweise kann man aber auch die von A A_1, A_2 nach einem und demselben sehr weit entfernten Punkte E gezogenen Linien anwenden. Sind die Entfernungen des Punktes E von den Punkten A, A_1, A_2, und die Entfernungen der drei letzten Punkte von einander näherungsweise bekannt, so ist es in dem letzten der drei obigen Fälle leicht, die Parallaxe zu berücksichtigen und gehörig in Rechnung zu nehmen, wozu eine besondere Anleitung hier nicht erforderlich ist. Die drei von den Punkten A, A_1, A_2 aus nach denselben Seiten hin gezogenen einander parallelen geraden Linien wollen wir im Folgenden der Kürze wegen schlechthin die Axen nennen, und wollen nun die folgenden Bezeichnungen einführen.

Die von den Linien AA', AA'_1, AA'_2 mit der von A aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an nach derselben Seite hin von 0 bis 360° gezählten Winkel sollen respective durch α, β, γ bezeichnet werden.

Die von den Linien A_1A', $A_1A'_1$, $A_1A'_2$ mit der von A_1 aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an nach derselben Seite wie vorher hin von 0 bis 360° gezählten Winkel sollen respective durch α_1, β_1, γ_1 bezeichnet werden.

Die von den Linien A_2A', A_2A_1', $A_2A'_2$ mit der von A_2 aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an nach derselben Seite wie vorher hin von 0 bis 360° gezählten Winkel sollen respective durch α_2, β_2, γ_2 bezeichnet werden.

Die von den Linien AA_1, AA_2 mit der von A aus gezogenen Axe eingeschlossenen, von dieser Axe an immer nach derselben Seite hin wie vorher von 0 bis 360° gezählten Winkel wollen wir endlich respective durch φ, ψ bezeichnen.

Nehmen wir nun in jedem der Punkte A, A_1, A_2 die von diesem Punkte aus gezogene Axe als den positiven Theil der Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, in welchem der positive Theil der Ordinatenaxe eine solche Lage hat, dass man sich, um von dem positiven Theile der Abscissenaxe durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Or-

dinatenaxe zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher von den von A, A_1, A_2 aus gezogenen Axen an die Winkel α, β, γ; α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 von 0 bis 360° gezählt werden; so sind die Coordinaten der Punkte

$$A',\ A'_1,\ A'_2$$

in dem Systeme, dessen Anfang A ist:

$$1)\begin{cases} AA'\,.\cos\alpha,\ AA'\,.\sin\alpha;\\ AA'_1\,.\cos\beta,\ AA'_1\,.\sin\beta;\\ AA'_2\,.\cos\gamma,\ AA'_2\,.\sin\gamma;\end{cases}$$

in dem Systeme, dessen Anfang A_1 ist:

$$2)\begin{cases} A_1A'\,.\cos\alpha_1,\ A_1A'\,.\sin\alpha_1;\\ A_1A'_1\,.\cos\beta_1,\ A_1A'_1\,.\sin\beta_1;\\ A_1A'_2\,.\cos\gamma_1,\ A_1A'_2\,.\sin\gamma_1;\end{cases}$$

in dem Systeme, dessen Anfang A_2 ist:

$$3)\begin{cases} A_2A'\,.\cos\alpha_2,\ A_2A'\,.\sin\alpha_2;\\ A_2A'_1\,.\cos\beta_2,\ A_2A'_1\,.\sin\beta_2;\\ A_2A'_2\,.\cos\gamma_2,\ A_2A'_2\,.\sin\gamma_2.\end{cases}$$

Endlich sind die Coordinaten der Punkte

$$A_1,\ A_2$$

in dem Systeme, dessen Anfang A ist:

$$4)\begin{cases} AA_1\,.\cos\varphi,\ AA_1\,.\sin\varphi;\\ AA_2\,.\cos\psi,\ AA_2\,.\sin\psi.\end{cases}$$

Also hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die zwölf folgenden Gleichungen:

$$5)\begin{cases} AA'\,.\cos\alpha = AA_1\,.\cos\varphi + A_1A'\,.\cos\alpha_1\\ \qquad = AA_2\,.\cos\psi + A_2A'\,.\cos\alpha_2,\\ AA'\,.\sin\alpha = AA_1\,.\sin\varphi + A_1A'\,.\sin\alpha_1\\ \qquad = AA_2\,.\sin\psi + A_2A'\,.\sin\alpha_2;\\ AA'_1\,.\cos\beta = AA_1\,.\cos\varphi + A_1A'_1\,.\cos\beta_1\\ \qquad = AA_2\,.\cos\psi + A_2A'_1\,.\cos\beta_2,\\ AA'_1\,.\sin\beta = AA_1\,.\sin\varphi + A_1A'_1\,.\sin\beta_1\\ \qquad = AA_2\,.\sin\psi + A_2A'_1\,.\sin\beta_2;\\ AA'_2\,.\cos\gamma = AA_1\,.\cos\varphi + A_1A'_2\,.\cos\gamma_1\\ \qquad = AA_2\,.\cos\psi + A_2A'_2\,.\cos\gamma_2,\\ AA'_2\,.\sin\gamma = AA_1\,.\sin\varphi + A_1A'_2\,.\sin\gamma_1\\ \qquad = AA_2\,.\sin\psi + A_2A'_2\,.\sin\gamma_2;\end{cases}$$

welche die dreizehn unbekannten Grössen

$$\varphi,\ \psi;$$
$$AA_1,\ AA_2;$$
$$AA',\ AA'_1,\ AA'_2;$$
$$A_1A',\ A_1A'_1,\ A_1A'_2;$$
$$A_2A',\ A_2A'_1,\ A_2A'_2$$

enthalten, die sich also aus den obigen zwölf Gleichungen nicht sämmtlich bestimmen lassen.

Man kann diese zwölf Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$6)\ \begin{cases} AA_1 \,.\, \cos\varphi = AA' \,.\, \cos\alpha - A_1A' \,.\, \cos\alpha_1 \\ \qquad\qquad = AA'_1 \,.\, \cos\beta - A_1A'_1 \,.\, \cos\beta_1 \\ \qquad\qquad = AA'_2 \,.\, \cos\gamma - A_1A'_2 \,.\, \cos\gamma_1, \\ AA_1 \,.\, \sin\varphi = AA' \,.\, \sin\alpha - A_1A' \,.\, \sin\alpha_1 \\ \qquad\qquad = AA'_1 \,.\, \sin\beta - A_1A'_1 \,.\, \sin\beta_1 \\ \qquad\qquad = AA'_2 \,.\, \sin\gamma - A_1A'_2 \,.\, \sin\gamma_1, \\ AA_2 \,.\, \cos\psi = AA' \,.\, \cos\alpha - A_2A' \,.\, \cos\alpha_2 \\ \qquad\qquad = AA'_1 \,.\, \cos\beta - A_2A'_1 \,.\, \cos\beta_2 \\ \qquad\qquad = AA'_2 \,.\, \cos\gamma - A_2A'_2 \,.\, \cos\gamma_2, \\ AA_2 \,.\, \sin\psi = AA' \,.\, \sin\alpha - A_2A' \,.\, \sin\alpha_2 \\ \qquad\qquad = AA'_1 \,.\, \sin\beta - A_2A'_1 \,.\, \sin\beta_2 \\ \qquad\qquad = AA'_2 \,.\, \sin\gamma - A_2A'_2 \,.\, \sin\gamma_2; \end{cases}$$

und erhält aus diesen letztern Gleichungen ferner ohne alle Schwierigkeit die vier folgenden Gleichungen:

$$7)\ \begin{cases} AA' \,.\, \sin(\alpha-\beta_1) - A_1A' \,.\, \sin(\alpha_1-\beta_1) = AA'_1 \,.\, \sin(\beta-\beta_1), \\ AA' \,.\, \sin(\alpha-\gamma_1) - A_1A' \,.\, \sin(\alpha_1-\gamma_1) = AA'_2 \,.\, \sin(\gamma-\gamma_1), \\ AA' \,.\, \sin(\alpha-\beta_2) - A_2A' \,.\, \sin(\alpha_2-\beta_2) = AA'_1 \,.\, \sin(\beta-\beta_2), \\ AA' \,.\, \sin(\alpha-\gamma_2) - A_2A' \,.\, \sin(\alpha_2-\gamma_2) = AA'_2 \,.\, \sin(\gamma-\gamma_2); \end{cases}$$

aus denen sich durch Division sogleich die beiden Gleichungen

$$8)\ \begin{cases} \dfrac{AA' \,.\, \sin(\alpha-\beta_1) - A_1A' \,.\, \sin(\alpha_1-\beta_1)}{AA' \,.\, \sin(\alpha-\beta_2) - A_2A' \,.\, \sin(\alpha_2-\beta_2)} = \dfrac{\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_2)}, \\[2ex] \dfrac{AA' \,.\, \sin(\alpha-\gamma_1) - A_1A' \,.\, \sin(\alpha_1-\gamma_1)}{AA' \,.\, \sin(\alpha-\gamma_2) - A_2A' \,.\, \sin(\alpha_2-\gamma_2)} = \dfrac{\sin(\gamma-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_2)}, \end{cases}$$

oder

$$9)\ \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha-\beta_1) - \dfrac{A_1A'}{AA'}\sin(\alpha_1-\beta_1)}{\sin(\alpha-\beta_2) - \dfrac{A_2A'}{AA'}\sin(\alpha_2-\beta_2)} = \dfrac{\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_2)}, \\[4ex] \dfrac{\sin(\alpha-\gamma_1) - \dfrac{A_1A'}{AA'}\sin(\alpha_1-\gamma_1)}{\sin(\alpha-\gamma_2) - \dfrac{A_2A'}{AA'}\sin(\alpha_2-\gamma_2)} = \dfrac{\sin(\gamma-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_2)} \end{cases}$$

ergeben, welche nun bloss noch die beiden unbekannten Grössen

$$\frac{A_1A'}{AA'} \text{ und } \frac{A_2A'}{AA'}$$

enthalten, die sich also mittelst derselben bestimmen lassen.

Zu dem Ende bringe man diese Gleichungen zuerst auf die Form

$$10)\left\{\begin{aligned}
&\sin(\alpha-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)-\sin(\alpha-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\\
&=\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\,.\,\frac{A_1A'}{AA'}\\
&\qquad\qquad-\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\,.\,\frac{A_2A'}{AA'},\\
&\sin(\alpha-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)-\sin(\alpha-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\\
&=\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\,.\,\frac{A_1A'}{AA'}\\
&\qquad\qquad-\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\,.\,\frac{A_2A'}{AA'};
\end{aligned}\right.$$

oder, weil, wie man leicht findet,

$$\sin(\alpha-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)-\sin(\alpha-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2),$$
$$\sin(\alpha-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)-\sin(\alpha-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)$$
$$=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)$$

ist, auf die Form

$$11)\left\{\begin{aligned}
&\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\\
&=\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\,.\,\frac{A_1A'}{AA'}\\
&\qquad\qquad-\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\,.\,\frac{A_2A'}{AA'},\\
&\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\\
&=\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\,.\,\frac{A_1A'}{AA'}\\
&\qquad\qquad-\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\,.\,\frac{A_2A'}{AA'};
\end{aligned}\right.$$

und erhält aus diesen Gleichungen, wenn man der Kürze wegen

$$12)\left\{\begin{aligned}
K&=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1),\\
K_1&=\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2),\\
L&=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1),\\
L_1&=\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2),\\
M&=\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1),\\
N&=\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)
\end{aligned}\right.$$

setzt, ohne alle Schwierigkeit

$$13)\begin{cases}\dfrac{A_1A'}{AA'}=\dfrac{K-L}{M-N},\\[2mm]\dfrac{A_2A'}{AA'}=\dfrac{K_1-L_1}{M-N}.\end{cases}$$

Hat man die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'}{AA'},\ \frac{A_2A'}{AA'}$$

mittelst dieser Formeln gefunden, so ergeben sich die Verhältnisse

$$\frac{AA'_1}{AA'},\ \frac{AA'_2}{AA'}$$

mittelst der folgenden unmittelbar aus den Gleichungen 7) fliessenden Formeln:

$$14)\begin{cases}\dfrac{AA'_1}{AA'}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_1)}-\dfrac{\sin(\alpha_1-\beta_1)}{\sin(\beta-\beta_1)}\cdot\dfrac{A_1A'}{AA'}\\[2mm]\qquad=\dfrac{\sin(\alpha-\beta_2)}{\sin(\beta-\beta_2)}-\dfrac{\sin(\alpha_2-\beta_2)}{\sin(\beta-\beta_2)}\cdot\dfrac{A_2A'}{AA'},\\[2mm]\dfrac{AA'_2}{AA'}=\dfrac{\sin(\alpha-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_1)}-\dfrac{\sin(\alpha_1-\gamma_1)}{\sin(\gamma-\gamma_1)}\cdot\dfrac{A_1A'}{AA'}\\[2mm]\qquad=\dfrac{\sin(\alpha-\gamma_2)}{\sin(\gamma-\gamma_2)}-\dfrac{\sin(\alpha_2-\gamma_2)}{\sin(\gamma-\gamma_2)}\cdot\dfrac{A_2A'}{AA'}.\end{cases}$$

Die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'_1}{AA'},\ \frac{A_1A'_2}{AA'},\ \frac{A_2A'_1}{AA'},\ \frac{A_2A'_2}{AA'}$$

erhält man hierauf mittelst der folgenden aus den Gleichungen 6) sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$15)\begin{cases}\dfrac{A_1A'_1}{AA'}=-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta_1}+\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\cdot\dfrac{A_1A'}{AA'}+\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta_1}\cdot\dfrac{AA'_1}{AA'}\\[2mm]\qquad=-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}+\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\cdot\dfrac{A_1A'}{AA'}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\beta_1}\cdot\dfrac{AA'_1}{AA'},\\[2mm]\dfrac{A_1A'_2}{AA'}=-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma_1}+\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1}\cdot\dfrac{A_1A'}{AA'}+\dfrac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1}\cdot\dfrac{AA'_2}{AA'}\\[2mm]\qquad=-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}+\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}\cdot\dfrac{A_1A'}{AA'}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\gamma_1}\cdot\dfrac{AA'_2}{AA'},\\[2mm]\dfrac{A_2A'_1}{AA'}=-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta_2}+\dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2}\cdot\dfrac{A_2A'}{AA'}+\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta_2}\cdot\dfrac{AA'_1}{AA'}\\[2mm]\qquad=-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta_2}+\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}\cdot\dfrac{A_2A'}{AA'}+\dfrac{\sin\beta}{\sin\beta_2}\cdot\dfrac{AA'_1}{AA'},\\[2mm]\dfrac{A_2A'_2}{AA'}=-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma_2}+\dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\gamma_2}\cdot\dfrac{A_2A'}{AA'}+\dfrac{\cos\gamma}{\cos\gamma_2}\cdot\dfrac{AA'_2}{AA'}\\[2mm]\qquad=-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2}+\dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2}\cdot\dfrac{A_2A'}{AA'}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin\gamma_2}\cdot\dfrac{AA'_2}{AA'}.\end{cases}$$

Zur Berechnung der Winkel φ und ψ hat man nach den Gleichungen 6) die folgenden Ausdrücke:

$$16)\begin{cases} \text{tang}\,\varphi = \dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha_1 \,.\, \dfrac{A_1A'}{AA'}}{\cos\alpha - \cos\alpha_1 \,.\, \dfrac{A_1A'}{AA'}}, \\[2ex] \text{tang}\,\psi = \dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha_2 \,.\, \dfrac{A_2A'}{AA'}}{\cos\alpha - \cos\alpha_2 \,.\, \dfrac{A_2A'}{AA'}}; \end{cases}$$

oder

$$16^*)\begin{cases} \text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,\alpha \,.\, \dfrac{1 - \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} \,.\, \dfrac{A_1A'}{AA'}}{1 - \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha} \,.\, \dfrac{A_1A'}{AA'}}, \\[2ex] \text{tang}\,\psi = \text{tang}\,\alpha \,.\, \dfrac{1 - \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha} \,.\, \dfrac{A_2A'}{AA'}}{1 - \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha} \,.\, \dfrac{A_2A'}{AA'}}; \end{cases}$$

und zur Berechnung der Verhältnisse

$$\frac{AA_1}{AA'},\ \frac{AA_2}{AA'}$$

hat man endlich die folgenden aus den Gleichungen 6) sich ergebenden Formeln:

$$17)\begin{cases} \dfrac{AA_1}{AA'} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi} - \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\varphi} \,.\, \dfrac{A_1A'}{AA'} \\[2ex] \qquad = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi} - \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\varphi} \,.\, \dfrac{A_1A'}{AA'}, \\[2ex] \dfrac{AA_2}{AA'} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\psi} - \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\psi} \,.\, \dfrac{A_2A'}{AA'} \\[2ex] \qquad = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\psi} - \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\psi} \,.\, \dfrac{A_2A'}{AA'}. \end{cases}$$

Man muss für φ und ψ diejenigen der beiden zwischen 0 und 360° liegenden Werthe nehmen, welche nach den Formeln 16) jeder dieser beiden Winkel haben kann, die mittelst der Formeln 17) für die Verhältnisse

$$\frac{AA_1}{AA'},\ \frac{AA_2}{AA'}$$

positive Werthe liefern, so dass also über die Art, wie man die Winkel φ und ψ zu nehmen hat, nie eine Unbestimmtheit bleiben kann.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 in dem Systeme, dessen Anfang A ist, respective durch X_1, Y_1; X_2, Y_2 und X', Y'; X'_1, Y'_1; X'_2, Y'_2; so ist nach 4) und 1)

$$X_1 = AA_1 \,.\, \cos\varphi,\quad Y_1 = AA_1 \,.\, \sin\varphi;$$
$$X_2 = AA_2 \,.\, \cos\psi,\quad Y_2 = AA_2 \,.\, \sin\psi$$

und

$$X' = AA' \,.\, \cos\alpha, \quad Y' = AA' \,.\, \sin\alpha;$$
$$X'_1 = AA'_1 \,.\, \cos\beta, \quad Y'_1 = AA'_1 \,.\, \sin\beta;$$
$$X'_2 = AA'_2 \,.\, \cos\gamma, \quad Y'_2 = AA'_2 \,.\, \sin\gamma;$$

also

$$18)\left\{\begin{array}{l} \frac{X_1}{AA'} = \cos\varphi \,.\, \frac{AA_1}{AA'}, \quad \frac{Y_1}{AA'} = \sin\varphi \,.\, \frac{AA_1}{AA'}; \\ \frac{X_2}{AA'} = \cos\psi \,.\, \frac{AA_2}{AA'}, \quad \frac{Y_2}{AA'} = \sin\psi \,.\, \frac{AA_2}{AA'} \end{array}\right.$$

und

$$19)\left\{\begin{array}{l} \frac{X'}{AA'} = \cos\alpha, \qquad \frac{Y'}{AA'} = \sin\alpha; \\ \frac{X'_1}{AA'} = \cos\beta \,.\, \frac{AA'_1}{AA'}, \quad \frac{Y'_1}{AA'} = \sin\beta \,.\, \frac{AA'_1}{AA'}; \\ \frac{X'_2}{AA'} = \cos\gamma \,.\, \frac{AA'_2}{AA'}, \quad \frac{Y'_2}{AA'} = \sin\gamma \,.\, \frac{AA'_2}{AA'}; \end{array}\right.$$

mittelst welcher Formeln man also jetzt auch die Verhältnisse der Coordinaten der Punkte A_1, A_2 und A', A'_1, A'_2 in dem Systeme, dessen Anfang A ist, zu der Linie AA' berechnen kann.

Wir wollen jetzt bloss noch zeigen, wie man die Formeln 13), durch welche die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'}{AA'}, \quad \frac{A_2A'}{AA'},$$

auf denen die ganze übrige Rechnung beruhet, gefunden werden, nun durch Einführung von Hülfswinkeln zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten kann.

Berechnen wir nämlich die drei Hülfswinkel ξ, ξ_1, ξ_2 mittelst der Formeln

$$20)\left\{\begin{array}{l} \tang\xi = \frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}, \\ \tang\xi_1 = \frac{\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)}, \\ \tang\xi_2 = \frac{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)}; \end{array}\right.$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)} \,.\, \frac{1-\tang\xi\,\tang\xi_2}{1-\tang\xi_1\,\tang\xi_2},$$
$$\frac{A_2A'}{AA'} = -\frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)}{\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)} \,.\, \frac{1-\cot\xi\,\tang\xi_1}{1-\tang\xi_1\,\tang\xi_2};$$

und folglich

$$21)\left\{\begin{array}{l} \frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\cos(\xi+\xi_2)\cos\xi_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\cos(\xi_1+\xi_2)\cos\xi}; \\ \frac{A_2A'}{AA'} = -\frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\xi-\xi_1)\cos\xi_2}{\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)\cos(\xi_1+\xi_2)\sin\xi}. \end{array}\right.$$

Berechnet man die Hülfswinkel Θ, Θ_1 mittelst der Formeln

$$22)\left\{\begin{aligned}\tang \Theta &= \frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\gamma_1-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)},\\ \tang \Theta_1 &= \frac{\sin(\alpha_1-\gamma_1)\sin(\gamma-\gamma_2)\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\sin(\alpha_2-\gamma_2)\sin(\gamma-\gamma_1)};\end{aligned}\right.$$

so ist, wie man leicht findet,

$$\frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)} \cdot \frac{1-\tang\Theta}{1-\tang\Theta_1};$$

also, weil

$$1-\tang\Theta = \tang 45^\circ - \tang\Theta = \frac{\sin(45^\circ-\Theta)\,.\sqrt{2}}{\cos\Theta},$$

$$1-\tang\Theta_1 = \tang 45^\circ - \tang\Theta_1 = \frac{\sin(45^\circ-\Theta_1)\,.\sqrt{2}}{\cos\Theta_1}$$

ist:

$$23)\quad \frac{A_1A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(45^\circ-\Theta)\cos\Theta_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta}.$$

Weil nun nach 11)

$$\frac{A_2A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha_1-\beta_1)\sin(\beta-\beta_2)\,.\,\frac{A_1A'}{AA'} - \sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)}$$

ist, so ist nach 23), wie man leicht findet:

$$\frac{A_2A'}{AA'} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)} \cdot \frac{\sin(45^\circ-\Theta)\cos\Theta_1 - \sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta}{\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta},$$

und folglich, weil

$$\sin(45^\circ-\Theta)\cos\Theta_1 - \sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta$$
$$= -\cos 45^\circ \sin(\Theta-\Theta_1) = -\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sqrt{2}}$$

ist,

$$24)\quad \frac{A_2A'}{AA'} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta_1-\beta_2)\sin(\Theta-\Theta_1)}{\sin(\alpha_2-\beta_2)\sin(\beta-\beta_1)\sin(45^\circ-\Theta_1)\cos\Theta\,.\sqrt{2}}.$$

Auf diese Weise kann man also die Verhältnisse

$$\frac{A_1A'}{AA'},\quad \frac{A_2A'}{AA'}$$

bloss mittelst der beiden Hülfswinkel Θ und Θ_1 berechnen, da im Gegentheil die zuerst gelehrte Methode die Berechnung der drei Hülfswinkel ξ, ξ_1, ξ_2 erfordert.

Bemerken wollen wir nun endlich noch, dass, wenn an den Punkten A, A_1, A_2 die sechs 180° nicht übersteigenden Winkel $A'AA'_1$, $A'AA'_2$; $A'A_1A'_1$, $A'A_1A'_2$; $A'A_2A'_1$, $A'A_2A'_2$; und etwa noch in dem Punkte A' die zwei 180° nicht übersteigenden Winkel $AA'A_1$, $AA'A_2$ gemessen worden sind, daraus offenbar immer leicht die Winkel hergeleitet werden können, welche in A die Linien AA', AA'_1, AA'_2 mit der Linie AA', in A_1 die Linien A_1A', $A_1A'_1$, $A_1A'_2$ mit einer von A_1 aus der Linie AA' parallel

und nach derselben Seite hin gezogenen Linie, in A_2 die Linien A_2A', $A_2A'_1$, $A_2A'_2$ mit einer von A_2 aus der Linie AA' parallel und nach derselben Seite hin gezogenen Linie einschliessen, wobei alle diese Winkel von der Linie AA', und den derselben von A_1 und A_2 aus parallel gezogenen Linien an immer nach derselben Seite hin von 0 bis 360° gezählt werden. Hat man aber diese letztern Winkel, so kann man die gegenseitige Lage der sechs Punkte A, A_1. A_2 und A', A'_1, A'_2 ganz nach den im Vorhergehenden entwickelten Formeln bestimmen. Die Linie AA' ist dann der positive Theil der Abscissenaxe des zum Grunde liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems, und der positive Theil der Ordinatenaxe wird immer nach der im Obigen in dieser Beziehung gegebenen Bestimmung genommen.

Die vorhergehende analytische Auflösung des wichtigen und interessanten Lambert'schen Problems scheint mir vor der gewöhnlichen, z. B. bei Meier Hirsch a. a. O. sich findenden analytischen Auflösung vorzüglich deshalb wesentliche Vorzüge zu haben, weil letztere eine stete Berücksichtigung der Figur, oder vielmehr des durch dieselbe dargestellten speciellen Falls erfordert, welches bei der ersteren gar nicht nothwendig ist, indem dieselbe mittelst der im Obigen entwickelten Formeln ohne alle weitere Berücksichtigung der Figur, allein auf dem Wege der Rechnung, ganz sicher zum Zweck führt, insofern nur erst, wie sich von selbst versteht, die sämmtlichen Grössen, welche als gegeben betrachtet werden, gehörig und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt sind.

XIV.

Ueber die abgeleiteten Vierecke, welche von je vier merkwürdigen Punkten des geradlinigen Viereckes gebildet werden.

Von

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

So wie das geradlinige Dreieck in den Mittelpunkten des ein- und umgeschriebenen Kreises und in den Durchschnittspunkten der drei Schwerlinien und der drei Höhenperpendikel merkwürdige

Punkte darbietet, so lassen sich solche auch bei dem geradlinigen Vierecke auffinden; nur mit dem Unterschiede, dass das letztere immer vier Punkte einer und derselben Gattung darbietet, welche zusammen ein abgeleitetes Viereck bilden, das dem Urviereck auf bestimmte Weise verwandt ist. In dem Folgenden sollen einige dieser abgeleiteten Vierecke näher untersucht werden, wobei ich mich genau derselben Bezeichnung bedienen will, welche ich in meiner Abhandlung „über die trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes" (Arch. Thl. II. Heft 3. S. 225) gebraucht habe. Da wo ich Formeln aus dieser Abhandlung citiren muss, soll dies der Kürze halber immer durch das Wort „Relationen" geschehen.

1.

Ich betrachte zuerst das Viereck, welches von den Mittelpunkten der den Hauptdreiecken $T_1T_2T_3T_4$ umgeschriebenen Kreise gebildet wird (Taf. I. Fig. 11.), und nenne diese Mittelpunkte mit den Zeigern der zugehörigen Dreiecke 1, 2, 3, 4. Es leuchtet sofort ein, dass im Vierecke 1234 der Winkel

$$\left.\begin{array}{ll} \angle 314 = 180^\circ - (ab) & \angle 253 = A \\ \angle 324 = 180^\circ - (a_1b_1) & \angle 264 = 180^\circ - B \\ \angle 132 = 180^\circ - (ab_1) & \angle 274 = C \\ \angle 142 = 180^\circ - (a_1b) & \text{u. s. w.} \end{array}\right\} 1.$$

sein muss. Hiernach verwandeln sich die Winkelgrössen, welche im Urvierecke durch $\psi\psi'\psi''$ bezeichnet worden sind, für das abgeleitete Viereck in die Werthe $360^\circ - \psi$, $-\psi'$ und $-\psi''$; d. h. wenn in dem Urvierecke die Hauptecke C ausserhalb des um ABD beschriebenen Kreises liegt, was immer als Normalfall angenommen worden ist; so liegt im abgeleiteten Vierecke 1234 die, C entsprechende Hauptecke 1 innerhalb des um die drei anderen Hauptecken 234 beschriebenen Kreises.

Man erhält ferner für die Seiten des abgeleiteten Viereckes ganz leicht die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} (13) = \mathfrak{a}_1 = \frac{1}{2}a\,(\cot\,(b_1c) - \cot\,(bc_1)\,) \\ (24) = \mathfrak{a} \;\, = \frac{1}{2}a_1(\cot\,(bc) \;\; - \cot\,(b_1c_1)) \\ (14) = \mathfrak{b}_1 = \frac{1}{2}b\,(\cot\,(a_1c) - \cot\,(ac_1)\,) \\ (23) = \mathfrak{b} \;\, = \frac{1}{2}b_1(\cot\,(ac) \;\; - \cot\,(a_1c_1)) \\ (34) = \mathfrak{c}_1 = \frac{1}{2}c\,(\cot\,(ab_1) + \cot\,(a_1b)\,) \\ (12) = \mathfrak{c} \;\, = \frac{1}{2}c_1(\cot\,(ab) \;\; + \cot\,(a_1b_1)) \end{array}\right\} 2.$$

Nun ist nach „Relat. Nr. 50."

$$\cot\,(b_1c) - \cot\,(bc_1) = \frac{\sin\,(bc_1 - b_1c)}{\sin\,(bc_1)\,\sin\,(b_1c)}$$

$$= \frac{\sin\,\psi''}{\sin\,(bc_1)\,\sin\,(b_1c)} \cdot \frac{bb_1cc_1}{bb_1cc_1}$$

$$= \frac{2E^2}{4T_1T_2} = 2\,.\,\frac{E^2}{4\sqrt{T_1T_2T_3T_4}} \cdot \sqrt{\frac{T_3T_4}{T_1T_2}}.$$

Macht man ähnliche Verwandlungen für die übrigen Ausdrücke in Nr. 2. und führt zur Abkürzung die Constante

$$\frac{E^2}{4\sqrt{T_1T_2T_3T_4}}=k\ldots(3)$$

ein, so erhält man für die Seiten des abgeleiteten Viereckes:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{a}=ka_1\sqrt{\frac{T_1T_3}{T_2T_4}} & \mathfrak{b}=kb_1\sqrt{\frac{T_1T_4}{T_2T_3}} & \mathfrak{c}=kc_1\sqrt{\frac{T_3T_4}{T_1T_2}} \\ \mathfrak{a}_1=ka\sqrt{\frac{T_2T_4}{T_1T_3}} & \mathfrak{b}_1=kb\sqrt{\frac{T_2T_3}{T_1T_4}} & \mathfrak{c}_1=kc\sqrt{\frac{T_1T_2}{T_3T_4}} \end{array}\right\} 4.$$

und hieraus sogleich:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=k^2\,.\,aa_1 & T_1T_3:T_2T_4=\mathfrak{a}a:\mathfrak{a}_1a_1 \\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1=k^2\,.\,bb_1 & T_1T_4:T_2T_3=\mathfrak{b}b:\mathfrak{b}_1b_1 \\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1=k^2\,.\,cc_1 & T_3T_4:T_1T_2=\mathfrak{c}c:\mathfrak{c}_1c_1 \end{array}\right\} 5.$$

Man bezeichne ferner die Flächenräume, welche im Urvierecke durch die Buchstaben $FF'F''$ $T_1T_2T_3T_4\Delta$ E angedeutet worden sind (Relat. Nr. 14., 18., 50. und 69.), für das abgeleitete Viereck durch die entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}''$ $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4$ $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, so ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{F}=k^2F & \\ \mathfrak{F}'=k^2F' & \mathfrak{T}_1=k^2T_1 \\ \mathfrak{F}''=k^2F'' & \mathfrak{T}_2=k^2T_2 \\ \mathfrak{D}=k^2\Delta & \mathfrak{T}_3=k^2T_3 \\ \mathfrak{E}^2=-k^4E^2 & \mathfrak{T}_4=k^2T_4 \end{array}\right\} 6.$$

Demnach stehen sämmtliche Flächenräume des Ur- und abgeleiteten Viereckes in constantem Verhältnisse und der Exponent des letzteren ist die Grösse k^2. Es bleibt nun noch übrig diejenigen Grössen zu untersuchen, welche den $\delta_1\delta_2\delta_3$ $\alpha\beta\gamma$ des Urviereckes entsprechen und die wir für das abgeleitete durch $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3$ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bezeichnen wollen. Ich bemerke, dass nach „Relat. Nr. 82." folgende Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} F^2F'^2\alpha^2=b^2T_2^2T_3^2+b_1^2T_1^2T_4^2-2bb_1T_1T_2T_3T_4\cos B \\ F^2F''^2\beta^2=a^2T_2^2T_4^2+a_1^2T_1^2T_3^2+2aa_1T_1T_2T_3T_4\cos A \\ F^2F''^2\gamma^2=a^2T_2^2T_4^2+a_1^2T_1^2T_3^2-2aa_1T_1T_2T_3T_4\cos A \\ \qquad\quad =b^2T_2^2T_3^2+b_1^2T_1^2T_4^2+2bb_1T_1T_2T_3T_4\cos B \end{array}\right\} 7.$$

Werden daher in die Gleichungen

$$\mathfrak{d}_1^2=\mathfrak{b}^2+\mathfrak{b}_1^2-2\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\cos B$$
$$\mathfrak{d}_2^2=\mathfrak{c}^2+\mathfrak{c}_1^2-2\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\cos C$$
$$\mathfrak{d}_3^2=\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}_1^2-2\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\cos A$$

die erforderlichen Werthe aus Nr. 4. gesetzt, und aus Nr. 7. gehörig substituirt, so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} E^2\mathfrak{d}_1 = 4k^2\alpha\; FF' & \text{oder}\quad k^2E^2\mathfrak{d}_1 = 4\alpha\; \mathfrak{F}\mathfrak{F}' \\ E^2\mathfrak{d}_2 = 4k^2\beta\; FF'' & \qquad\quad k^2E^2\mathfrak{d}_2 = 4\beta\; \mathfrak{F}\mathfrak{F}'' \\ E^2\mathfrak{d}_3 = 4k^2\gamma\; F'F'' & \qquad\quad k^2E^2\mathfrak{d}_3 = 4\gamma\; \mathfrak{F}'\mathfrak{F}'' \end{array}\right\} 8.$$

Eben so findet man aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{F}^2\mathfrak{F}'^2\alpha_1^2 = \mathfrak{c}^2\mathfrak{T}_1^2\mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{c}_1^2\mathfrak{T}_3^2\mathfrak{T}_4^2 + 2\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4 \cos C$$

u. s. w. die den vorigen ganz entsprechenden Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} 4FF'\alpha_1 = \delta_1 E^2 \\ 4FF''\beta_1 = \delta_2 E^2 \\ 4F'F''\gamma_1 = \delta_3 E^2 \end{array}\right\} 9.$$

Es gehen daher die zugeordneten Seiten des Urviereckes in die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten des abgeleiteten Viereckes über, und eben so gehen die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier Gegenseiten des Urviereckes in die zugeordneten Seiten des abgeleiteten Viereckes über. Die Verbindung von Nr. 8. und 9. giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{d}_1\alpha_1 = k^2 \,.\, \delta_1\alpha, & \Delta F'' \,.\, \delta_1\mathfrak{d}_1 = 2FF' \,.\, \alpha\alpha_1 \\ \mathfrak{d}_2\beta_1 = k^2 \,.\, \delta_2\beta, & \Delta F' \,.\, \delta_2\mathfrak{d}_2 = 2FF'' \,.\, \beta\beta_1 \\ \mathfrak{d}_3\gamma_1 = k^2 \,.\, \delta_3\gamma, & \Delta F \,.\, \delta_3\mathfrak{d}_3 = 2F'F'' \,.\, \gamma\gamma_1 \end{array}\right\} 10.$$

wodurch die in Nr. 6. gefundenen Relationen eine neue Erweiterung erhalten. Die eben erwähnte Beziehung zwischen den zugeordneten Seiten und den Mittellinien beider Vierecke gilt unmittelbar auch von den Winkeln, die diese Linien unter sich bilden. Nach „Relat. Nr. 83.“ hat man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta \cos(\alpha\beta) = \dfrac{c^2T_1^2T_2^2 - c_1^2T_3^2T_4^2}{+F^2F'F''} \\ \alpha\gamma \cos(\alpha\gamma) = \dfrac{b^2T_2^2T_3^2 - b_1^2T_1^2T_4^2}{-FF'^2F''} \\ \beta\gamma \cos(\beta\gamma) = \dfrac{a^2T_2^2T_4^2 - a_1^2T_1^2T_3^2}{-FF'F''^2} \end{array}\right\} 11.$$

und nach „Relat. Nr. 8.“ $a_1^2 - a^2 = \delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23})$ u. s. w. Bezeichnen nun $(\alpha_1\beta_1)$ $(\alpha_1\gamma_1)$ $(\beta_1\gamma_1)$ und $(\mathfrak{d}_{12})$ $(\mathfrak{d}_{13})$ $(\mathfrak{d}_{23})$ dieselben Winkelgrössen im abgeleiteten Viereck, welche $(\alpha\beta)$ (δ_{12}) u. s. w. im Urviereck andeuten, so findet man alsbald:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos(\mathfrak{d}_{12}) = +\cos(\alpha\beta), & \cos(\alpha_1\beta_1) = +\cos(\delta_{12}) \\ \cos(\mathfrak{d}_{13}) = -\cos(\alpha\gamma), & \cos(\alpha_1\gamma_1) = -\cos(\delta_{13}) \\ \cos(\mathfrak{d}_{23}) = -\cos(\beta\gamma), & \cos(\beta_1\gamma_1) = -\cos(\delta_{23}) \end{array}\right\} 12.$$

woraus, da keine dieser Winkelgrössen 180° übersteigen kann, die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathfrak{d}_{12}) = (\alpha\beta), & (\alpha_1\beta_1) = (\delta_{12}) \\ (\mathfrak{d}_{13}) = 180^\circ - (\alpha\gamma), & (\alpha_1\gamma_1) = 180^\circ - (\delta_{13}) \\ (\mathfrak{d}_{23}) = 180^\circ - (\beta\gamma), & (\beta_1\gamma_1) = 180^\circ - (\delta_{23}) \end{array}\right\} 13.$$

folgen, so dass hiernach die zugeordneten Winkel des einen Viereckes die Winkel der Mittellinien des anderen Viereckes geben.

So wie aus dem Urviereck das Viereck 1234 abgeleitet wurde; so kann man aus letzterem wieder ein zweites Viereck erhalten, aus diesem ein drittes, und sofort, indem man immerfort die Mittelpunkte der je drei Hauptecken umgeschriebenen Kreise nimmt. Bezeichnet man in dem Vierecke zweiten Ranges die einzelnen Linien und Flächen mit denselben deutschen Buchstaben, welche für das Viereck 1234 gebraucht worden sind, setzt ihnen jedoch zur Unterscheidung eine (2) über, so ist, da die Constante

$$\frac{-\mathfrak{E}^2}{4\sqrt{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4}} = \frac{k^4E^2}{4k^4\sqrt{T_1T_2T_3T_4}} = k$$

wird, also für alle abgeleiteten Vierecke unveränderlich ist,

$$\overset{(2)}{\mathfrak{a}} = k\mathfrak{a}_1\sqrt{\frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3}{\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_4}} = k^2a\sqrt{\frac{T_2T_4}{T_1T_3}}\sqrt{\frac{T_1T_3}{T_2T_4}} = k^2a,$$

d. h. die Seiten des abgeleiteten zweiten Viereckes sind denen des Urviereckes gleich proportionirt. Da nun zugleich auch die Winkel der ersteren den Winkeln des letzteren wieder gleich sind, so folgt: dass alle abgeleiteten Vierecke von *geradem* Index einander und dem Urvierecke ähnlich sind, und dass die homologen Seiten und Flächen je zweier unmittelbar auf einander folgender sich beziehungsweise wie die Constanten k^2 und k^4 verhalten.

Geht man vom zweiten abgeleiteten Viereck zum dritten über, so findet man ganz auf gleiche Weise, dass die Seiten des letzteren denen des ersten Vierecks gleich proportionirt sind; und da überdiess beide Figuren dieselben Winkel haben, so sind auch alle abgeleiteten Vierecke von *ungerader* Indexzahl einander ähnlich und die homologen Seiten und Flächen je zweier unmittelbar auf einander folgenden verhalten sich respective wie die Constanten k^2 und k^4.

Was endlich die Halbmesser der den Dreiecken $T_1T_2T_3T_4$ umgeschriebenen Kreise anlangt, die in entsprechender Weise mit $R_1R_2R_3R_4$ bezeichnet werden mögen, so ist es leicht allerhand Relationen zwischen ihnen und den Bestandtheilen des Urviereckes herzuleiten. Man erhält z. B.

$$\frac{R_1R_3-R_2R_4}{R_1R_4-R_2R_3} = \frac{\sin A}{\sin B},\quad \frac{R_3R_4-R_1R_2}{R_1R_3-R_2R_4} = \frac{\sin C}{\sin A} \quad \ldots (14)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
\frac{R_2+R_1}{R_2-R_1} &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B), & \frac{R_4+R_3}{R_4-R_3} &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)\\
\frac{R_3+R_1}{R_3-R_1} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi''\ \cot\tfrac{1}{2}(B-C), & \frac{R_2+R_4}{R_2-R_4} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi''\ \cot\tfrac{1}{2}(B+C)\\
\frac{R_4+R_1}{R_4-R_1} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi'\ \cot\tfrac{1}{2}(C-A), & \frac{R_3+R_2}{R_3-R_2} &= \cot\tfrac{1}{2}\psi'\ \cot\tfrac{1}{2}(C+A)
\end{aligned}\right\}\ 15.$$

indessen bieten sie keinen Ausdruck dar, der sich besonders auszeichnete, und so mögen sie für jetzt übergangen werden.

II.

Ich betrachte zweitens das Viereck, welches von den Durchschnittspunkten der Perpendikel gebildet wird, die man aus den Mittelpunkten der Vierecksseiten auf ihre Gegenseiten fällt. Nimmt man zuerst die vier Perpendikel in dem einfachen Vierecke *ABCDA* erster Form (Taf. I. Fig. 12.) und nennt deren Durchschnittspunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, so bilden die letzteren ein vollständiges Viereck, dessen Winkel genau dieselben Werthe haben, welche in Nr. 1. für die Winkel des in I. betrachteten Viereckes gefunden wurden.

Ferner ist, wenn man die Hülfslinien $FE = GH = \frac{1}{2}c_1$ und $FG = HE = \frac{1}{2}c$ zieht:

$$E2 = \tfrac{1}{2}a_1 \cot(b_1c_1),\quad E4 = \tfrac{1}{2}a_1 \cot(bc)$$
$$F2 = \tfrac{1}{2}b_1 \cot(a_1c_1),\quad F3 = \tfrac{1}{2}b_1 \cot(ac)$$
$$G1 = \tfrac{1}{2}a \cot(bc_1),\quad G3 = \tfrac{1}{2}a \cot(b_1c)$$
$$H1 = \tfrac{1}{2}b \cot(ac_1),\quad H4 = \tfrac{1}{2}b \cot(a_1c)$$

Dies giebt für die Seiten des abgeleiteten Viereckes:

$$(24) = \tfrac{1}{2}a_1(\cot(b_1c_1) - \cot(bc))$$
$$(13) = \tfrac{1}{2}a(\cot(bc_1) - \cot(b_1c))$$
$$(23) = \tfrac{1}{2}b_1(\cot(a_1c_1) - \cot(ac))$$
$$(14) = \tfrac{1}{2}b(\cot(ac_1) - \cot(a_1c))$$

und für dessen Diagonalen die Werthe:

$$(12) = \tfrac{1}{2}c_1(\cot(ab) + \cot(a_1b_1))$$
$$(34) = \tfrac{1}{2}c(\cot(ab_1) + \cot(a_1b)).$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass die von dem Mittelpunkte jeder Diagonale des einfachen Viereckes *ABCD* auf die andere Diagonale gefällte Senkrechte durch zwei Gegenecken des Viereckes 1234 hindurchgehen und daher eine Diagonale des Letzteren bilden muss. Es bilden daher die sechs Perpendikel, welche von den Mittelpunkten der sechs Seiten des vollständigen Urviereckes auf die Gegenseiten gefällt werden, wiederum ein einziges abgeleitetes Viereck mit sechs Seiten.

Zweitens aber ergiebt sich aus der Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke mit denen in Nr. 2. gefundenen, dass die Seiten des hier betrachteten abgeleiteten Viereckes den Seiten des in §. I. untersuchten vollständig und in gleicher Aufeinanderfolge gleich sind. Demnach ist das hier betrachtete Viereck dem des §. I. congruent, und je zwei homologe Seiten beider Figuren sind einander parallel; ein Satz der sich auch sehr leicht auf synthetischem Wege beweisen lässt. Auch ist auf der Stelle klar, dass die Gerade, welche irgend zwei homologe Ecken beider Vierecke verbindet, durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Mittellinien $\delta_1\delta_2\delta_3$ des Urviereckes hindurchgehen, und von demselben halbirt werden muss.

Ist das Urviereck ein Sehnenviereck, so verwandelt sich das

abgeleitete Viereck des §. I. in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. Daraus folgt dann sogleich der interessante Satz: „dass in jedem Sehnenvierecke die sechs Perpendikel aus den Mittelpunkten der sechs Seiten auf ihre Gegenseiten sich in einem und demselben Punkte schneiden, welcher mit dem Centrum des umgeschriebenen Kreises und dem Durchschnittspunkte der drei Mittellinien des Viereckes in einer und derselben Geraden liegt, die von dem letzteren Punkte genau halbirt wird.

III.

Ein drittes Viereck, welches mit den bereits untersuchten eng zusammenhängt, entsteht durch die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel in jedem der vier Hauptdreiecke $T_1 T_2 T_3 T_4$, (Taf. I. Fig. 13.) Zieht man die Gerade $K1 \parallel AD$, so wird $K3 = C3 - B1 + a_1 \sin A = b(\cot(b_1 c) - \cot(bc_1)) + a_1 \sin A$. Dies giebt durch Substitution aus Nr. 2. die Gleichung $K3 = 2\mathfrak{a}_1 + a_1 \sin A$, mithin $(13)^2 = (K3)^2 + a_1^2 \cos^2 A$. Macht man für die übrigen Seiten des neuen Viereckes ähnliche Entwickelungen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
(24)^2 &= a^2 + 4\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\, a \sin A \\
(13)^2 &= a_1^2 + 4\mathfrak{a}_1^2 + 4\mathfrak{a}_1 a_1 \sin A \\
(23)^2 &= b^2 + 4\mathfrak{b}^2 - 4\mathfrak{b}\, b \sin B \\
(14)^2 &= b_1^2 + 4\mathfrak{b}_1^2 + 4\mathfrak{b}_1 b_1 \sin B \\
(12)^2 &= c^2 + 4\mathfrak{c}^2 - 4\mathfrak{c}\, c \sin C \\
(34)^2 &= c_1^2 + 4\mathfrak{c}_1^2 + 4\mathfrak{c}_1 c_1 \sin C
\end{aligned}\right\} 16.$$

Diese Ausdrücke lassen aber noch eine bemerkenswerthe Umformung zu. Es ist nämlich nach „Relat. Nr. 95."

$$\left.\begin{aligned}
a^2 T_2 T_4 - a_1^2 T_1 T_3 &= F'' E^2 \\
b^2 T_2 T_3 - b_1^2 T_1 T_4 &= F' E^2 \\
c^2 T_1 T_2 - c_1^2 T_3 T_4 &= F\, E^2
\end{aligned}\right\} 17.$$

und mit Hülfe dieser Gleichungen und der Ausdrücke Nr. 4. verwandeln sich die in Nr. 16. zusammengestellten Werthe der einzelnen Vierecksseiten in nachfolgende:

$$\left.\begin{aligned}
(24)^2 &= \mathfrak{a}^2 \,.\, 2\frac{1+2k^2}{k^2} - a^2 \\
(13)^2 &= \mathfrak{a}_1^2 \,.\, 2\frac{1+2k^2}{k^2} - a_1^2 \\
(23)^2 &= \mathfrak{b}^2 \,.\, 2\frac{1+2k^2}{k^2} - b^2 \\
(14)^2 &= \mathfrak{b}_1^2 \,.\, 2\frac{1+2k^2}{k^2} - b_1^2 \\
(12)^2 &= \mathfrak{c}^2 \,.\, 2\frac{1+2k^2}{k^2} - c^2 \\
(34)^2 &= \mathfrak{c}_1^2 : 2\frac{1+2k^2}{k^2} - c_1^2
\end{aligned}\right\} 18.$$

Mittelst dieser, in der That sehr einfachen, Ausdrücke kann nun jeder andere zu dem neuen Vierecke gehörige Werth leicht gefunden werden. Nennt man z. B. die doppelten Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten (24) und (13), ferner (23) und (14) und endlich (12) und (34) beziehungsweise $t_1 t_2 t_3$, so ist, weil stets

$$(\mathfrak{a}a - \mathfrak{a}_1 a_1) \sin A = (\mathfrak{b}b - \mathfrak{b}_1 b_1) \sin B = (\mathfrak{c}c - \mathfrak{c}_1 c_1) \sin C = \frac{E^2}{\Delta}$$

sein muss,

$$\left.\begin{aligned} t_1^2 &= 4(1+2k^2)\frac{FF'}{\Delta F'}\alpha^2 - \delta_1^2 = \delta_1^2 + \frac{E^4\alpha^2}{\Delta^2 F''^2} - \frac{4E^2}{\Delta} \\ t_2^2 &= 4(1+2k^2)\frac{FF'}{\Delta F}\beta^2 - \delta_2^2 = \delta_2^2 + \frac{E^4\beta^2}{\Delta^2 F'^2} - \frac{4E^2}{\Delta} \\ t_3^2 &= 4(1+2k^2)\frac{FF''}{\Delta F}\gamma^2 - \delta_3^2 = \delta_3^2 + \frac{E^4\gamma^2}{\Delta^2 F^2} - \frac{4E^2}{\Delta} \end{aligned}\right\} 19.$$

Bezeichnet man ferner die zu $t_1 t_2 t_3$ gehörigen charakteristischen Winkel des neuen Viereckes beziehungsweise mit $A'B'C'$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} t_2^2 - t_3^2 &= 4(24)\,(13)\,\cos A' = 4(1+4k^2)\,aa_1\,\cos A \\ t_3^2 - t_1^2 &= 4(23)\,(14)\,\cos B' = 4(1+4k^2)\,bb_1\,\cos B \\ t_1^2 - t_2^2 &= 4(12)\,(34)\,\cos C' = 4(1+4k^2)\,cc_1\,\cos C \end{aligned}\right\} 20.$$

Für die von je zwei Seiten des abgeleiteten Viereckes eingeschlossenen Winkel ergeben sich die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} 2(24)\,(23)\cos(3\hat{2}4) &= -4T_1\{\cot(ab) + 2(1+2k^2)\cot(a_1b_1)\} \\ 2(14)\,(13)\cos(3\hat{1}4) &= -4T_2\{\cot(a_1b_1) + 2(1+2k^2)\cot(ab)\} \\ 2(24)\,(14)\cos(2\hat{4}1) &= -4T_3\{\cot(ab_1) + 2(1+2k^2)\cot(a_1b)\} \\ 2(23)\,(13)\cos(2\hat{3}1) &= -4T_4\{\cot(a_1b) + 2(1+2k^2)\cot(ab_1)\} \end{aligned}\right\} 21.$$

Auf einem anderen allerdings ziemlich weitläufigen Wege findet man auch:

$$\left.\begin{aligned}
\cot(4\hat{2}3) &= -\cot(ab) + \cot(a_1 b_1)\left\{\frac{c_1^2\cot(a_1 b_1) - a^2\cot(b_1 c) - b^2\cot(a_1 c)}{2T_1}\right\}\\
\cot(3\hat{1}4) &= -\cot(a_1 b_1) + \cot(ab)\left\{\frac{c_1^2\cot(ab) - a_1^2\cot(bc) - b_1^2\cot(ac)}{2T_2}\right\}\\
\cot(2\hat{4}1) &= -\cot(ab_1) + \cot(a_1 b)\left\{\frac{c^2\cot(a_1 b) - a^2\cot(bc_1) - b_1^2\cot(a_1 c_1)}{2T_3}\right\}\\
\cot(2\hat{3}1) &= -\cot(a_1 b) + \cot(ab_1)\left\{\frac{c^2\cot(ab_1) - a_1^2\cot(b_1 c_1) - b^2\cot(ac_1)}{2T_4}\right\}
\end{aligned}\right\} 22.$$

woraus sich ziemlich einfache Formeln für die Flächeninhalte der vier Hauptdreiecke des Viereckes 1234 ableiten lassen. Es hat indessen kein grosses Interesse, diese Untersuchung weiter fortzusetzen, und ich beschränke mich daher darauf, noch zu erwähnen, dass wenn das Urviereck ein Sehnenviereck wird, alsdann nach Nr. 16. und 21. auch

$$(24) = a \quad (23) = b \quad (12) = c$$
$$(13) = a_1 \quad (14) = b_1 \quad (34) = c_1$$

$$\angle 4\hat{2}3 = (ab) \qquad \angle 2\hat{4}1 = (ab_1)$$
$$\angle 4\hat{1}3 = (a_1b_1) \qquad \angle 2\hat{3}1 = (a_1b)$$

werden muss. Construirt man daher in einem Sehnenvierecke die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel in den vier Hauptdreiecken, so bilden diese die Ecken eines dem Urvierecke congruenten Viereckes. Wollte man noch weiter gehen und auch noch die gegenseitige Lage der gleichen Seiten erörtern, so müsste man in dem allgemeinen Vierecke 1234 die Verbindungslinien jedes Eckpunktes des letzteren mit der entsprechenden Ecke des Urviereckes suchen. Man erhält für diese Geraden sehr elegante Werthe, wie z. B.

$$\left.\begin{aligned} (A2)^2 &= \frac{\delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 + 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23} - 2(b_1c_1)}{4\sin^2(b_1c_1)} \\ (C1)^2 &= \frac{\delta_2{}^2 + \delta_3{}^2 - 2\delta_2\delta_3 \cos(\delta_{23} - 2(bc_1))}{4\sin^2(bc_1)} \end{aligned}\right\} \quad 23.$$

und findet dadurch, dass im Sehnenvierecke und dem aus ihm abgeleiteten Vierecke die homologen Seiten auch noch *parallel* sind; so dass also die Ecken des einen von beiden Vierecken immer auch die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel in den vier Hauptdreiecken des anderen sind *).

XV.

Ueber die perspectivischen Lagen eines Strahlenbüschels auf einer projectivischen Geraden.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

---

1. Wenn ein Strahlenbüschel a, b, c, d von einer beliebigen Geraden geschnitten wird, so findet bekanntlich zwischen den Ab-

---

*) Von den hier erörterten Sätzen, insofern sie sich auf ein Viereck beziehen, das kein Sehnenviereck ist, möchte wohl kein einziger bekannt sein. Die durch specielle Anwendung auf das Sehnenviereck daraus abgeleiteten Theoreme sind bereits bekannt, und finden sich zum Theil bei Puissant und in Crelle's Journal, von wo aus sie in die Anhänge zur deutschen Uebersetzung der van Swinden'schen Geometrie übergegangen sind. Eine vollständige Zusammenstellung aller dieser Sätze über des Sehnenviereck, mit eleganten synthetischen Beweisen, enthält Kunzes Lehrbuch der Geometrie.

ständen der bezieblichen Durchschnittspunkte a, b, c, d dasselbe Doppelverhältniss statt, wie zwischen den Sinus der entsprechenden Winkel des Strahlenbüschels, nämlich

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = \frac{\sin ab}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin dc}.$$

Umgekehrt, findet zwischen den vier Punkten a, b, c, d einer Geraden und zwischen vier Strahlen eines Strahlenbüschels *a*, *b*, *c*, *d* eine Gleichheit der obigen Doppelverhältnisse statt, so kann man das Strahlenbüschel und die Gerade so legen, dass die Punkte a, b, c, d auf den entsprechenden Strahlen liegen, d. h. dass beide Gebilde sich in perspectivischer Lage befinden.

Da nun

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = \frac{ba}{ad} : \frac{bc}{cd} = \frac{cd}{da} : \frac{cb}{ba} = \frac{dc}{cb} : \frac{da}{ab}$$

ist, so kann jedes dieser Doppelverhältnisse dem obigen Verhältnisse zwischen den Sinus gleich gesetzt werden, und es ergiebt sich dann, dass die Punkte

a, b, c, d

nicht nur den Strahlen

1) *a*, *b*, *c*, *d*

sondern auch denen

2) *b*, *a*, *d*, *c*

3) *c*, *d*, *a*, *b*

4) *d*, *c*, *b*, *a*

entsprechend gedacht und mithin auch beide Gebilde auf diese vierfache Art in perspectivische Lage gebracht werden können.

Sind überdies die Strahlen des Büschels und daher auch die Punkte der Geraden harmonisch, d. h. ist $\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = 1$;

so hat man auch noch

$$\frac{ab}{bc} : \frac{ad}{dc} = 1 =$$

$$\frac{ad}{dc} : \frac{ab}{bc} = \frac{ba}{ab} : \frac{bc}{cb} = \frac{cb}{ba} : \frac{cd}{da} = \frac{bc}{cd} : \frac{ba}{ad}.$$

Vergleicht man diese vier Doppelverhältnisse wieder mit dem der Sinus, so findet sich, dass die Punkte

a, b, c, d

auch den Strahlen

5) *a*, *d*, *c*, *b*

6) *d*, *a*, *b*, *c*

7) *c*, *b*, *a*, *d*

8) *b*, *c*, *d*, *a*

entsprechend genommen werden können und dass also in dem be-

sondern Falle von harmonischen Gebilden eine achtfache perspectivische Lage möglich wird.

Insofern aber bei einer jeden der angeführten Combinationen der Mittelpunkt des Strahlenbüschels sowohl diesseits als (symmetrisch) jenseits der Geraden liegen kann, so wird sich die Anzahl der möglichen Lagen verdoppeln und im Allgemeinen 8, aber im Falle von harmonischen Gebilden 16 sein. Bezeichnet man die verschiedenen Oerter des Mittelpunkts des perspectivischen Strahlenbüschels, die oberhalb der Geraden befindlich sind, dem aufgestellten Schema gemäss, mit 1, 2, 3, 4, (5, 6, 7, 8), und die entsprechenden unterhalb der Geraden mit 1', 2', 3', 4', (5', 6', 7', 8'), so lehrt der Anblick jenes Schemas sogleich, welcher Winkel des Strahlenbüschels auf irgend einem Abschnitte der gegebenen Geraden bei irgend einer der perspectivischen Lagen steht. So z. B. steht auf $\mathfrak{ac}$ bei der Lage 1) der Winkel *ac*, aber bei der Lage 3) der Winkel *ac'*, d. h. der Nebenwinkel jenes Winkels *ac*, weil in diesem Falle zwischen den Strahlen *a* und *c* der Strahl *d* liegt, während im ersten Falle der Strahl *b* dazwischen liegt. Dasselbe gilt für die Lage 3'), nur dass hier der Winkel *ac'* unterhalb der Geraden und desshalb der Winkel *ac* oberhalb der Geraden auf $\mathfrak{ac}$ steht.

2. Denkt man sich nun die Gerade in der Ebene festliegend, so darf offenbar nur einer jener Mittelpunkte 1, 2, u. s. w. gegeben sein, und es wird dadurch auch das Strahlenbüschel und demnächst auch alle übrigen Mittelpunkte bestimmt sein. Es kann also gefragt werden, in welcher Beziehung diese 8 (oder 16) Mittelpunkte zu einander stehen, und wie aus einem von ihnen alle übrigen durch eine einfache Construction zu finden sind. (S. Steiner's Entwickelung der Abhängigkeit u. s. w. Anhang). Die gegenwärtige Abhandlung soll diese Frage beantworten.

3. Es werde fürs erste ein beliebiges Strahlenbüschel betrachtet. Der Anblick des Schemas zeigt ohne weiteres, dass in den Mittelpunkten 1 und 2 der Winkel *ab* auf $\mathfrak{ab}$ steht. Folglich liegen die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, 1, 2 in einem Kreise. Dasselbe gilt von den Punkten $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, 1, 2, weil dem Schema zufolge in den Mittelpunkten 1 und 2 der Winkel *cd* auf $\mathfrak{cd}$ steht. Zieht man die gemeinschaftliche Sehne 12 dieser beiden Kreise (Taf. II. Fig. 1.) bis zu ihrem Durchschnittspunkte $\mathfrak{f}$ mit der Geraden $\mathfrak{ad}$, so ist die Potenz des ersten Kreises in Bezug auf $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{f}1 \,.\, \mathfrak{f}2 = \mathfrak{fa} \,.\, \mathfrak{fb};$$

und die des zweiten Kreises:

$$\mathfrak{f}1 \,.\, \mathfrak{f}2 = \mathfrak{fc} \,.\, \mathfrak{fd};$$

folglich

$$\mathfrak{fa} \,.\, \mathfrak{fb} = \mathfrak{fc} \,.\, \mathfrak{fd}.$$

Der Punkt $\mathfrak{f}$ also, in welchem die Gerade 12 die Gerade $\mathfrak{ad}$ schneidet, ist nur durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bestimmt und unabhängig von den Winkeln des Strahlenbüschels.

Eben so liegen die Punkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, 3, 4 und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, 3, 4 in Kreisen, deren gemeinschaftliche Sehne 34 die Gerade $\mathfrak{ad}$ in einem Punkte $\mathfrak{f}'$ schneiden wird, für welchen

$$f3 . f4 = fa . fb,$$
$$f3 . f4 = fc . fd;$$

folglich

$$fa . fb = fc . fd$$

ist, und der daher mit dem Punkte f zusammenfällt, da beide innerhalb b und c liegen.

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass (wegen der Kreise $ad14$, $bc14$; $ad23$, $bc23$) die Geraden 14 und 23 sich auf der Geraden ad in einem Punkte g treffen, für welchen

$$g1 . g4 = g2 . g3 =$$
$$ga . gd = gb . gc$$

ist, und der ebenso wie f nur durch die Punkte a, b, c, d bestimmt ist.

Aus dem Obigen folgt nun unmittelbar, dass die Mittelpunkte 1, 2, 3, 4 auf einem Kreise liegen, dessen Potenz in Bezug auf f gleich $fa . fb = fc . fd$. und in Bezug auf g gleich $ga . gd = gb . gc$ ist, und dessen Mittelpunkt deshalb senkrecht über einem bestimmten Punkte e der Geraden ad liegt. Dieser Punkt e erhält seine Bestimmung dadurch, dass die Potenz des Kreises in Bezug auf f gleich $fe . fg$, folglich in Bezug auf g gleich $ge . gf$ und in Bezug auf e gleich $ef . eg$ ist.

4. Die angeführten Beziehungen der Punkte e, f, g ergeben auch noch andere Bestimmungen derselben. Beschreibt man nämlich über ac und bd als Durchmessern zwei Kreise, die sich in o schneiden, so ist offenbar wegen $ga . gd = gb . gc$ der Punkt g ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt, und der Punkt f wegen $fa . fb = fc . fd$ ihr innerer Aehnlichkeitspunkt. Folglich geht der Kreis über fg als Durchmesser ebenfalls durch o (er hat mit den Kreisen über ac und bd eine gemeinschaftliche Potenzlinie); und es ist

$$fa . fb = fo . fo,$$
$$ga . gd = go . go.$$

Da nun die Potenz des Kreises 1234 $fa . fb = fe . fg$ ist, so folgt

$$fe . fg = fo . fo,$$

mithin ist oe senkrecht auf ad oder e liegt auf der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise über ac und bd. Deshalb hat man endlich noch

$$ea . ec = eb . ed \ (= eo . eo = ef . eg),$$

welche Bestimmung des Punktes e den obigen für die Punkte f und g ähnlich ist. Auch hat sich ergeben, dass die Potenz des Kreises 1234 in Bezug auf die Punkte e, f, g beziehlich $eo . eo$, $fo . fo$, $go . go$ ist, so wie sie überhaupt für irgend einen Punkt p der Geraden ad gleich $po . po$ sein wird.

5. Ueber die in 3. entwickelten Lagenbeziehungen liesse sich noch viel Einzelnes bemerken. Zieht man z. B. irgend einen Kreis 1234, den angegebenen Bedingungen entsprechend, und legt man von g aus die beiden Tangenten an denselben, so fallen offenbar die Punkte 1 und 4 in den einen Berührungspunkt (14) und die Punkte 2 und 3 in den andern (23) zusammen, wo $g(14) = g(23) = go$.

Dieser Fall findet statt, wenn in dem (übrigens immer projectivischen) Strahlenbüschel *abcd* der Winkel $ab = cd$ ist, wie das Schema zeigt. Die Punkte (14) und (23), für welche die vier Mittelpunkte in zwei zusammenfallen, liegen daher auf zwei Kreisen, deren Mittelpunkte g und f, und deren Halbmesser beziehlich go und fo sind. Für den Durchschnitt o dieser beiden Kreise fallen alle vier Mittelpunkte in diesen einen zusammen. U. s. w. Ich will mich aber bei dergleichen Betrachtungen, die aus dem Gesagten von selbst folgen, nicht aufhalten.

6. Aus der Gestaltung der Figur erhellet nun auch, dass die Punkte 1, 2, 3', 4'; 1, 2', 3', 4 ebenfalls in Kreisen liegen. Wendet man das oben befolgte Verfahren z. B. auf die Punkte 1, 2, 3', 4' an, so findet sich, dass der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer im Punkte g Senkrechten liegt, und dass die Geraden 12, 3'4' sich in f, dagegen die Geraden 13', 24' sich in e schneiden. U. s. w.

7. Wenn das Gebilde a, b, c, d nicht mehr gegeben ist, so fallen auch alle unter 3. aufgestellten Bedingungen für den Kreis 1234 weg, und es bleibt unter den Punkten 1, 2, 3, 4 nur die Beziehung übrig, dass sie auf einem Kreise liegen. Es können demnach umgekehrt vier beliebige im Kreise liegende Punkte 1, 2, 3, 4 die vier verschiedenen Lagen des Mittelpunkts eines Strahlenbüschels vorstellen und man kann aus ihnen ein zugehöriges Gebilde a, b, c, d folgendermassen ableiten.

Der Durchschnittspunkt von 14 und 23 heisse g, der von 12 und 34 heisse f. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte des Kreises 1234 auf fg bestimmt auf dieser den Punkt e und auf dem über fg als Durchmesser beschriebenen Kreise den Punkt o. Nun wähle man auf fg den ersten Punct a beliebig; bestimme dann mittelst des rechten Winkels aoc den Punkt c und mittelst der Beziehung gb . gc = go . go den Punkt b; der rechte Winkel bod bestimmt dann den vierten Punkt d. Da gb . gc = go . go ist, so wird auch ga . gd = go . go; mithin ist g der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise über ac und bd. Da endlich gof ein rechter Winkel ist, so ist f der innere Aehnlichkeitspunkt und folglich fa . fb = fc . fd = fo . fo. Die Punkte a, b, c, d haben also die zufolge 3. erforderliche Lage in Bezug auf g, e, f, und folglich werden die Strahlenbüschel 1a, 1b, 1c, 1d; 2b, 2a, 2d, 2c; u. s. w. identisch sein.

8. So viel über das allgemeine Strahlenbüschel. Ich komme nun zu dem Fall, in welchem die Gebilde harmonisch sind, und noch vier andere Mittelpunkte 5, 6, 7, 8 existiren.

Fürs Erste ist aus der zweiten Hälfte des Schemas klar, dass diese Mittelpunkte dieselbe Beziehung zu einander haben, als die Mittelpunkte 1, 2, 3, 4. Sie werden daher in einem Kreise liegen, der mit dem Kreise 1234 die Gerade ad zur Linie der gleichen Potenzen hat; und es wird 58 und 67 mit 14 und 23 in g zusammentreffen u. s. w. Dass aber die Kreise 1234 und 5678 zusammenfallen, soll im Folgenden bewiesen werden.

Das Schema zeigt, dass die Punkte a, c, 1, 3', 5', 7 und a, c, 1', 3, 5, 7' in Kreisen liegen. (Taf. II. Fig. 2.) Diese Kreise sind einander gleich und haben nur eine symmetrische Lage zu ac. Ferner geht durch die Punkte bd13'57' ein Kreis, der also oberhalb ac den ersten in 1 und den zweiten in 5 schneidet. Man verbinde den Punkt 1 mit dem Punkte p, Mitte von ac, durch eine Gerade

$\mathfrak{p}1$, die den Kreis $\mathfrak{ac}1'3'5'7'$ oberhalb $\mathfrak{ac}$ im Punkte $\mathfrak{m}$ und den Kreis $\mathfrak{bd}1'3'5'7'$ zum zweitenmale im Punkte $\mathfrak{n}$ schneidet. Dann hat man

$$\mathfrak{p}1 \,.\, \mathfrak{pn} = \mathfrak{pb} \,.\, \mathfrak{pd}$$

als Potenz des Kreises $\mathfrak{bd}1'3'5'7'$ in Bezug auf $\mathfrak{p}$, und

$$\mathfrak{p}1 \,.\, \mathfrak{pm} = \mathfrak{pa} \,.\, \mathfrak{pa},$$

weil $\mathfrak{p}$ offenbar der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise über $\mathfrak{ac}$ ist. Nun ist aber, weil $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ harmonisch sind,

$$\mathfrak{pa} \,.\, \mathfrak{pa} = \mathfrak{pb} \,.\, \mathfrak{pd},$$

folglich auch

$$\mathfrak{p}1 \,.\, \mathfrak{pm} = \mathfrak{p}1 \,.\, \mathfrak{pn}.$$

Es fällt daher $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{n}$ in den einen Punkt 5 zusammen, in dem sich die beiden Kreise $\mathfrak{ac}1'3'5'7'$ und $\mathfrak{bd}1'3'5'7'$ schneiden; *die Punkte $\mathfrak{p}$, 1, 5 liegen auf einer Geraden* und es ist

$$\mathfrak{p}1 \,.\, \mathfrak{p}5 = \mathfrak{pa} \,.\, \mathfrak{pa} = \mathfrak{po} \,.\, \mathfrak{po}.$$

Dies letzte Produkt ist aber die Potenz des Kreises 1234 in Bezug auf $\mathfrak{p}$; folglich *liegt der Punkt 5 auf diesem Kreise* und *daher auch die Punkte 6, 7, 8.*

Auf dieselbe Art überzeugt man sich (am kürzesten durch gehörige Vertauschung der Buchstaben des Schemas), dass auch *die Punkte $\mathfrak{p}$, 4, 6; $\mathfrak{p}$, 2, 8; $\mathfrak{p}$, 3, 7;* ferner, wenn die Mitte von $\mathfrak{bd}$ mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet wird, *$\mathfrak{q}$, 1, 7; $\mathfrak{q}$, 2, 6; $\mathfrak{q}$, 3, 5; $\mathfrak{q}$, 4, 8 auf Geraden liegen.*

9. Es ist nun noch das Verhalten der Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zu einander zu ermitteln, in denen sich die Verbindungslinien der auf dem Kreise vertheilten Mittelpunkte 1, 2, 3 . . . 8 zu vieren schneiden, um die Beziehung derselben unabhängig von dem harmonischen Gebilde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ vollständig festzustellen.

Einerseits ist das Strahlenbüschel $1\mathfrak{g}$, $1\mathfrak{p}$, $1\mathfrak{f}$, $1\mathfrak{q}$ mit dem Strahlenbüschel $8\mathfrak{q}$, $8\mathfrak{g}$, $8\mathfrak{p}$, $8\mathfrak{f}$ identisch und folglich auch projectivisch, weil sich die entsprechenden Strahlen bezieblich in den Punkten 4, 5, 2, 7 des Kreisumfanges schneiden und deshalb die Winkel zwischen je zwei Paaren entsprechender Strahlen einander gleich sind. Andrerseits ist dasselbe Strahlenbüschel $1\mathfrak{g}$, $1\mathfrak{p}$, $1\mathfrak{f}$, $1\mathfrak{q}$ mit dem Strahlenbüschel $8\mathfrak{g}$, $8\mathfrak{p}$, $8\mathfrak{f}$, $8\mathfrak{q}$ projectivisch, weil sich die entsprechenden Strahlen in den Punkten der Geraden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}$ schneiden. Folglich *) sind beide Strahlenbüschel harmonisch, folglich auch die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}$.

Diesem zufolge ergiebt sich eine neue Bestimmung der Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}$ aus den gegebenen harmonischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. $\mathfrak{d}$. Da nämlich $\mathfrak{pa} \,.\, \mathfrak{pa} = \mathfrak{po} \,.\, \mathfrak{po} = \mathfrak{pb} \,.\, \mathfrak{pd}$ ist, so berührt die Gerade $\mathfrak{po}$ den Kreis

---

*) In der Abhandlung des Herrn Dr. Rädell (Th. I. Nr. XXIII.) ist gezeigt worden, dass wenn zwei Gebilde (Strahlenbüschel oder Punktenreihe) a, b, c, d; a', b', c', d' projectivisch sind und es auch in der Beziehung a, b, c, d und a', d', c', b' (oder c', b', a', d') bleiben, in welcher ein zugeordnetes Paar b', d' (oder a', c') vertauscht worden ist, dann beide Gebilde harmonisch sind. Der Anblick der zweiten Hälfte unsers Schemas lehrt, dass dies auch dann der Fall ist, wenn neben der Projectivität von a, b, c, d und a', b', c', d' noch die von a, b, c, d und b', c', d', a' (oder d', a', b', c') stattfindet.

über bd in o, und steht mithin senkrecht auf dem Halbmesser derselben qo. Daher liegt der Mittelpunkt r des Kreises poq in der Mitte von pq. Aus demselben Grunde liegt wegen des harmonischen Gebildes g, p, f, q, wenn die Mitte von gf mit h bezeichnet wird, der Mittelpunkt des Kreises hor in der Mitte von hr. Man darf also nur durch den Punkt o und die Mitte r von pq einen Kreis ziehen, dessen Mittelpunkt auf ad liegt; dann bestimmt der andere Endpunkt des Durchmessers den Punkt h. Der Kreis um h mit dem Halbmesser ho schneidet dann in den Punkten g und f ein.

10. Aus dem Gesagten ersieht man leicht, dass auf irgend einem Kreise nur vier von den Mittelpunkten beliebig angenommen werden dürfen, dass aber dann jedesmal die vier zugehörigen bestimmt werden können. Hat man z. B. aus den vier willkührlichen Punkten 1, 2, 3, 4, wie unter 7., die Punkte g, e, f, o abgeleitet, so lege man von h (Mitte von gf) aus den rechten Winkel hor, der den Punkt r bestimmt. Aus r beschreibe man mit dem Halbmesser ro einen Kreis, der die Punkte p und q ergeben wird. Zieht man nun die Geraden p1, p2, p3, p4, so schneiden diese den Kreis 1234 noch einmal in den gesuchten Punkten 5, 6, 7, 8; und dann liegen auch noch auf Geraden die Punkte g, 5, 8; g, 6, 7; f, 5, 6, f, 7, 8; q, 1, 7, q, 2, 6; q, 3, 5; q, 4, 8. — Die harmonischen Punkte a, b, c, d, in Bezug auf welche die eben gefundenen Punkte die verschiedenen Lagen des Mittelpunkts eines harmonischen Strahlenbüschels bezeichnen, werden endlich mittelst der Kreise um p und q mit den bezüglichen Halbmessern po und qo bestimmt.

11. Da zwischen den Punkten 1 bis 8 mehr Beziehungen stattfinden, als zur Bestimmung ihrer gegenseitigen Abhängigkeit erforderlich sind, so bilden die überzähligen Bedingungen Lehrsätze, die sich unabhängig von dem harmonischen Gebilde a, b, c, d aussprechen lassen. Ein Beispiel hievon bietet die vorige Nummer, in der von beliebigen vier Punkten im Kreise ausgegangen wurde. Man kann aber auch von den beliebigen vier harmonischen Punkten g, p, f, q ausgehen. Beschreibt man nämlich irgend einen Kreis von der öfters erwähnten Beschaffenheit, so bestimmen sich, von einem beliebigen Punkte 1 desselben ausgehend, z. B. durch die Züge g14; q48; p82; q26; f65; q53; p37 der Reihe nach die Punkte 4, 8, 2, 6, 5, 3, 7, deren Lage so beschaffen ist, dass die Züge q17; g58; g26; u. s. w. ebenfalls geradlinig sind.

Ausserdem lassen sich in der Figur noch viele geradlinige Punktenreihen, so wie Zusammentreffen von Strahlen und sonstige Eigenheiten nachweisen, wenn man gewisse Theile der Figur veränderlich sein lässt. Ich führe sie nicht an, weil sie nicht von Wichtigkeit zu sein scheinen.



XVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Man soll die folgenden goniometrischen Formeln beweisen.

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

3) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

4) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

5) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)}$
$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

6) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$
$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

7) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)}$
$= \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$

8) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

9) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

10) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

11) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha-\beta) = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

12) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

13) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha-\beta) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

14) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos(\alpha\pm\beta) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta) - 1$

15) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha\pm\beta) = \pm 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta) + 1$

16) $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)$
$= -4\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$

17) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)-1$$

18) $\sin(\alpha+\beta)^2+\sin(\alpha-\beta)^2=1-\cos 2\alpha\cos 2\beta$

19) $\sin(\alpha+\beta)^2-\sin(\alpha-\beta)^2=\sin 2\alpha\sin 2\beta$

20) $\cos(\alpha+\beta)^2+\cos(\alpha-\beta)^2=1+\cos 2\alpha\cos 2\beta$

21) $\cos(\alpha+\beta)^2-\cos(\alpha-\beta)^2=-\sin 2\alpha\sin 2\beta$

22) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin(\alpha\pm\beta)^2=2\{1-\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)\}$

23) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\sin(\alpha\pm\beta)^2=2\{1\pm\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)\}$

24) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\cos(\alpha\pm\beta)^2=1\mp 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

25) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos(\alpha\pm\beta)^2=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

26) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\sin(\alpha\pm\beta)^2=\mp 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

27) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2-\sin(\alpha\pm\beta)^2=2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

28) $\sin\alpha^2+\sin\beta^2-\cos(\alpha\pm\beta)^2=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta)$

29) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2-\cos(\alpha\pm\beta)^2=1\pm 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$.

Man soll den folgenden geometrischen Lehrsatz beweisen, zu welchem ein Jeder sich die Figur leicht selbst wird construiren können:

Es seien A, B, C drei beliebige Punkte in dem Umfange eines Kreises. Zieht man nun durch diese drei Punkte Tangenten an den Kreis, bezeichnet den Durchschnittspunkt der beiden durch A und B gezogenen Tangenten durch D, verbindet die Punkte C und D durch die Linie CD mit einander, und zieht mit der durch den Punkt C an den Kreis gezogenen Tangente eine beliebige Parallele, welche die von A und B nach C gezogenen Linien AC und BC in E und F schneidet; so wird, wie auch diese Parallele gezogen werden mag, die Linie EF immer von der Linie CD halbirt. Dieser von Chasles in dem Journal de Mathématiques publié par Liouville. Juillet. 1842. p. 272 mitgetheilte Satz kann Veranlassung zu verschiedenen interessanten Folgerungen geben, und ist namentlich für die Theorie der stereographischen Projection von Wichtigkeit.

Aufgaben von Herrn Dr. Haedenkamp zu Hamm.

1. Welches ist der Ausdruck für das Produkt der Differenzen je zweier Wurzeln einer Gleichung von irgend einem Grade durch die Coefficienten?

Bei einer Gleichung vom dritten Grade:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, hat man bekanntlich

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$
$$= (a_1^2 - 4a_2)(a_2^2 - 4a_1 a_3) + 2a_1 a_2 a_3 - 27a_3^2 \text{ *)}.$$

2. Welches ist ferner das Produkt der Differenzen je zweier Wurzeln dieser Gleichung:

$$\frac{\alpha_1}{a_1 - x} + \frac{\alpha_2}{a_2 - x} + \frac{\alpha_3}{a_3 - x} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_n - x} = 1,$$

bei welcher noch

$$\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_n} = 1.$$

Ueber Aufgaben für Gleichungen vom zweiten Grade.

Von dem Herrn Conrector Beyer am Gymnasium zu Neustettin.

Die Bemerkung, dass die Auflösung so vieler zur Einübung der Theorie von der Auflösung quadratischer Gleichungen gegebenen Aufgaben, so bald die Gleichungen formirt sind, ein rein mechanisches und geisttödtendes Geschäft wird, erregte in mir den Wunsch, solche Aufgaben aufzufinden, deren Auflösung wo möglich ein fortgehendes Nachdenken und eine stets gespannte Aufmerksamkeit in Anspruch nähme. Beim Suchen nach Aufgaben der Art bot sich eine grosse Zahl von trigonometrischen dar, welche wenigstens theilweise dem beabsichtigten Zwecke entsprechen. Als beweisendes Beispiel möge folgende dienen:

Von welchen hohlen und erhabenen Winkeln ist die Cotangente so gross als das Doppelte ihres Sinus?

Auflösung. Der allgemeine Ausdruck für die möglichen Winkel sei x, so muss zufolge der Aufgabe $\cotg x = 2\sin x$ sein. Nun ist aber $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$, folglich hat man auch $\frac{\cos x}{\sin x} = 2\sin x$ und daher $\cos x = 2\sin x^2$. Um mit Hülfe dieser Gleichung den oder die Werthe von x zu finden, so muss sie in eine solche verwandelt werden, in welcher nur eine trigonometrische Function vorkommt. Zu dem Ende kann $\sqrt{1 - \sin x^2}$ für $\cos x$, oder $1 - \cos x^2$ für $\sin x^2$ substituirt werden. Das erste Verfahren giebt die Gleichung $\sin x^4 + \frac{1}{4}\sin x^2 = \frac{1}{4}$, also $\sin x = \pm\sqrt{-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{17}}$,

---

*) Ich glaube in Betreff dieser Aufgabe auf die Abhandlung Nr. XXX. im 2ten Theile des Archivs, §. 14 — §. 16., verweisen zu dürfen. Die Entwickelung eines völlig independenten Ausdrucks, auf welchen Herr Dr. Haedenkamp seine Absicht vorzüglich gerichtet zu haben scheint, ist allerdings sehr zu wünschen, und dieselbe daher der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs angelegentlich zu empfehlen.

G.

das zweite aber $\cos x^2 + \frac{1}{2}\cos x = 1$, also $\cos x = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}$. Da aber $\sin x$ keine imaginaire Grösse und $\cos x$ nicht < -1 ist, so kann nur $\sin x = \pm\sqrt{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}}$ und $\cos x = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}$ sein. Nach der ersten von diesen beiden Gleichungen ergeben sich vier Werthe von x und zwar 1) $x \gtrless {0^\circ \atop 90^\circ}$, 2) $x \gtrless {90^\circ \atop 180^\circ}$, 3) $x \gtrless {180^\circ \atop 270^\circ}$, 4) $x \gtrless {270^\circ \atop 360^\circ}$; die zweite, $\cos x = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}$, giebt aber nur zwei, nämlich 1) $x \gtrless {0^\circ \atop 90^\circ}$ und 2) $x \gtrless {270^\circ \atop 360^\circ}$, und die beiden letzteren sind diejenigen, welche hier allein gebraucht werden können, da ja $\cot g\, x = 2\sin x$ sein soll, und diese Gleichung nur für $x \gtrless {0^\circ \atop 90^\circ}$ und $x \gtrless {270^\circ \atop 360^\circ}$ stattfinden kann.

Aehnliche Aufgaben lassen sich bilden nach den Gleichungen:

1. $\sin x = 2\cos x$
2. $\operatorname{tg} x = \cos x$
3. $\sec x = \operatorname{cotg} x$
4. $\cos x = \sin x^2 - \cos x^2$
5. $\frac{1}{2}\cos x = \sin x^2 - \cos x^2$.

Man soll den folgenden aus dem London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine. September 1842. p. 179 entlehnten Satz beweisen:

Wenn wie gewöhnlich a, b, c die den Spitzen A, B, C eines sphärischen Dreiecks ABC gegenüberstehenden Seiten dieses sphärischen Dreiecks sind, von den Spitzen A, B, C durch einen und denselben beliebigen Punkt S auf der Oberfläche der Kugel bis zu den gegenüberstehenden Seiten a, b, c die Bogen grösster Kugelkreise α, β, γ gezogen, und die zwischen dem Punkte S und den Seiten a, b, c liegenden Stücke dieser Bogen durch α', β', γ' bezeichnet werden, so ist immer

$$\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} + \frac{\sin\beta'}{\sin\beta} + \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}\right)^2$$

$$= 1 + 2\frac{\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}(1-\cos a) \\ +\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}(1-\cos b) \\ +\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}(1-\cos c)\end{array}\right\}.$$

Die Seiten a, b, c eines ebenen Dreiecks kann man sich als im Verhältniss zum Radius unendlich kleine Kreisbogen denken, so wie auch die von seinen Spitzen A, B, C durch einen beliebi-

gen Punkt S in seiner Ebene bis zu den gegenüberstehenden Seiten a. b, c gezogenen geraden Linien α. β, γ, und deren zwischen dem Punkte S und den Seiten a, b, c liegende Stücke α', β'. γ'. Unter dieser Voraussetzung hat man in der vorhergehenden Gleichung $\cos a = \cos b = \cos c = 1$; $\sin \alpha = \alpha$, $\sin \beta = \beta$, $\sin \gamma = \gamma$; $\sin \alpha' = \alpha'$, $\sin \beta' = \beta'$, $\sin \gamma' = \gamma'$ zu setzen, und erhält aus derselben dann sogleich die bekannte Gleichung

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma} = 1.$$

XVII.

Miscellen.

In dem Cambridge mathematical Journal. February. 1842. p. 96 wird folgende Ableitung der Neper'schen Analogieen mitgetheilt, die, wenn sie sich auch schon anderswo finden sollte *), doch jedenfalls nicht so allgemein bekannt zu sein scheint, wie sie verdient, wobei ich indess nicht unbemerkt lassen will, dass mir immer der Weg, wo man zuerst die Gaussischen Gleichungen beweiset, und aus denselben dann die Neper'sche ableitet, welches sehr leicht geschehen kann, wesentliche Vorzüge zu haben scheint.

Wenn, wie gewöhnlich, $2s = a + b + c$ gesetzt wird, so ist bekanntlich, wie man in jedem Lehrbuche der sphärischen Trigonometrie findet,

$$\tang \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}C^2 = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)};$$

also

$$\tang \tfrac{1}{2}A^2 \tang \tfrac{1}{2}B^2 = \left\{\frac{\sin(s-c)}{\sin s}\right\}^2,$$

$$\tang \tfrac{1}{2}A^2 \tang \tfrac{1}{2}C^2 = \left\{\frac{\sin(s-b)}{\sin s}\right\}^2,$$

$$\tang \tfrac{1}{2}B^2 \tang \tfrac{1}{2}C^2 = \left\{\frac{\sin(s-a)}{\sin s}\right\}^2.$$

---

*) In den mir zu Gebote stehenden Schriften finde ich dieselbe nirgends.

Weil nun ferner bekanntlich

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B^2=\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C^2=\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}$$

ist, und die Grössen $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ unter der Voraussetzung, dass alle Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks kleiner als 180° sind, sämmtich positiv sind; so haben die Grössen $\sin s$, $\sin(s-a)$, $\sin(s-b)$, $\sin(s-c)$ offenbar alle gleiche Vorzeichen, und die Brüche

$$\frac{\sin(s-c)}{\sin s},\ \frac{\sin(s-b)}{\sin s},\ \frac{\sin(s-a)}{\sin s}$$

sind daher sämmtlich positiv. Also ist nach dem Obigen, weil die Grössen $\tang\frac{1}{2}A$, $\tang\frac{1}{2}B$, $\tang\frac{1}{2}C$ unter der in Rede stehenden Voraussetzung sämmtlich positiv sind,

$$\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}B=\frac{\sin(s-c)}{\sin s},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin(s-b)}{\sin s},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}B\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin(s-a)}{\sin s}.$$

Folglich ist, wie man hieraus leicht findet,

$$\frac{(\tang\frac{1}{2}A\pm\tang\frac{1}{2}B)\tang\frac{1}{2}C}{1\mp\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}B}=\frac{\sin(s-b)\pm\sin(s-a)}{\sin s\mp\sin(s-c)},$$

$$\frac{(\tang\frac{1}{2}A\pm\tang\frac{1}{2}C)\tang\frac{1}{2}B}{1\mp\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(s-c)\pm\sin(s-a)}{\sin s\mp\sin(s-b)},$$

$$\frac{(\tang\frac{1}{2}B\pm\tang\frac{1}{2}C)\tang\frac{1}{2}A}{1\mp\tang\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(s-c)\pm\sin(s-b)}{\sin s\mp\sin(s-a)};$$

d. i. nach einigen bekannten goniometrischen Formeln:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A\pm B)\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{{\cos\atop\sin}\{\frac{1}{2}(a-b)\}}{{\cos\atop\sin}\{\frac{1}{2}(a+b)\}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(A\pm C)\tang\tfrac{1}{2}B=\frac{{\cos\atop\sin}\{\frac{1}{2}(a-c)\}}{{\cos\atop\sin}\{\frac{1}{2}(a+c)\}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(B\pm C)\tang\tfrac{1}{2}A=\frac{{\cos\atop\sin}\{\frac{1}{2}(b-c)\}}{{\cos\atop\sin}\{\frac{1}{2}(b+c)\}};$$

welches die erste Klasse der Neper'schen Analogieen ist.

Setzt man ferner wie gewöhnlich $2S = A + B + C$, so ist bekanntlich

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)},$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}b^2 = -\frac{\cos S \cos (S-B)}{\cos (S-A) \cos (S-C)},$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}c^2 = -\frac{\cos S \cos (S-C)}{\cos (S-A) \cos (S-B)};$$

und folglich

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a^2\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}b^2 = \left\{\frac{\cos S}{\cos (S-C)}\right\}^2,$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a^2\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}c^2 = \left\{\frac{\cos S}{\cos (S-B)}\right\}^2,$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}b^2\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}c^2 = \left\{\frac{\cos S}{\cos (S-A)}\right\}^2.$$

Weil nun

$$\sin \tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}b^2 = -\frac{\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}c^2 = -\frac{\cos S \cos (S-C)}{\sin A \sin B}$$

ist, und die Grössen $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ unter der gemachten Voraussetzung sämmtlich positiv sind; so haben $\cos (S-A)$, $\cos (S-B)$, $\cos (S-C)$ offenbar sämmtlich mit $\cos S$ entgegengesetztes Vorzeichen, die Brüche

$$\frac{\cos S}{\cos (S-C)},\quad \frac{\cos S}{\cos (S-B)},\quad \frac{\cos S}{\cos (S-A)}$$

sind daher alle negativ, und nach dem Obigen ist folglich, weil die Grössen $\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a$, $\text{tang}\ \tfrac{1}{2}b$, $\text{tang}\ \tfrac{1}{2}c$ sämmtlich positiv sind,

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}b = -\frac{\cos S}{\cos (S-C)},$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}a\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos S}{\cos (S-B)},$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}b\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos S}{\cos (S-A)};$$

woraus sich unmittelbar

$$\cot \tfrac{1}{2}a \cot \tfrac{1}{2}b = -\frac{\cos (S-C)}{\cos S},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}a \cot \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos (S-B)}{\cos S},$$

$$\cot \tfrac{1}{2}b \cot \tfrac{1}{2}c = -\frac{\cos (S-A)}{\cos S}$$

ergiebt. Folglich ist auf ähnliche Art wie oben

$$\frac{(\cot\tfrac{1}{2}a \pm \cot\tfrac{1}{2}b)\cot\tfrac{1}{2}c}{1 \mp \cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b} = -\frac{\cos(S-B) \pm \cos(S-A)}{\cos S \pm \cos(S-C)},$$

$$\frac{(\cot\tfrac{1}{2}a \pm \cot\tfrac{1}{2}c)\cot\tfrac{1}{2}b}{1 \mp \cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}c} = -\frac{\cos(S-C) \pm \cos(S-A)}{\cos S \pm \cos(S-B)},$$

$$\frac{(\cot\tfrac{1}{2}b \pm \cot\tfrac{1}{2}c)\cot\tfrac{1}{2}a}{1 \mp \cot\tfrac{1}{2}b\cot\tfrac{1}{2}c} = -\frac{\cos(S-C) \pm \cos(S-B)}{\cos S \pm \cos(S-A)};$$

woraus leicht

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(a \pm b)\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\{\tfrac{1}{2}(A-B)\}}{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\{\tfrac{1}{2}(A+B)\}},$$

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(a \pm c)\cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\{\tfrac{1}{2}(A-C)\}}{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\{\tfrac{1}{2}(A+C)\}},$$

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(b \pm c)\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\{\tfrac{1}{2}(B-C)\}}{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\{\tfrac{1}{2}(B+C)\}}$$

erhalten wird, welches die zweite Klasse der Neper'schen Analogieen ist.

G.

Unter den verschiedenen Methoden der Polhöhenbestimmung wendet der Seemann bei Weitem am Häufigsten die Beobachtung der Sonne im Mittage an. Zu dem Ende findet er sich jeden Tag, wo ihm der Zustand der Atmosphäre eine gute Beobachtung verspricht, mit seinem Sextanten auf dem Verdecke ein, und verfolgt die Sonne, bis sie in ihrer Höhe stationär geworden; in diesem Momente stellt er scharf ein, lässt von nun an die Alhidade unberührt, überzeugt sich allenfalls durch das bald darauf erfolgende Sinken der Sonne, oder Einschneiden ihres Bildes in die Linie des Meereshorizontes von dem Vorübersein des Mittags, und was sein Instrument dann angiebt, gilt ihm für die Meridianhöhe der Sonne.

Dieses fast zu praktische Verfahren erfordert ein sehr häufiges, in der Nähe der Culmination wegen der geringen Höhenänderung für das Auge äusserst anstrengendes Einstellen, und lässt, wie es in der Natur der Sache liegt, stets eine Ungewissheit von einigen Minuten über die Zeit des Mittags oder desjenigen Moments, in welchem die Beobachtung eigentlich hätte angestellt werden müssen; in der That wird jeder Astronom, der im Vereine mit anderen an Bord beobachtete, sich der kleinen Streitigkeiten erinnern, die sich immer darüber erheben, ob die Sonne noch im Steigen, oder stationär, oder wohl gar schon im Sinken begriffen sei.

In dem ersten Bande der neuen Folge der Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Wien, 1841. S. XLIX hat

Herr Adjunct Dr. C. L. v. Littrow ein Verfahren angegeben, welches bei hinreichender Einfachheit und Leichtigkeit uns wohl geeignet scheint, die obige Methode der Breitenbestimmung zur See zu grösserer Genauigkeit zu erheben, und daher jedenfalls allgemeiner bekannt zu werden verdient, weshalb wir im Folgenden unsern Lesern das Wesentliche desselben mittheilen wollen, wozu wir auch darin eine besondere Veranlassung finden, dass, wie wir glauben, wohl auch Mancher auf dem Lande dieses einfache Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung seiner Breite geeignet finden und in Anwendung bringen wird.

Zwei auf den Mittelpunkt der Erde bezogene Höhen des Mittelpunkts der Sonne seien h, h'; die entsprechenden Stundenwinkel und Declinationen der Sonne seien σ, σ' und δ, δ'; so hat man, wenn φ die Polhöhe bezeichnet, die beiden folgenden in völliger Allgemeinheit geltenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos\sigma\\ \sin h' = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\varphi\cos\sigma'\end{array}\right\}\ldots\ldots 1)$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$\sin h - \sin h' = (\sin\delta - \sin\delta')\sin\varphi$$
$$+ (\cos\delta\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma')\cos\varphi.$$

Es ist aber

$$\sin h - \sin h' = 2\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h'),$$
$$\sin\delta - \sin\delta' = 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')$$

und

$$\cos\delta\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma'$$
$$= \cos\delta\cos\sigma - \cos\{\delta + (\delta'-\delta)\}\cos\sigma'$$
$$= \cos\{\delta' + (\delta-\delta')\}\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma'$$
$$= \cos\delta\cos\sigma - \{\cos\delta\cos(\delta'-\delta) - \sin\delta\sin(\delta'-\delta)\}\cos\sigma'$$
$$= \{\cos\delta'\cos(\delta-\delta') - \sin\delta'\sin(\delta-\delta')\}\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma'$$
$$= \cos\delta\cos\sigma - \{\cos\delta - 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\}\cos\sigma'$$
$$= \{\cos\delta' - 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\}\cos\sigma - \cos\delta'\cos\sigma'$$
$$= \cos\delta(\cos\sigma - \cos\sigma') + 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)\cos\sigma'$$
$$= \cos\delta'(\cos\sigma - \cos\sigma') - 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma$$
$$= -2\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma'$$
$$= -2\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma.$$

Also ist nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')$$
$$= -\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\cos\varphi$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\{\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi - \sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma'\cos\varphi\}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')$$
$$=-\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\cos\varphi$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\,\{\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi-\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma\cos\varphi\};$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma'\cos\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi}$$
$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\sigma\cos\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}.$$

Bei der Sonne ist nun der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}$$

immer eine sehr kleine Grösse, wovon man sich leicht aus den Ephemeriden überzeugen kann, und man kann also näherungsweise, aber ohne merklichen Fehler,

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}\;\ldots\;2)$$

oder auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi}\;\ldots\;3);$$

und, wenn die absoluten Werthe von $h-h'$ und $\sigma-\sigma'$ sehr klein sind, auch näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi}\;\ldots\;4)$$

oder auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi}\;\ldots\;5)$$

setzen.

Bezeichnet jetzt φ' einen genäherten Werth der Polhöhe φ, und setzen wir $\varphi=\varphi'+\Delta\varphi'$; so ist

$$\cos\varphi=\cos\varphi'\cos\Delta\varphi'-\sin\varphi'\sin\Delta\varphi'$$
$$=\cos\varphi'(1-2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'^2)-2\sin\varphi'\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\cos\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'$$
$$=\cos\varphi'-2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'),$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\{\cos\varphi'-2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\frac{1}{2}\Delta\varphi')\}}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\{\cos\varphi'-2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\frac{1}{2}\Delta\varphi')\}};$$

also, weil die absoluten Werthe von

$$2(\sigma-\sigma')\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi')$$

oder

$$2(\sigma-\sigma')\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}\Delta\varphi'\sin(\varphi'+\tfrac{1}{2}\Delta\varphi')$$

als Grössen der zweiten Ordnung offenbar sehr klein sind, näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi'}\;\ldots\ldots 6)$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta'\cos\varphi'}\;\ldots\ldots 7)$$

Von diesen Formeln lässt sich nun die folgende Anwendung machen.

Man nehme etwa eine halbe Stunde vor Mittag zwei Höhen der Sonne, und bemerke natürlich die entsprechenden Uhrzeiten, so hat man den Bruch

$$\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'},$$

und kann nun mittelst der aus den Ephemeriden zu entnehmenden Declination δ der Sonne an dem Tage, wo die Beobachtung angestellt wird, und der genäherten Polhöhe φ' nach der Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\cos\varphi'}\;\ldots\ldots 8)$$

die Grösse $\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$ berechnen, welche in Verbindung mit der bekannten Grösse $\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$ zu der Kenntniss von σ und σ' führt, woraus man dann ferner die Zeit des Mittags, d. h. das Zeitmoment, wo man die Höhe der Sonne messen muss, um ihre Meridianhöhe zu erhalten, im Voraus berechnen kann. Bestimmt man nun zu dieser Zeit die Höhe H des Mittelpunkts der Sonne, so ist

$$\varphi=\delta-h+90^\circ \text{ oder } \varphi=\delta+h-90^\circ\;\ldots\ldots 9)$$

jenachdem φ grösser oder kleiner als δ ist.

Alle gemessene Höhen müssen natürlich, bevor sie in die Rechnung eingeführt werden, wegen Collimationsfehler, Refraction, Halbmesser der Sonne und Parallaxe gehörig corrigirt werden, um, wie es erforderlich ist, die auf den Mittelpunkt der Erde bezogenen Höhen des Mittelpunkts der Sonne zu erhalten, da auf diese beiden Punkte sich auch die in den Ephemeriden angegebenen Declinationen der Sonne beziehen, was aus den ersten Elementen der praktischen Astronomie hier als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bezeichnet p die sogenannte Horizontalparallaxe der Sonne unter dem Aequator und h die gemessene Höhe des Mittelpunkts der Sonne, so findet man die Höhenparallaxe, welche bekanntlich zu der gemessenen Höhe h addirt werden muss, mittelst des bekannten Ausdrucks $p\cos h$ für den vorliegenden Zweck hinreichend genau.

Gestattet man sich noch einige kleine Vernachlässigungen, so kann man die Formel 8) noch etwas bequemer zur Rechnung auch auf folgende Art ausdrücken. Weil nämlich h und h' immer nur

sehr wenig von einander verschieden sein werden, so kann man näherungsweise h für $\frac{1}{2}(h+h')$ setzen, wodurch die Formel 8) folgende Gestalt erhält:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\cos h}{\cos\delta\cos\varphi'}\,\ldots\,10)$$

Endlich ist aber auch, wenn man im Folgenden immer die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem φ' grösser oder kleiner als δ ist, näherungsweise

$$h=\pm(\delta-\varphi')+90^\circ,$$

und folglich $\cos h=\mp\sin(\delta-\varphi')$, also nach der Gleichung 10)

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\pm\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}\cdot\frac{\sin(\delta-\varphi')}{\cos\delta\cos\varphi'}\,\ldots\,11)$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\pm\frac{h-h'}{\sigma-\sigma'}(\tang\delta-\tang\varphi')\,\ldots\,12).$$

So einfach diese Formeln auch sind, so kann man sich die Rechnung nach denselben doch noch beträchtlich durch Tafeln erleichtern. Nimmt man nämlich, was immer in der Macht des Beobachters steht, die Zwischenzeit zwischen den beiden vor Mittage anzustellenden Beobachtungen constant, etwa 5 Minuten, und drückt den absoluten Werth der Differenz der beiden Höhen, welchen wir durch dh bezeichnen wollen, immer in Bogensecunden aus; so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\mp dh\,.\,\frac{\sin(\varphi'-\delta)}{4500\cos\delta\cos\varphi'}\,\ldots\,13)$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\mp dh\,.\,\frac{\tang\varphi'-\tang\delta}{4500}\,\ldots\,14).$$

Bringt man nun den Logarithmus der Grösse

$$A=\frac{\sin(\varphi'-\delta)}{4500\cos\delta\cos\varphi'}=\frac{\tang\varphi'-\tang\delta}{4500}\,\ldots\,15)$$

wobei wir jetzt φ' grösser als δ annehmen wolllen, in eine Tafel, deren Argumente die Polhöhe und die Declination sind, und besitzt eine zweite Tafel, welche aus dem Logarithmus des Sinus eines Bogens unmittelbar diesen Bogen in Zeit ausgedrückt giebt, so kommt die ganze Berechnung der Formel 13) oder 14) auf das Aufschlagen des Logarithmus von dh und seine Addition zu dem aus der ersten Tafel zu nehmenden $\log A$ hinaus. Auf S. LVII—LIX a. a. O. hat Herr von Littrow zwei solche Tafeln beispielsweise mitgetheilt, die erste für die Gränzen des mittelländischen Meeres, die zweite für Stundenwinkel, die eine halbe Stunde nicht übersteigen, und sagt, dass die oben ihren Grundzügen nach entwickelte Methode der Polhöhenbestimmung sich in der Praxis schon bewährt habe, bei Beobachtungen, die ein ausgezeichneter Offizier der österreichischen Marine, Herr Linienschiffs-Fähnrich Bucchia angestellt und nach dieser Methode berechnet, sich auch dadurch bewogen gefunden hat, dieselbe zu seinem eigenen Gebrauche für immer anzunehmen. Herr von Littrow fügt noch

hinzu, dass die nach der obigen Methode näherungsweise gefundene Uhrzeit des Mittags, verglichen mit der bekannten Uhrzeit des Mittags für den letzten Ort, wo man eine genaue Längenbestimmung vornahm, zu einer beiläufigen Länge des Beobachtungsorts, und dadurch auch zu der Kenntniss der Epoche, für welche man aus den Ephemeriden die Declination der Sonne zu nehmen hat, führe. Hierüber, so wie über die weitere Entwickelung der obigen Methode überhaupt, muss man aber den lesenswerthen Aufsatz des Herrn von Littrow a. a. O. selbst nachsehen.

G.

Il y a aujourd'hui à l'Institut Polytechnique de Londres une machine électrique qui est probablement la plus puissante que l'on connaisse. Le diamètre du plateau de verre est de 7 pieds, celui du conducteur de 4 pieds. La resistance du plateau contre les frotteurs est telle qu'une machine à vapeur est employée à le faire tourner. Quand la machine est fortement chargée, une étincelle traverse facilement un livre épais. La puissance d'une telle machine offre un vaste champ aux expériences de physique, et l'on doit en attendre d'intéressantes découvertes.

On connaît nombre d'exemples de pluies jaunâtres, dont on sait que la matière colorante n'est autre chose que le pollen des arbres, principalement des Pins. Ces pluies ont lieu le plus fréquemment dans les mois de mai et juin, mais elles arrivent ordinairement après des orages. Nous apprenons qu'au mois de mai 1841 il en est tombé une à Picton (Etats-Unis) pendant une nuit sereine que n'avait précédée aucun orage. Elle consistait en une poussière jaune qui fut recueillie, en grande quantité, à bord d'un vaisseau dans le port. Examinée à l'aide de puissants microscopes, par M. J. W. Bailey, elle a été reconnue pour être entièrement composée de pollen de Pin. Une autre poussière également tombée à Troy, en mai, et qu'on avait cru être des sporules de Lycopodes, a été reconnue aussi pour du pollen de Pin. L'analyse chimique en a été faite par M. Blake, qui en a retiré, par la dissolution, du nitrogène et de l'ammoniaque; l'acide hydrochlorique et l'incinération ont donné pour résidu une grande quantité de phosphate de chaux.

(l'Institut. Nr. 439. 26. Mai 1842.)

Berichtigung.

In der vierten der Formeln 10) auf Seite 46 und in der vierten der Formeln 11) auf Seite 48 ist $(-1)^{n-1}$ statt $(-1)^n$ zu setzen.

XVIII.

Vorschläge zur Vermeidung einiger fehlerhaften Ausdrücke in den mathematischen Lehrbüchern.

Von dem

Herrn Conrector Beyer

am Gymnasium zu Neustettin.

Wahrscheinlich möchte wohl schon von allen Lehrern der Mathematik bei nicht wenigen Schülern die Erfahrung gemacht sein, dass sie Producte von zwei gleich, oder ungleich benannten Zahlen bilden, wenn ihnen auch bei der Multiplication gründlich auseinandergesetzt worden ist, dass der Multiplicator als Summandenzähler nie benannt sein könne. Worin liegt nun der Grund hievon? Ohne Zweifel in dem fehlerhaften Ausdruck so mancher mathematischen Regeln und darin, dass man sich bei vielen geometrischen Beweisen die Multiplication von zwei Linien, von Linien und ebenen Figuren und dergleichen erlaubt. Möge hier die Erinnerung an die allgemeine Anwendung des nur von der geometrischen Zahlenproportion geltenden Satzes, nach welchem das Product der innern Glieder gleich dem der äusseren ist, und an die Inhaltsbestimmung der geometrischen Figuren genügen, bei welcher nur zu häufig von dem Producte der Grundlinie oder Grundfläche und der Höhe die Rede ist. Enthalten nun die Lehrbücher in ihren Lehrsätzen solche unrichtige Angaben, so können die in Anmerkungen etwa gegebenen Regeln, dass statt der benannten Zahlen und stetigen Grössen eigentlich blosse Zahlen zu denken seien, nach unsern Erfahrungen vor irrigen Auffassungen nicht genügend schützen, da ihr Inhalt von den Schülern gewöhnlich als weniger wichtig betrachtet wird. Jene Fehler lassen sich aber leicht und ohne grosse Weitläuftigkeit vermeiden.

Für die auf einfache Proportionen sich gründenden Rechnungen reicht die Regel aus, dass vor der wirklichen Berechnung des zu bestimmenden Gliedes das Verhältniss mit den bekannten Gliedern in ein Verhältniss unbenannter Zahlen verwandelt, also z. B. statt

a Pfd. : b Pfd. $= c$ Sgr. : x Sgr. die Proportion $a : b = c$ Sgr : x Sgr. gebildet werden müsse, aus welcher x Sgr. $= \frac{b \cdot c}{a}$ Sgr. als der Werth von b Pfd. sofort hervorgeht.

Bei den mit Hülfe der Zusammensetzung von Verhältnissen auszuführenden Rechnungen müssen aber zunächst alle Verhältnisse lauter unbenannte Zahlen enthalten, und es ist erst in der durch die Zusammensetzung entstandenen Proportion in dem Verhältnisse, welches die unbekannte Zahl enthält, die erforderliche Benennung hinzuzufügen.

Für die Auflösung von Gleichungen ist, wenn anders Aufgaben mit benannten Zahlen gegeben sind, nach der Bildung der Gleichungen die Weglassung der Benennungen zu empfehlen, welche so lange fehlen können, bis die Unbekannten berechnet sind.

In der Geometrie ist es bei der Inhaltsbestimmung, so wie bei der Berechnung unbekannter Grössen aus gegebenen zu tadeln, wenn für die räumlichen Grössen allgemeine Zeichen, wie g, h, r, p, k u. s. w. eingeführt, und solche bald als benannte, bald als unbenannte Zahlen, wie z. B. in der Formel $f = r^2 \pi$ gebraucht werden. Um diesen Fehler zu vermeiden, ist es angemessen, hier eine bestimmte Benennung z. B. Fuss als allgemein geltendes Maass anzunehmen, und mithin die Grösse der Linien durch g', h', r', die der Flächen durch $a^{\Box'}$, $f^{\Box'}$ und die der Körper durch $p^{c'}$, $k^{c'}$, oder auf eine andere noch zweckmässigere Art auszudrücken, und beim Rechnen die Benennungszeichen da, wo es erforderlich ist, stets wegzulassen. Wird die angegebene Bezeichnungsart gewählt, so können auch in der Trigonometrie bei der Berechnung der Dreiecke nicht mehr solche unrichtige Gleichungen, wie $\log AB = \log AC + \log \sin C - \log \sin B$ und ähnliche vorkommen, wo für $\log AB$ und $\log AC$ geschrieben werden muss $\log c$ und $\log b$, vorausgesetzt, dass c und b blosse Zahlen sind. Ein ähnlicher Fehler, wie der zuletzt gerügte, kommt auch in der zusammengesetzten Zinsrechnung vor, indem man hier gewöhnlich das Kapital $= a$, oder $= c$ setzt, so dass a und c benannte Zahlen vorstellen, und dann den Ausdruck $a \cdot (1 + \frac{z}{100})^n$, in welchem überdiess noch der Multiplicator benannt ist, durch Logarithmen berechnet, woraus man consequent schliessen könnte, dass es auch Logarithmen benannter Zahlen gäbe.

Bei den geometrischen Beweisen können die Zusammensetzungen der Proportionen umgangen werden, sobald nur in den Lehrsätzen die Ausdrücke zusammengesetztes Verhältniss, oder Product stetiger Grössen vermieden sind, wenn zuvor folgende zwei Sätze, welche mit ihren Beweisen hier eine Stelle finden mögen, erwiesen sind, und, wo es irgend thunlich ist, rein geometrische Beweise gegeben werden.

1. Sind A, B, E, F, so wie C, D, G, H gleichartige Grössen, und ist zugleich $A : B = C : D$ und $E : F = G : H$, so ist auch $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$.

Beweis. Es sei M für A, B, E, F, und N für C, D, G, H gemeinschaftliches Maass und zwar $A = a \cdot M$, $B = b \cdot M$; $C = a \cdot N$, $D = b \cdot N$; $E = c \cdot M$, $F = f \cdot M$; $G = e \cdot N$,

$H = f \cdot N$; dann ist $\frac{A}{E} = \frac{a}{e}$, $\frac{B}{F} = \frac{b}{f}$, $\frac{C}{G} = \frac{a}{e}$ und $\frac{D}{H} = \frac{b}{f}$; aber es ist $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{a}{e} : \frac{b}{f}$, folglich auch $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$.

2. Sind A, B, C, D gleichartige Grössen, und ist $A : B = C : D$, so ist auch $A : C = B : D$.

Beweis. Da $A : B = C : D$ und auch $C : D = C : D$, so ist nach 1. auch $\frac{A}{C} : \frac{B}{D} = 1 : 1$, also $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$, oder $A : C = B : D$.

Zur Rechtfertigung der hier aufgestellten Behauptung sollen im Folgenden die in der sechsten Ausgabe des Grundrisses von Lorenz vorkommenden unrichtigen geometrischen Sätze und Beweise so gefasst werden, wie man es von der Mathematik mit Recht fordern darf. Zunächst muss §. 195. so lauten:

Zwei schiefwinklige Parallelogramme verhalten sich, wie die Rechtecke aus ihren Grundlinien und Höhen.

Der Beweis für diesen Satz erhellet sogleich, da die Rechtecke den Parallelogrammen gleich sind.

Vor demselben könnte aber noch folgender eingeschaltet werden:

Zwei Rechtecke verhalten sich, wie die Producte aus den Maasszahlen *) ihrer Grundlinien und Höhen.

Um letzteren zu beweisen, muss freilich schon die Ausmessung eines Rechtecks gelehrt sein, allein diese Lehre möchte auch unmittelbar hinter den Abschnitten, welche von der Verwandlung ebener Figuren in Rechtecke und Quadrate und von dem Maasse der stetigen Grössen handeln, die passendste Stellung finden.

Die Sätze in §. 196. und §. 198. können auf folgende Art ausgedrückt werden:

§. 196. Zwei Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen der Maasszahlen ihrer Seiten.

§. 198. Zwei Parallelogramme, wie auch zwei Dreiecke, in denen ein Winkel gegenseitig gleich ist, verhalten sich wie die Rechtecke aus den diesen Winkel einschliessenden Seiten.

Beweis. Da die Parallelogramme einen Winkel gleich haben, so kann man sie so aneinander legen, dass die gleichen Winkel Scheitelwinkel werden. Es seien also (Taf. II. Fig. 3.) die beiden Parallelogramme AC und AF die gegebenen. Um nun den Satz zu erweisen, construire man aus AB und AD,

---

*) Wie zweckmässig es sei, nicht nur die Grösse, mit welcher zu messen ist, sondern auch diejenige Zahl besonders zu benennen, welche angiebt, wie oft jene in der zu messenden Grösse enthalten ist, wird wohl von Niemand in Zweifel gestellt, und daher gebraucht Ohm das Wort Gemäss für die erstere Grösse, und das Wort Maass für die Zahl, welche bestimmt, wie oft das Gemäss zu nehmen sei. Dieser Gebrauch dürfte aber schwerlich zu billigen sein, da das Wort Maass sprachlich nicht eine Zahl, welche zählt, bedeuten kann. Uns scheint hiefür das Wort Maasszahl das angemessenste zu sein.

so wie aus AE und AG die Rechtecke AH und AI, und verlängere FG und BC, bis sie sich in K, und FN und BH, bis sie sich in L treffen. Jetzt ist $AC:AK=AD:AG$ und $AF:AK=AE:AB$, ebenso ist $AH:AL=AD:AG$, weil $AD=AM$ und $AG=AN$ ist, und $AF:AL=AE:AB$, folglich ist $AC:AK=AH:AL$ und $AF:AK=AI:AL$, und hieraus folgt durch Division $\frac{AC}{AF}:1=\frac{AH}{AI}:1$, also auch $AC:AF=AH:AI$, w. z. e. w.

Der Beweis für die Dreiecke ist dem vorstehenden ähnlich.

Die Beweise zu den Sätzen in §. 220. und 222. lassen sich richtiger so führen:

§. 222. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Beweis. Ist (Taf. II. Fig. 4.) $\triangle ABC \backsim \triangle abc$, und sind AD und ad Quadrate über den ähnlich liegenden Seiten AB und ab, so soll $\triangle ABC:\triangle abc=AD:ad$ sein. Man mache $AF=AC$ und $af=ac$, und ziehe FG parallel AB, so wie fg parallel ab, so ist $AG:AD=AF:AE=AC:AB$, und $ag:ad=ac:ab$. Nach der Voraussetzung ist aber $AC:AB=ac:ab$, folglich hat man $AG:AD=ag:ad$ und daher auch $AG:ag=AD:ad$. Da nun nach §. 198. $\triangle ABC:\triangle abc=AG:ag$, so ist auch $\triangle ABC:\triangle abc=AD:ad$.

§. 220. Von drei stetig proportionirten Linien wie (Taf. II. Fig. 5.) AD, CD, BD in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC verhält sich die erste zur dritten, wie das Quadrat der ersten zu dem der zweiten, also $AD:BD=AD^q:CD^q$.

Beweis. Es ist $\triangle ACD:\triangle BCD=AD:BD$, wegen ihrer gemeinschaftlichen Höhe CD, ferner ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $\triangle ACD:\triangle BCD=AD^q:CD^q$, folglich ist auch $AD:BD=AD^q:CD^q$.

Vermittelst des §. 222. kann leicht folgender Satz bewiesen werden.

Sind vier Linien proportionirt, so sind auch ihre Quadrate proportionirt.

Beweis. Es seien die vier Linien durch A, B, C, D bezeichnet und $A:B=C:D$. Man construire aus A und C und einem beliebigen Winkel, und ebenso aus B und D und demselben Winkel zwei Dreiecke, welche ähnlich sein werden, und daher sich sowohl wie $A^q:B^q$, als auch wie $C^q:D^q$ verhalten, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

Nach dem Gesagten ist leicht einzusehen, wie die stereometrischen Sätze in den §§. 320. 321. 323. 333. 341. 351. und 375. richtiger auszudrücken und zu beweisen sind. Daher soll hier bloss der Satz in §. 323. besonders betrachtet werden. Er muss lauten:

Zwei ähnliche Prismen verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Um ihn gehörig beweisen zu können, ist es nöthig folgende zwei Sätze voraufgehen zu lassen.

1. Aehnliche Parallelepipeda verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten. Ist (Taf. III. Fig. 1.) $AG \backsim ag$ und sind AD und ad ähnlich liegende Seiten, so soll $AG : ag = AD^c : ad^c$ sein.

Beweis. 1. Sind AG und ag rechtwinklige Parallelepipeda, also ihre Grundflächen AC und ac Rechtecke, so construire man über AD und ad die Quadrate AI und ai und über letzteren die Würfel AM und am, deren obere Seitenflächen LM und lm, durch die Parallelepipeda erweitert, die Rechtecke MN und mn geben. Bezeichnet man nun die ähnlichen Parallelepipeda AG, ag mit P, p, die Würfel AM, am mit W, w, und die an diesen liegenden Parallelepipeda BM, bm mit A, a, so verhält sich wegen gleicher Höhe $W : (W + A) = AI : AC = AK : AB = AD : AB$ und $w : (w + a) = ad : ab$, und wegen gemeinsamer Grundfläche $P : (W + A) = AE : AL = AE : AD$ und $p : (w + a) = ae : ad$. Da nun aber wegen der Aehnlichkeit von P und p sich $AD : AB = ad : ab$ und $AE : AD = ae : ad$ verhält, so ist auch $W : (W + A) = w : (w + a)$ und $P : (W + A) = p : (w + a)$, folglich durch Verwechselung der mittlern Glieder $W : w = (W + A) : (w + a)$ und $P : p = (W + A) : (w + a)$, und daher $P : p = W : w = AD^c : ad^c$.

Sollte bewiesen werden, dass $P : p = AB^c : ab^c$ sei, so würde der Beweis dem voraufgehenden ganz ähnlich sein, nur müsste $W - A$ und $w - a$ statt $W + A$ und $w + a$ geschrieben werden.

2. Sind aber die Parallelepipeda AG und ag nicht rechtwinklig, so verwandle man sie in rechtwinklige und zwar so, dass AD und ad in diesen ebenfalls ein Paar ähnlich liegende Seiten werden. Dann verhalten sich diese, weil sie ebenfalls ähnlich sind, nach 1. wie $AD^c : ad^c$, da sie aber beziehlich mit AG und ag gleich sind, so muss auch $AG : ag = AD^c : ad^c$ sein.

2. Sind vier Linien A, B, C, D proportionirt, so sind auch ihre Würfel proportionirt, ist also $A : B = C : D$, so ist auch $A^c : B^c = C^c : D^c$.

Beweis. Man construire aus den Linien A, B, C, D zwei ähnliche Rechtecke, so dass A, B, und C, D ähnlich liegende Seiten werden, und beschreibe über den Rechtecken zwei ähnliche Parallelepipeda P, p, so ist nach dem ersten Satze $P : p = A^c : B^c$ und auch $P : p = C^c : D^c$, woraus $A^c : B^c = C^c : D^c$ folgt.

Nun lässt sich der vorhin über das Verhältniss ähnlicher Prismen aufgestellte Lehrsatz folgendermassen beweisen.

1. Die ähnlichen Prismen seien P, p, und es soll bewiesen werden, dass sie sich verhalten wie die Würfel von einem Paar ähnlich liegender Seiten der Grundflächen S, s, also wie $S^c : s^c$. Da sich jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit einer gegebenen Seitenlinie verwandeln lässt, so kann man statt der Prismen P, p zwei ihnen gleiche Parallelepipeda G, g setzen,

welche rechtwinklig und einander ähnlich *) sind, und die Kanten S, s ebenfalls zu ähnlich liegenden Seiten haben. Dann ist nach dem ersten bewiesenen Satze $G : g = S^c : s^c$, da aber $G = P$ und $g = p$, so muss auch $P : p = S^c : s^c$ sein.

2. Wird aber behauptet, dass die Prismen sich verhalten wie die Würfel von solchen ähnlich liegenden Seitenlinien A, a, welche nur zu den Seitenflächen gehören, so folgt die Richtigkeit der Behauptung aus dem unmittelbar vorher bewiesenen Satze. Denn nach 1. ist $P : p = S^c : s^c$, aber $S^c : s^c = A^c : a^c$, weil nach der Voraussetzung $S : s = A : a$ ist, folglich auch $P : p = A^c : a^c$.

Noch möge hier der Beweis eines stereometrischen Satzes eine Stelle finden, um die weitere Anwendung des oben bewiesenen Satzes 1. zu zeigen.

Zwei Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (Vergl. Matthias Leitfaden §. 272.).

Beweis. 1. Sind die Prismen dreiseitig, so folgt der Satz leicht aus dem, dass zwei Parallelepipeda von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten.

2. Ist aber das eine Prisma, P, über der Grundfläche G dreiseitig, und das andere, Q, über der Grundfläche F viel- z. B. fünfseitig, so lässt sich letzteres in drei dreiseitige A, B, C über den Grundflächen H, I, K zerlegen, und es ist dann nach 1. $A : B = H : I$, daher $(A + B) : B = (H + I) : I$, auch ist $C : B = K : I$, folglich durch Division $\frac{A+B}{C} : 1 = \frac{H+I}{K} : 1$, also $(A + B) : C = (H + I) : K$, und daher wieder $(A + B + C) : C = (H + I + K) : K$. Auch ist $P : C = G : K$, folglich $\frac{A+B+C}{P} : 1 = \frac{H+I+K}{G} : 1$, und daher $Q : P = F : G$, w. z. e. w.

3. Sind beider Prismen P und Q Grundflächen F und G vielseitige Figuren, so sei R ein dreiseitiges Prisma über der Grundfläche H und von gleicher Höhe mit den beiden ersten. Dann ist nach 2. $P : R = F : H$ und $Q : R = G : H$, folglich $\frac{P}{Q} : 1 = \frac{F}{G} : 1$, und daher $P : Q = F : G$.

---

*) Bezeichnet man von den Parallelepipeden die Rechtecke, welche den Grundflächen der Prismen gleich sind, mit R und r, so ist, da diese Grundflächen sich wie $Sq : sq$ verhalten, $R : r = Sq : sq$, und drückt man noch die andern Seiten jener Rechtecke durch B und b aus, so ist $R : Sq = B : S$ und $r : sq = b : s$, folglich $\frac{R}{r} : \frac{Sq}{sq} = \frac{B}{b} : \frac{S}{s}$, aber $\frac{R}{r} = \frac{Sq}{sq}$, mithin ist auch $B : b = S : s$ und daher $R \infty r$. Da nun auch die Höhen der Parallelepipeden wie $S : s$, also nach dem so eben Bewiesenen auch wie $B : b$ sich verhalten, so sind die Parallelepipeda ähnlich.

XIX.

Aufgaben zur Anwendung des Variationskalkuls.

Von dem

Herrn Dr. G. Strauch

Lehrer der Mathem. an d. Erziehungsanstalt zu Lenzburg im Kanton zu Aargau.

(Ich lege hier dem Publikum einige Probleme aus einem grösseren Werke vor. Jede Bemerkung, jeder gegründete Tadel, u. s. w. wird, je eher man damit kommt, mit desto grösserem Danke angenommen werden).

Es ist bekannt, dass schon, ehe Lagrange den Variationskalkul erfunden hatte, einige dahin gehörige Probleme aufgestellt, und so, wie es bei dem damaligen Mangel einer Methode geschehen konnte, d. h. auf eine höchst unvollständige Weise, gelöst waren. Euler fügte den bereits vorhandenen Problemen noch viele hinzu, und versuchte es, eine Methode zu deren Auflösung zu geben. Dieses geschah in seinem berühmten Werke: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannae et Genevae anno 1744. 4.

Später erfand Lagrange den Variationskalkul, und so zeigte sich nicht nur, dass die in dem besagten Euler'schen Werke angewendete Methode gar keine Methode sei, sondern auch, dass in demselben aus den vielen Gattungen von Problemen nur eine einzige Gattung repräsentirt, die Probleme selbst aber immer noch höchst unvollständig gelöst seien. (Man denke namentlich daran, dass bei allen diesen Auflösungen die Gränzgleichungen fehlen, und dass das Mittel mangelt, wodurch man entscheiden kann, ob ein Grösstes oder Kleinstes, oder keines von beiden stattfinde, u. s. w.).

Euler ergriff nun die Lagrange'sche Erfindung, und bearbeitete sie auf eigene Weise; und seine neueste darüber geschriebene Abhandlung ist als Muster anerkannt (Novi Comm. Acad. Petrop. Tom. XVI. pag. 35—70).

Neben den Bearbeitungen des Variationskalkuls, welche wir von Euler und Lagrange besitzen, müssen vorzüglich diejenigen beachtet werden, welche wir von Martin Ohm besitzen. Sie sind eine erfreuliche Zugabe zu dem, was seine Vorgänger geleistet haben (Man sehe: Lehre des Grössten und Kleinsten. Berlin 1825. Höhere Mathematik in zwei Bänden. Leipzig 1839. System der Mathematik. Berlin 1828—1833).

Ungeachtet dieser vortrefflichen theoretischen Bearbeitungen ist aber die Kenntniss des Variationskalkul's noch so wenig verbreitet, dass die grössere Anzahl der Mathematiker denselben nur dem Namen nach kennt. Worin mag diese Thatsache ihren Grund haben? Etwa darin, dass solche Männer, wenn sie bei den Stufen der höchsten Höhe ihrer Wissenschaft angelangt sind, die Kraft nicht mehr haben, auch diese zu besteigen? Letztere Frage muss jedenfalls verneinend beantwortet, und der wahre Grund, dass die Kenntniss des Variationskalkuls noch so wenig verbreitet ist, darin gesucht werden, dass es den abstrakten mathematischen Theorien, wenn man ihnen nicht mit praktischen Anwendungen zur Seite steht, eben so ergeht, wie es etwa einer in wissenschaftlicher Strenge abgefassten Aesthetik ergehen würde, wenn keine Kunstwerke auf der Welt wären.

Ich habe es unternommen, für die Anwendung des Variationskalkuls Probleme zu bilden und aufzulösen, und dadurch dem angehenden Analytiker Gelegenheit zu bieten, sich in allen Operationen der höheren Analysis zu üben. Diese Probleme, wenn ich gleich selten mehr als drei von einerlei Art gebildet habe, sind zu einer sehr bedeutenden Anzahl angewachsen, und sie machen zusammen ein ausgedehntes Werk aus. Ich lege dem mathematischen Publikum einige dieser Probleme als Probe vor; ob ich grade die interessantesten vorlege, will ich nicht entscheiden, da das, was man interessant nennt, nur Geschmackssache ist. Zunächst mögen Probleme über das Grösste und Kleinste folgen. Diese habe ich in drei Abtheilungen gebracht.

Die erste Abtheilung enthält Probleme, die nur auf Urfunktionen führen. Diese musste ich alle selbst zusammensetzen und ausführen. Ich will, wenn gleich diese höchst instruktiv sind, und wegen ihrer Neuheit auch Interesse finden werden, hier in diesem Archive doch nur einige der einfachsten mittheilen, weil man einmal gewohnt ist beim Variationskalkul auch jedesmal zu integriren.

Die zweite Abtheilung enthält Probleme, welche auf Ausdrücke führen, in denen noch Differentiale eingehen. Die hierher gehörige Theorie hat Lagrange (m. s. z. B. die Crelle'sche Uebersetzung der Lagrange'schen Werke. Bd I. S. 495. 498) nur angedeutet, und ihre Ausbildung verdanken wir Martin Ohm (man sehe z. B. dessen Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208—244). Probleme, welche in diese zweite Abtheilung gehören, gibt es bis jetzt nur fünf. Das eine davon ist von Lagrange, und findet sich z. B. in der Crelle'schen Uebersetzung. Bd. I. Seite 495. Ein zweites findet sich in Francoeur's Cours complet de mathématiques pures; Bd. II. Drei andere finden sich in Ohm's System. Bd. VII. Anhang II. Aufgabe 1, 5 und 6; die Aufgaben 2, 3, und 4 ebendaselbst sind weiter nichts, als drei verschiedene Fälle des so eben erwähnten von Lagrange gegebenen Problem's. Von dergleichen Problemen will ich viele mittheilen, da sie wegen ihrer Neuheit gewiss Interesse finden werden, und da sie höchst instruktiv sind, in welcher Hinsicht ich hier nur auf den einzigen Umstand aufmerksam mache, dass dabei fast immer mehr Gleichungen zu erfüllen sind, als unbekannte Stücke vorkommen.

Die dritte Abtheilung enthält Probleme, welche auf Ausdrücke führen, in denen noch Integrale eingehen. In diese Abtheilung gehört die Gattung der in **Euler's** oben genanntem Werke (**Methodus inveniendi u. s. w.**) enthaltenen Probleme. Allerdings haben **Lagrange** und **Ohm** einige in diese Abtheilung gehörige und sehr schätzenswerthe Beiträge geliefert; allein das hier zu bearbeitende Feld ist so ungeheuer, dass die von mir gemachten Zugaben allein soviel betragen, als die beiden ersten Abtheilungen zusammen. Diese Zugaben brauche ich aber hier nicht aufzuzählen, da ich ja im Begriffe bin, die Probe dem Publikum vorzulegen. Ich werde bei jedem einzelnen Probleme der dritten Abtheilung Gelegenheit nehmen auf das, was mein Eigenthum ist, aufmerksam zu machen.

Obgleich ich aber hier in diesem Archive nur Probleme mittheilen will, so muss ich doch wegen der mir angehörigen Eigenthümlichkeiten noch einige Bemerkungen vorausschicken, sowohl über den Variationskalkul überhaupt, als auch über das Grösste und Kleinste; und ich will mit einer, wie mir scheint, erschöpfenden Definition des Variationskalkuls beginnen. Der Sachkenner wird dabei ersehen, auf welche Grundlage ich baue.

Der Variationskalkul ist derjenige Zweig der höheren Analysis, welcher, wenn man Funktionen in andere Funktionen übergehen lässt, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersucht, und anwenden lehrt.

Der Variatioskalkul unterscheidet sich also wesentlich vom Differenzenkalkul; denn dieser ist bekanntlich derjenige Zweig der höheren Analysis, welcher, während das eigentliche Wesen der Funktionen ungestört bleibt, nur die Werthe der in den Funktionen befindlichen absolut unabhängigen Veränderlichen in andere Werthe übergehen lässt, und die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersucht und anwenden lehrt.

Unter die Aufgaben des Variationskalkul's gehört z. B. die Behandlung der Fälle, wo die Funktionen, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, das Gesuchte sind, wo also die Untersuchung selbst von ganz unbekannten Funktionen ausgeht.

Die der eben besagten Aufgabe des Variationskalkul's analoge Aufgabe des Differenzenkalkul's ist die Behandlung der Fälle, wo die den in bestimmt gegebenen Funktionen befindlichen absolut unabhängigen Veränderlichen beizulegenden Werthe, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, das Gesuchte sind, wo also die Untersuchung von noch unbekannten Werthen der in bestimmt gegebenen Fnnktionen befindlichen Veränderlichen ausgeht.

Wenn eine Funktion in eine andere übergeht, so sagt man: „**sie wird variirt;**" die Funktion selbst, welche variirt wird, wird **variable Funktion**, und der Unterschied zwischen der neuen und ursprünglichen Funktion wird **Variation** genannt. Wenn eine variable Funktion als einziges Element betrachtet wird, so nennt man sie einen variablen Veränderlichen. Man kommt nun zu folgenden Unterscheidungen:

A. Eine Funktion erleidet eine **einfache** Variation, wenn dabei die nichtvariablen Veränderlichen keine Werthänderung erleiden. Die einfachen Variationen sind aber von zweierlei Art:

1) Eine Funktion wird gradezu für sich allein und unabhängig von andern Funktionen variirt; und eine solche einfache Variation nennt man eine **unmittelbare einfache**.

2) Eine Funktion wird dadurch einfach variirt, dass eine andere, von welcher sie abhängt, einfach variirt wird, oder dass mehrere andere, von welchen sie abhängt, einfach variirt werden; und eine solche einfache Variation nennt man eine **mittelbare einfache**.

B. Eine Funktion erleidet eine **zusammengesetzte Variation**, wenn die nichtvariablen Veränderlichen auch zugleich Werthänderungen erleiden. Die zusammengesetzten Variationen sind aber gleichfalls von zweierlei Art:

1) Eine Funktion wird gradezu für sich allein und unabhängig von andern variablen Funktionen zusammengesetzt variirt; und eine solche zusammengesetzte Variation nennt man eine **unmittelbare zusammengesetzte**.

2) Eine Funktion wird dadurch zusammengesetzt variirt, dass eine andere, von welcher sie abhängt, zusammengesetzt variirt wird, oder dass mehrere andere, von welchen sie abhängt, zusammengesetzt variirt werden; und eine solche zusammengesetzte Variation nennt man eine **mittelbare zusammengesetzte**.

Hiermit ist die Idee des Variationskalkul's vollkommen ausgesprochen. Bei der elementaren Klarheit dieser Idee sind wir uns jedesmal bewusst, wann wir unbedingte Freiheit in den Operationen haben, und letztere nach einem zu erreichenden Zwecke einrichten können, und wann wir gezwungen sind, die Operationen den jedesmal obwaltenden Umständen zu unterwerfen und zu überlassen.

A. *Einfache Variationen.*

1) **Unmittelbare einfache Variationen.** Wenn eine Funktion $y=\varphi x$ in eine andere $y+\Delta y=\psi x$ übergeht, so führt man ein weiteres Element x, welches von allen andern in ψx enthaltenen Elementen unabhängig ist, und von welchem wiederum alle in ψx enthaltenen Elemente unabhängig sind, in die neue Funktion ψx so ein, dass sie sich mittelst des Maclaurin'schen Satzes in folgende Reihe entwickeln lässt:

$$\text{I)}\quad y+\Delta y=\varphi x+x\,.\,\delta\varphi x+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2\varphi x+\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$\text{II)}\quad y+\Delta y=y+x\,.\,\delta y+\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2 y+\ldots\ldots\ldots$$

Die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, u. s. w. sind, wie man sieht, als Funktionen von x zu betrachten.

Wozu aber dieses fremdartige Element x? — Warum grade die nach lauter positiven ganzen Potenzen des x aufsteigende Reihe? — Was hat man mit diesem fremdartigen Elemente x am Ende aller Operationen anzufangen? — Wenn bei jedem beliebigen Werthe des x der Werth des neuen Ausdruckes ψx dem Werthe des ursprünglichen Ausdruckes φx unmittelbar anliegt; so muss das x in ψx so eingeführt sein, dass die specielle Bedeutung,

welche man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem x beilegen muss, ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist. Warum muss grade das x diese Bedeutung haben? — Ist es immer möglich, das x so in die neue Funktion einzuführen? — Mit der Beantwortung dieser Fragen steht und fällt die ganze Theorie der unmittelbaren einfachen Variationen.

Wenn eine Funktion $y = \varphi(x, w)$ in eine andere $y + \Delta y = \psi(x, w)$ übergeht, so hat man auch hier in $\psi(x, w)$ das Element x so einzuführen, dass sich mittelst des Maclaurin'schen Satzes folgende Reihe

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, w) + x \,.\, \delta\varphi(x, w) + \frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2\varphi(x, w) + \ldots\ldots$$

oder

$$\text{IV)}\quad y + \Delta y = y + x \,.\, \delta y + \frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2 y + \ldots\ldots\ldots$$

ergiebt. Hier wiederholen sich die bereits gestellten Fragen. Die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, u. s. w. sind, wie man sieht, als Funktionen von x und w zugleich zu betrachten.

Auf ganz gleiche Weise hat man zu verfahren, wenn $y = \varphi(x, w, v)$ übergeht in $y + \Delta y = \psi(x, w, v)$.

Und so fort.

In der Reihe II), IV) u. s. w. wird Δy die Gesammtvariation, dagegen die einzelnen Glieder $x \,.\, \delta y$, $\frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2 y$, u. s. w. werden bezüglich erster, zweiter, u. s. w. Variationstheil, und die Koefficienten δy, $\delta^2 y$, u. s. w. werden bezüglich erster, zweiter, u. s. w. Variationskoefficient genannt.

2) Mittelbare einfache Variationen. Sobald die Theorie der unmittelbaren einfachen Variationen begründet ist, hat die der mittelbaren keinen Anstand. Das Entwickelungsmittel ist der Maclaurin'sche Lehrsatz.

B. *Zusammengesetzte Variationen.*

1) Unmittelbare zusammengesetzte Variationen. Wenn eine Funktion $y = \varphi x$ übergeht in $y + (\Delta) y = \psi(x + Dx)$, wo Dx eine blosse Werthänderung des nichtvariablen Veränderlichen x ist; so geht die Reihe I) über in

$$\text{V)}\quad y + (\Delta) y = \varphi(x + Dx) + x \,.\, \delta\varphi(x + Dx) + \frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2\varphi(x + Dx) + \ldots\ldots$$

Um aber die zusammengesetzten Variationen gleichfalls durch den Maclaurin'schen Satz entwickeln zu können, setze man statt der Werthänderung Dx die Reihe

$$\text{VI)}\quad x \,.\, \vartheta x + \frac{x^2}{1\,.\,2} \,.\, \vartheta^2 x + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

Warum aber diese Reihe? — Wäre es nicht hinreichend, statt der Werthänderung Dx blos das Produkt $x \,.\, \vartheta x$ zu setzen? — In welchen Fällen genügt dieses Produkt, und in welchen Fällen ist die Reihe VI) nöthig? — Mit der Beantwortung dieser Fragen steht und fällt die Theorie der unmittelbaren zusammengesetzten Variationen. Setzt man nun die Reihe VI. an die Stelle

des Dx in der Reihe V. überall ein, und entwickelt man mittelst des Maclaurin'schen Satzes; so bekommt man folgende Reihe:

$$\text{VII)}\quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = y + x\,.\,{}_{(}\delta_{)}y + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,{}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,{}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

wo

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}y = \delta\varphi x + \frac{d\varphi x}{dx}\,.\,\vartheta x = \delta y + \frac{dy}{dx}\,.\,\vartheta x$$

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2\varphi x + 2\,.\,\frac{d\delta\varphi x}{dx}\,.\,\vartheta x + \frac{d^2\varphi x}{dx^2}\,.\,\vartheta x^2 + \frac{d\varphi x}{dx}\,.\,\vartheta^2 x$$

$$= \delta^2 y + 2\,.\,\frac{d\delta y}{dx}\,.\,\vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2}\,.\,\vartheta x^2 + \frac{dy}{dx}\,.\,\vartheta^2 x$$

u. s. w. u. s. w. Die zusammengesetzte Gesammtvariation wird hier mit ${}_{(}\Delta_{)}y$, und der erste, zweite u. s. w. zusammengesetzte Variationskoefficient wird hier bezüglich mit ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, u. s. w. bezeichnet. Ich habe die Klammern desshalb gewählt, weil sie überhaupt an zusammengesetzte Ausdrücke erinnern. Die mit Dx bezeichnete Werthänderung mag Gesammtdifferenz, die in der Reihe VI. befindlichen Glieder $x\,.\,\vartheta x$, $\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2 x$, u. s. w. mögen Differenztheile, und die Koefficienten ϑx, $\vartheta^2 x$, u. s. w. mögen bezüglich erster, zweiter, u. s. w. Differenzkoefficient genannt werden.

Wenn $y=\varphi(x, w)$ übergeht in $y+{}_{(}\Delta_{)}y=\psi(x+Dx, w+Dw)$, wo Dx und Dw blosse Werthänderungen der nichtvariablen Veränderlichen x und w sind; so geht die Reihe III. über in

$$\text{X)}\quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = \varphi(x + Dx,\ w + Dw) + x\,.\,\delta\varphi(x + Dx,\ w + Dw)$$

$$+ \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\delta^2\varphi(x + Dx,\ w + Dw) + \ldots\ldots\ldots$$

Um aber auch diese zusammengesetzte Variation mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickeln zu können, setze man statt Dx und Dw bezüglich die Reihen

$$\text{XI)}\quad x\,.\,\vartheta x + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2 x + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{XII)}\quad x\,.\,\vartheta w + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,\vartheta^2 w + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\vartheta^3 w + \ldots\ldots\ldots$$

Setzt man diese Reihen wirklich statt Dx und Dw in die Reihe X. überall ein, und entwickelt man mittelst des Maclaurin'schen Satzes; so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = y + x\,.\,{}_{(}\delta_{)}y + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,{}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,{}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

wo

$$\text{XIV)}\quad {}_{(}\delta_{)}y = \delta\varphi(x, w) + \frac{d_x\varphi(x, w)}{dx}\,.\,\vartheta x + \frac{d_w\varphi(x, w)}{dw}\,.\,\vartheta w$$

$$= \delta y + \frac{d_x y}{dx}\,.\,\vartheta x + \frac{d_w y}{dw}\,.\,\vartheta w$$

$$\text{XV)}\quad (\delta)^2 y = \delta^2\varphi(x, w) + 2 \,.\, \frac{d_x\delta\varphi(x, w)}{dx} \,.\, \vartheta x + 2 \,.\, \frac{d_w\delta\varphi(x, w)}{dw} \,.\, \vartheta w$$

$$+ \frac{d_x{}^2\varphi(x, w)}{dx^2} \,.\, \vartheta x^2 + 2 \,.\, \frac{d_x d_w\varphi(x, w)}{dx \,.\, dw} \,.\, \vartheta x \,.\, \vartheta w$$

$$+ \frac{d_w{}^2\varphi(x, w)}{dw^2} \,.\, \vartheta w^2$$

$$+ \frac{d_x\varphi(x, w)}{dx} \,.\, \vartheta^2 x + \frac{d_w\varphi(x, w)}{dw} \,.\, \vartheta^2 w$$

$$= \delta^2 y + 2 \,.\, \frac{d_x\delta y}{dx} \,.\, \vartheta x + 2 \,.\, \frac{d_w\delta y}{dw} \,.\, \vartheta w + \frac{d_x{}^2 y}{dx^2} \,.\, \vartheta x^2$$

$$+ 2 \,.\, \frac{d_x d_x y}{dx . dw} \,.\, \vartheta x \,.\, \vartheta w + \frac{d_w{}^2 y}{dw^2} \,.\, \vartheta w^2 + \frac{d_x y}{dx} \,.\, \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \,.\, \vartheta^2 w$$

u. s. w.

2) Mittelbare zusammengesetzte Variationen. Sobald die Theorie der unmittelbaren zusammengesetzten Variationen begründet ist, hat die der mittelbaren keinen Anstand. Das Entwickelungsmittel ist der Maclaurin'sche Satz.

Das Grösste und Kleinste. Diese Aufgabe ist eine doppelte. Ich will den einfachsten Fall hier vornehmen.

Es sei $U = f(x, y)$, wo y ein variabler, dagegen x ein nichtvariabler Veränderlicher ist; und man sucht für y eine solche Funktion φx, dass dann bei jedem beliebigen Werthe des x der Werth des Ausdruckes $U = f(x, \varphi x)$ grösser oder kleiner wird, als es der Fall sein kann, wenn man an die Stelle des y alle diejenigen Funktionen setzt, deren Werthe bei jedem beliebigen Werthe des x dem Werthe der Funktion φx unmittelbar anliegen. Ein solches Grösstes oder Kleinstes, welches durch den einfachen Variationskalkul aufgesucht wird, und dessen Werth wegen der noch stattfindenden Allgemeinheit des x kein bestimmter ist, mag ein primäres Grösstes oder primäres Kleinstes genannt werden.

Hat man nun für y die Funktion φx gefunden, bei welcher $U = f(x, \varphi x)$ ein primäres Grösstes oder primäres Kleinstes wird; so kann man noch für x einen solchen bestimmten Werth a aufsuchen, bei welchem dann der Ausdruck $U = f(a, \varphi a)$ einen grösseren oder kleineren Werth bekommt, als wenn man die dem a unmittelbar anliegenden Nachbarwerthe einsetzt. Ein solches Grösstes oder Kleinstes, welches durch den Differentialkalkul aufgesucht wird, und bereits einen speciellen Werth hat, mag ein sekundäres genannt werden.

Trifft es sich dann, dass der Ausdruck $U = f(x, y)$ gleichzeitig sowohl in primärer als auch in sekundärer Beziehung ein Grösstes oder Kleinstes wird; so hat man ein zusammengesetztes Grösstes oder ein zusammengesetztes Kleinstes.

Es ist nicht grade nöthig, zuerst den primären Zustand für sich allein, und hierauf den sekundären Zustand für sich allein, aufzusuchen; sondern man kann den zusammengesetzten Zustand auch auf einmal auffinden. Oft ist man sogar gezwungen, den zusammengesetzten Zustand auf einmal aufzusuchen (man denke z. B. an die Probleme, welche auf bestimmte Integrale mit veränderlichen Gränzen führen). Das zusammengesetzte Grösste oder Kleinste

auf einmal aufzufinden ist aber Sache des zusammengesetzten Variationskalkul's.

Da es nicht meine Absicht ist, eine Theorie des Variationskalkul's hier mitzutheilen, so will ich die bereits gemachten Bemerkungen nicht noch vermehren; denn jetzt wird jeder Leser die von mir herrührenden Eigenthümlichkeiten, welche in den nachfolgenden Problemen vorkommen, ohne weiteres zu würdigen verstehen. Für einen Theil meiner Leser ist es vielleicht nicht überflüssig, wenn ich zu jedem Probleme einen Paragraphen aus Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten citire.

Erste Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, die wirkliche Urfunktionen sind.

Aufgabe 1.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 160. §. 17.).

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie das Produkt der zu irgend einer nach Beliebeu gewählten Abscisse gehörigen Ordinate und dieser um die Ordinate verminderten Abscisse grösser oder kleiner macht, als es bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven machen können?

Die hier gestellte Aufgabe, welche ein primäres Grösstes oder primäres Kleinstes sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = y \cdot (x - y),$$

wo x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Kurve ist. Die Ordinaten aller der Kurven, welche der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegen, werden dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta^3 y \ldots\ldots\ldots,$$

wo $\varkappa$ der Null nächstanliegend, y die gesuchte Funktion von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ u. s. w. ganz willkürliche reelle Funktionen von x sind. Aus I. folgt nun

$$\text{III)}\quad \delta U = (x - 2y) \cdot \delta y$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = (x - 2y)\delta^2 y - 2 \cdot \delta y^2.$$

Aus $\delta U = 0$ folgt $x - 2y = 0$, d. h. es ist

$$\text{V)}\quad y = \tfrac{1}{2} \cdot x.$$

Die gesuchte Kurve ist also diejenige Gerade, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem Winkel schneidet, dessen goniometri-

sche Tangente $= \frac{1}{2}$ ist; und da sich jetzt Gleichung IV. auf $\delta^2 U = -2 \cdot \delta y^2$ zurückzieht, also $\delta^2 U$ bei jeder reellen Funktion von x, welche man für δy setzt und bei jedem beliebigen Werthe des x negativ bleibt; so ist $U' = \frac{1}{4} \cdot x^2$ ein **primäres Grösstes**.

Aufgabe 2.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 160. §. 17.),

Welche unter allen auf das nemliche rechtwinklige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass das Produkt seiner Ordinate und seiner um die Ordinate verminderten Abscisse nebst dem Produkt seiner Abscisse und einer um diese Abscisse verminderten konstanten Linie grösser oder kleiner ist, als bei allen andern nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie sich nun in der gesuchten Kurve oder in den ihr in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe, welche ein zusammengesetztes Grösstes oder ein zusammengesetztes Kleinstes sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = y \cdot (x - y) + x \cdot (a - x)$$

wo x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Kurve ist. Die irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen und sowohl in der gesuchten als in allen nächstanliegenden Nachbarkurven befindlichen Nachbarpunkte haben die Abscisse $(x + Dx)$, welche man auch darstellen kann durch

$$\text{II)} \quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots,$$

und die Ordinate

$$\text{III)} \quad y + \varkappa \cdot (\delta) y + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\delta)^3 y + \ldots\ldots,$$

wo bekanntlich

$$(\delta) y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x,$$

$$(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

u. s. w. ist. Da aber die Werthänderung des x ganz unabhängig und willkürlich ist, so wäre es schon hinreichend, statt der Reihe II. den einfachern Ausdruck $x + \varkappa \cdot \vartheta x$ zu setzen, wobei also $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, u. s. w. ist. Nimmt man aber dennoch die Reihe II., so bekommt man

$$\text{IV)} \quad (\delta) U = (x - 2y) \cdot \delta y + \left[(x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x\right] \cdot \vartheta x$$

$$\text{V)} \quad (\delta)^2 U = (x - 2y) \cdot \delta^2 y + \left[(x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x\right] \cdot \vartheta^2 x$$
$$- 2 \cdot \delta y^2 + 2\left[\left(1 - 2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y + (x - 2y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right] \cdot \vartheta x$$

$$+ [(x - 2y) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2(\frac{dy}{dx})^2 - 2] \cdot \vartheta x^2.$$

Setzt man $(\delta) U = 0$, d. h. sowohl $\frac{d_y U}{dy} = 0$ als auch $\frac{dU}{dx} = 0$, so bekommt man zunächst die identische Gleichung

$$\text{VI)} \quad x - 2y = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\text{VII)} \quad y = \tfrac{1}{2} \cdot x$$

Die gesuchte Kurve ist also diejenige Gerade, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem Winkel schneidet, dessen goniometrische Tangente $= \frac{1}{2}$ ist. Man bekommt aber auch noch die nichtidentische Gleichung

$$(x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x = 0$$

welche sich jedoch in Folge der Gleichung VI. zurückzieht auf

$$\text{VIII)} \quad y + a - 2x = 0$$

Führt man für y den Ausdruck ein, so bekommt man $a - \frac{3x}{2} = 0$, woraus $x = \frac{2a}{3}$ folgt, und es ist

$$\text{IX)} \quad U'' = \frac{a^2}{3}.$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung V. auf

$$\text{X)} \quad (\delta)^2 U = -2 \cdot \delta y^2 - \tfrac{3}{2} \cdot \vartheta x^2$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen negativ und somit findet ein zusammengesetztes Grösstes statt.

Aufgabe 17.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 177. §. 26.).

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem bezogenen Flächen hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass folgender von den Coordinaten dieses Punktes abhängige Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = 6ax + x^2 + w^2 + 6y^2 - 4hy \cdot (x + w)$$

grösser oder kleiner ist, als bei allen andern nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie nun sich in der gesuchten Fläche oder in den ihr überall nächstliegenden Nachbarflächen befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe verlangt, wie man sieht, ein zusammengesetztes Grösstes oder Kleinstes. Zu den irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen und sowohl in der gesuchten als in allen nächstanliegenden Nachbarflächen befindlichen Nachbarpunkten gehören die Abscissen $(x + Dx)$ und $(w + Dw)$, welche man auch darstellen kann durch

II) $x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$

III) $w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \vartheta^3 w + \ldots\ldots\ldots$

und die Ordinate

IV) $y + \varkappa \cdot (\delta) y + \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\delta)^3 y + \ldots\ldots\ldots$

wo bekanntlich

$$(\delta) y = \delta y + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta w,$$

$$(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta y}{dx} \cdot \vartheta w + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$

$$+ \frac{d_x{}^2 y}{dx} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w y}{dx \cdot dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w{}^2 y}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$

u. s. w. ist. Da aber die Werthänderungen des x und des w hier ganz unabhängig und willkürlich sind, so wäre es schon hinreichend statt der Reihen II. und III. nur $(x + \varkappa \cdot \vartheta x)$ und $(w + \varkappa \cdot \vartheta w)$ zu setzen, wobei also $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^2 w = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, $\vartheta^3 w = 0$ u. s. w. ist. Durch Variiren bekommt man

$$(\delta) U = 4(3y - hx - hw) \cdot \delta y$$
$$+ [4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_x y}{dx} + 6a + 2x - 4hy] \cdot \vartheta x$$
$$+ [4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_w y}{dw} + 2w - 4hy] \cdot \vartheta w.$$

Aus $(\delta) U = 0$ folgt zuerst die identische Gleichung

VI) $3y - hx - hw = 0$

und die beiden nichtidentischen Gleichungen

VII) $4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_x y}{dx} + 6a + 2x - 4hy = 0,$

VIII) $4(3y - hx - hw) \cdot \frac{d_w y}{dw} + 2w - 4hy = 0,$

welche sich aber wegen Gleichung VI. zurückziehen auf

IX) $6a + 2x - 4hy = 0,$

und

X) $2w - 4hy = 0.$

Aus VI. folgt zunächst

XI) $y = \frac{h}{3} \cdot (x + w).$

Die gesuchte Fläche ist also eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und bei welcher die in den Coordinatenebenen XY und WY liegen-

den Spuren mit der Coordinatenaxe Y solche Winkel bilden, deren goniometrische Tangente $= \frac{h}{3}$ ist.

Führt man nun in IX. und X. für y den Ausdruck ein, so bekommt man $x = \frac{3 \cdot (3 - 2h^2)}{4h^2 - 3} \cdot a$ und $w = \frac{6h^2}{4h^2 - 3} \cdot a$. Unter diesen Umständen bleibt nur

$$\text{XII)} \quad (\delta)^2 U = 12 \cdot \delta y^2 + \tfrac{2}{3}(3 - 2h^2) \cdot \left[\left(\vartheta x - \frac{2h^2}{3 - 2h^2} \cdot \vartheta w\right)^2 + \frac{3 \cdot (3 - 4h^2)}{(3 - 2h^2)^2} \cdot \vartheta w^2\right].$$

Der Theilsatz mit dem Variationskoefficienten ist unter allen Umständen positiv; dagegen das Aggregat der mit Differenzkoefficienten versehenen Theilsätze ist nur dann sicher positiv, wenn $(3 - 2h^2)$ und $(3 - 4h^2)$ gleichzeitig positiv sind; und dieses ist der Fall bei allen von $(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ bis zu $(+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ liegenden Werthen des h. Dabei findet aber ein zusammengesetztes Kleinstes statt.

Bei allen zwischen $(-\infty)$ und $(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$, so wie bei allen zwischen $(+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3})$ und $(+\infty)$ liegenden Werthen des h kann von einem sichern Zeichenstande des mit Differenzkoefficienten versehenen Aggregates keine Rede sein, und in diesem Falle findet wohl ein primäres Kleinstes, aber in sekundärer Beziehung findet weder ein Grösstes noch ein Kleinstes statt.

Aufgabe 31.

[(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 181. §. 27.).

Man sucht y und z als solche Funktionen von x und für x selbst einen solchen Werth, dass der Ausdruck

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \log \text{nat} \frac{x}{m}$$

ein zusammengesetztes Grösstes oder Kleinstes wird.

Man bekommt hier

$$(\delta) U = (2y - z - x) \cdot \delta y + (2z - y - x) \cdot \delta z + \left[(2y - z - x) \cdot \frac{dy}{dx} + (2z - y - x) \cdot \frac{dz}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x}\right] \cdot \vartheta x$$

Daraus folgen zunächst die beiden identischen Gleichungen

$$\text{I)} \quad 2y - z - x = 0,$$

und

$$\text{II)} \quad 2z - y - x = 0$$

und die nichtidentische Gleichung

$$\text{III)} \quad 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0.$$

Aus I. und II. ergibt sich $y = x$ und $z = x$; und aus III. ergibt sich $x = \frac{g^2}{h}$. Es ist also jetzt

$$U'' = g^2 \,.\, (1 - \log \text{nat} \frac{g^2}{h \,.\, m}).$$

Unter diesen Umständen bleibt nur

$$(\delta)^2 U = (\delta y - \delta z)^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + \frac{h^2}{g^2} \,.\, \vartheta x^2.$$

Das Aggregat der Variationskoefficienten zeigt an, dass ein primäres Kleinstes, und der Theilsatz mit dem Differenzkoefficienten zeigt an, dass auch ein sekundäres Kleinstes statt findet; es findet also ein **zusammengesetztes** Kleinstes statt.

(Man vergleiche die folgende Aufgabe).

Aufgabe 32.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 177. §. 26.).

Man sucht z als solche Funktion von x und y und zugleich für x und y solche Werthe, dass der Ausdruck

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \,.\, \log \text{nat} \frac{x}{m}$$

ein zusammengesetztes Grösstes oder Kleinstes wird.

Man bekommt hier

$$(\delta) U = (2z - x - y) \,.\, \delta z + [(2z - x - y) \,.\, \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z] \,.\, \vartheta y$$
$$+ [(2z - x - y) \frac{d_x z}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x}] \,.\, \vartheta x.$$

Daraus folgt zunächst die identische Gleichung

$$\text{I)}\ 2z - x - y = 0$$

und die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$\text{II)}\ 2y - x - z = 0$$

und

$$\text{III)}\ 2x - y - z - \frac{hx - g^2}{x} = 0.$$

Aus I. ergibt sich $z = \frac{x+y}{2}$. Führt man diesen Ausdruck in I. und II. ein, so bekommt man $y = \frac{g^2}{h}$ und $x = \frac{g^2}{h}$. Es ist also jetzt wieder

$$U'' = g^2 \,.\, (1 - \log \text{nat} \frac{g^2}{h \,.\, m}).$$

Unter diesen Umständen bleibt nur

$$(\delta)^2 U = 2\delta z^2 + 6 \,.\, (\vartheta x - \vartheta y)^2 + \frac{h^2}{g^2} \,.\, \vartheta x^2.$$

Der Theilsatz mit dem Variationskoefficienten zeigt an, dass ein primäres Kleinstes, und das Aggregat mit den Differenzkoefficienten zeigt an, dass auch ein sekundäres Kleinstes statt findet; es findet also ein zusammengesetztes Kleinstes statt.

(Man vergleiche die vorhergehende Aufgabe).

Aufgabe 51.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 197. §. 35.; und zu Seite 202. Anmerkung.).

Welcher abgekürzte senkrechte Kegel hat bei jedem beliebigen zwischen dem Halbmesser der oberen und unteren Grundfläche stattfindenden Verhältnisse die Eigenschaft, dass er unter allen denen, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Körperinhalt einschliessen, von der kleinsten Oberfläche begränzt wird?

Es sei y der Halbmesser der untern, z der Halbmesser der obern Grundfläche und v sei die senkrechte Entfernung dieser beiden Grundflächen; so ist bekanntlich des abgekürzten Kegelmantels Flächeninhalt $= \pi . (y + z) . \sqrt{v^2 + (y - z)^2}$, das z mag grösser oder kleiner als y sein, d. h. des abgekürzten Kegels Spitze mag abwärts oder aufwärts liegen. Hier hat man, eben weil kein Grund vorhanden ist, warum des Kegelmantels Flächeninhalt negativ sein sollte, das Radikal nur nach seiner positiven Bedeutung zu nehmen; und diese Bedeutung muss ihm durch die ganze Aufgabe bleiben. Der Flächeninhalt der untern Grundfläche ist $\pi . y^2$, und der Flächeninhalt der obern Grundfläche ist $\pi . z^2$. Addirt man diese drei Ausdrücke, so ergibt sich für die ganze Oberfläche des abgekürzten senkrechten Kegels folgender Ausdruck:

$$\text{I)} \quad U = \pi . [y^2 + z^2 + (y + z) . \sqrt{v^2 + (y - z)^2}].$$

Der Körperinhalt desselben ist

$$\text{II)} \quad \frac{\pi}{3} . v . (y^2 + yz + z^2).$$

Weil ferner der Halbmesser der obern Grundfläche irgend ein beliebiges Vielfaches oder irgend ein beliebiger Theil des Halbmessers der unteren Grundfläche ist, so hat man noch die Gleichung

$$\text{III)} \quad y = x . z.$$

Man erkennt sogleich, dass die Auflösung am leichtesten durchgeführt wird, wenn man y eliminirt; man hat dann z und v als solche Funktionen von x zu bestimmen, dass

$$\text{IV)} \quad U = \pi . [z^2 . (1 + x^2) + z . (1 + x) . \sqrt{v^2 + z^2 . (x - 1)^2}]$$

ein primäres Kleinstes wird, während noch der Ausdruck

$$\text{V)} \quad \frac{\pi}{3} . v . z^2 . (1 + x + x^2)$$

beständig denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Aus IV. folgt nun

$$\text{VI)}\ \delta U = \frac{\pi z \,.\, (1+x) \,.\, v}{\sqrt{v^2 + z^2 \,.\, (x-1)^2}} \,.\, \delta v$$

$$+ \frac{\pi \,.\, (1+x) \,.\, [v^2 + 2z^2 \,.\, (x-1)^2] + 2\pi z \,.\, (1+x^2) \,.\, \sqrt{v^2 + z^2 \,.\, (x-1)^2}}{\sqrt{v^2 + z^2 \,.\, (x-1)^2}} \,.\, \delta z.$$

Aus V. aber folgt

$$\text{VII)}\ z \,.\, \delta v + 2v \,.\, \delta z = 0.$$

Eliminirt man nun δv, so geht Gleichung VI. über in

$$\text{VIII)}\ \delta U = \frac{\pi.(x+1).[2z^2.(x-1)^2 - v^2] + 2\pi z.(x^2+1).\sqrt{v^2+z^2.(x-1)^2}}{\sqrt{v^2+z^2.(x-1)^2}}.\delta z.$$

Setzt man $\delta U = 0$, so folgt aus Gleichung VIII.

$$\text{IX)}\ (x+1) \,.\, [2z^2 \,.\, (x-1)^2 - v^2]$$
$$+ 2z \,.\, (x^2+1) \,.\, \sqrt{v^2 + z^2 \,.\, (x-1)^2} = 0.$$

Daraus folgt

$$\text{X)}\ z^2 = \left(\frac{v}{2x \,.\, (x-1)}\right)^2 \,.\, [-(x^4+1)$$
$$+ \sqrt{(x^4+1)^2 + x^2 \,.\, (x^2-1)^2}].$$

Das Radikal kann aber hier nur seine positive Bedeutung haben, weil widrigenfalls z^2 negativ, also z selbst imaginär wäre. Hierdurch ist das Verhältniss der Höhe zum Halbmesser der oberen Grundfläche gegeben. Würde man dem nichtvariabeln Elemente x den Werth 1 beilegen, so würde aus Gleichung III. folgen $y = z$, d. h. der Halbmesser der obern Grundfläche wäre dem der untern Grundfläche gleich, und der abgekürzte Kegel ginge in den Cylinder über, und Gleichung X. ginge über in

$$\text{XI)}\ z^2 = v^2 \,.\, \tfrac{0}{0}.$$

Wenn man aber Gleichung X. genauer betrachtet, so erkennt man, dass man den wahren Werth der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ jetzt am leichtesten dadurch ermittelt, dass man das Radikal nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe verwandelt. Nun darf das Radikal, wie bereits aus einandergesetzt ist, nur seine positive Bedeutung haben; und dabei geht Gleichung X. über in

$$z^2 = \frac{v^2}{4x^2 \,.\, (x-1)^2} \,.\, [\tfrac{1}{2} \,.\, \frac{x^2 \,.\, (x^2-1)^2}{x^4+1} - \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4} \,.\, \frac{x^4 \,.\, (x^2-1)^4}{(x^4+1)^3}$$
$$+ \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \,.\, \frac{x^6 \,.\, (x^2-1)^6}{(x^4+1)^5} - \ldots\ldots].$$

Dividirt man in Zähler und Nenner das gemeinschaftliche Produkt $x^2 \,.\, (x-1)^2$ weg; so geht letztere Gleichung über in

$$z^2 = \frac{v^2}{4} [\tfrac{1}{2} \,.\, \frac{(x+1)^2}{x^4+1} - \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4} \,.\, \frac{x^2 \,.\, (x-1)^2 \,.\, (x+1)^4}{(x^4+1)^3}$$
$$+ \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \,.\, \frac{x^4 \,.\, (x-1)^4 \,.\, (x+1)^6}{(x^4+1)^5} - \ldots\ldots]$$

Diese Gleichung ist mit Gleichung X. ganz gleichbedeutend bei je-

dem Werthe des x, also auch bei $x = 1$; und setzt man wirklich $x = 1$, so bekommt man

$$\text{XII)} \quad z^2 = \tfrac{1}{4} \cdot v^2,$$

so dass die hier in Frage stehende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ den Werth $\frac{1}{4}$ hat. Aus XII. folgt $v = 2z$, d. h. die Höhe dieses Cylinders ist dem Durchmesser der beiden Grundflächen gleich, und man hat den bekannten Satz: „unter allen Cylindern von einerlei Körperinhalt wird derjenige von der kleinsten Oberfläche eingeschlossen, dessen Höhe dem Durchmesser der Grundflächen gleich ist.

Erstens. Ist der Körperinhalt des gesuchten Kegels ein gegebener, dargestellt durch m^3; so geht der Ausdruck V. über in die Gleichung

$$\text{XIII)} \quad \frac{\pi}{3} \cdot v \cdot z^2 \cdot (1 + x + x^2) = m^3$$

und die Gleichungen X. und XIII. reichen hin, zu bestimmen, was v und z für Funktionen von x sind.

Zweitens. Ist der Körperinhalt des gesuchten Kegels nicht gegeben, so hat man nur die einzige Gleichung X., und jetzt kann man für das mittelbarvariable Element v jede beliebige Funktion von x wählen; die zugehörige Funktion z ergiebt sich dann jedesmal aus Gleichung IX. oder X.

Das Prüfungsmittel, ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, ist noch herzustellen.

Zweite Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, wo Differentiale vorkommen.

Aufgabe 56.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten Seite 208. §. 44—46.)

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie folgenden von den Coordinaten abhängigen Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = h^2 \cdot x^2 + \frac{h^4 \cdot x^2}{x^2 - h^2} + \tfrac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y^2 - (h^2 \cdot x^2 + h^2 \cdot xy) \cdot \frac{dy}{dx} + h^2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächst anliegenden Nachbarkurven machen können?

Hier ist x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Kurve. Die Ordinaten aller Kurven, welche der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegen, werden dargestellt durch

$$\text{II)}\ y + \varkappa \,.\, \delta y + \frac{\varkappa^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

wo $\varkappa$ der Null nächstanliegend, y die gesuchte Funktion von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, u. s. w. ganz willkürliche reelle Funktionen von x sind. Der erste Differentialquotient der der gesuchten Funktion y bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunktionen wird also dargestellt durch

$$\text{III)}\ \frac{dy}{dx} + \varkappa \,.\, \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots\ldots$$

Durch Variiren bekommt man

$$\text{IV)}\ \delta U = (h^2 \,.\, y - h^2 \,.\, x \,.\, \frac{dy}{dx}) \,.\, \delta y + (2h^2 \,.\, x^2 \,.\, \frac{dy}{dx} + h^2 \,.\, x^2 - h^2 \,.\, x \,.\, y) \,.\, \frac{d\delta y}{dx},$$

$$\text{V)}\ \delta^2 U = (h^2 \,.\, y - h^2 \,.\, x \,.\, \frac{dy}{dx}) \,.\, \delta^2 y + (2h^2 \,.\, x^2 \,.\, \frac{dy}{dx} - h^2 \,.\, x^2 - h^2 \,.\, xy) \,.\, \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ h^2 \,.\, \delta y^2 - 2h^2 \,.\, x \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx} + 2 \,.\, h^2 \,.\, x^2 \,.\, (\frac{d\delta y}{dx})^2.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden; so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen also jetzt die zwei identischen Gleichungen

$$1)\ h^2 \,.\, y - h^2 \,.\, x \,.\, \frac{dy}{dx} = 0$$

und

$$2)\ 2h^2 \,.\, x^2 \,.\, \frac{dy}{dx} - h^2 \,.\, x^2 - h^2 \,.\, xy = 0$$

statt finden. Man hat nun zwei Wege, die gesuchte Funktion y von x aufzufinden.

Erstens. Gleichung 1) geht geradezu über in $y \,.\, dx - x \,.\, dy = 0$ oder $\frac{y \,.\, dx - x \,.\, dy}{x^2} = 0$. Daraus folgt durch Integriren

$$3)\ y = Bx.$$

Durch diese Funktion muss aber auch Gleichung 2) identisch werden. Zu diesem Ende führe man Bx statt y und B statt $\frac{dy}{dx}$ in

Gleichung 2) überall ein, reducire so viel als möglich, und man bekommt

$$2B \cdot h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot x^2 - B \cdot h^2 \cdot x^2 = 0.$$

Daraus folgt $B = 1$, und Gleichung 3) geht über in

$$4) \; y = x,$$

welches die gesuchte Funktion y von x ist. Dabei reducirt sich Gleichung V) auf

$$\delta^2 U = h^2[(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx})^2 + (x \cdot \frac{d\delta y}{dx})^2]$$

woran man erkennt, dass $U' = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \frac{x^2 \cdot (x^2 + h^2)}{x^2 - h^2}$ ein primäres Kleinstes ist.

Zweitens. Man kann aber auch aus 1) und 2) den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, und so ohne Integration zu der gesuchten Funktion y von x gelangen. Zu diesem Ende wird man aus Gleichung 1) bekommen

$$5) \; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Diesen Ausdruck führe man in 2) ein, und es ergibt sich $h^2 \cdot x(y - x) = 0$, so dass man

$$6) \; y = x$$

hat. Diese Funktion soll nun die Gleichungen 1) und 2) zugleich identisch machen, was noch besonders untersucht werden muss. Man hat also jetzt genau dasselbe Resultat, wie vorher.

Zweiter Fall. Soll man aber nur unter denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Kurven, welche alle den zu der gerade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben, diejenige heraussuchen, wobei das U grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so haben alle hier in Betracht zu ziehenden Kurven bei der gerade gewählten Abscisse x auch einerlei Ordinate. Deshalb besteht bei der gerade gewählten Abscisse x zwischen der Ordinate der gesuchten und den Ordinaten aller in Betracht zu ziehenden Kurven folgende Gleichung:

$$\text{VI)} \; y = y + x \cdot \delta y + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \delta^2 y + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Es muss also bei dem gerade gewählten Werthe des x einzeln sein

$$\delta y = 0, \; \delta^2 y = 0, \; \delta^3 y = 0, \text{ u. s. w.}$$

Hier reducirt sich also Gleichung IV. auf

$$\delta U = (2 \cdot h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot x \cdot y) \frac{d\delta y}{dx}.$$

Man hat daher jetzt nur die einzige Gleichung

$$7) \; 2h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot xy = 0.$$

Diese Gleichung reducirt sich geradezu auf

$$8)\ 2x\,.\,dy - x\,.\,dx - y\,.\,dx = 0.$$

Die Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit dem Faktor $\frac{1}{2\,.\,x^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt. Dadurch bekommt man

$$9)\ \frac{2x\,.\,dy - y\,.\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{dx}{2x^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Daraus folgt durch Integration

$$10)\ \frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = C$$

oder mit Aenderung der Konstanten

$$11)\ y - x = \sqrt{E\,.\,x}$$

oder

$$12)\ (y-x)^2 = E\,.\,x.$$

Die willkührliche Konstante E macht, dass man die Aufgabe noch einer Nebenbedingung unterwerfen kann. Da sich jetzt Gleichung V. auf

$$\delta^2 U = 2\,.\,h^2\,.\,x^2\,.\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

zurückziehet, so erkennt man, dass ein primäres Kleinstes stattfindet.

Dritter Fall. Soll man nur unter denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x lauter parallele Berührende haben, während die zu dieser Abscisse x gehörigen Berührungspunkte der hier in Betracht zu ziehenden Kurven in verschiedenen (jedoch einander nächstanliegenden) Entfernungen von der Abscissenaxe sich befinden können, diejenigen heraussuchen, wobei das U grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so schliesst die Abscissenaxe mit den zu der gerade gewählten Abscisse x gehörigen Berührenden aller in Betracht zu ziehenden Kurven jedesmal einen gleichgrossen Winkel ein. Nun ist $\frac{dy}{dx}$ die goniometrische Tangente des von der Abscissenaxe und von der (an den zu der gerade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt der gesuchten Kurve gezogenen) Berührenden eingeschlossenen Winkels; und deshalb besteht bei der gerade gewählten Abscisse x zwischen der goniometrischen Tangente der gesuchten Kurve und zwischen den goniometrischen Tangenten aller in Betracht zu ziehenden Kurven folgende Gleichung:

$$\text{VII)}\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \varkappa\,.\,\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

Es muss also bei dem gerade gewählten Werthe des x einzeln sein

$$\frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0,\ \frac{d\delta^3 y}{dx} = 0,\ \text{u. s. w.}$$

Hierbei reducirt sich Gleichung 4) auf

$$\delta U = (h^2 \, . \, y - h^2 \, . \, x \, . \, \frac{dy}{dx}) \, . \, \delta y.$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$13) \; h^2 \, . \, y - h^2 \, . \, x \, . \, \frac{dy}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung formt sich zunächst um in $x \, . \, dy - y \, . \, dx = 0$, oder $\frac{x \, . \, dy - y \, . \, dx}{x^2} = 0$; und daraus folgt durch Integration

$$14) \; y = Gx.$$

Die willkürliche Konstante G macht, dass man die Aufgabe noch einer weitern Bedingung unterwerfen kann. Da sich hierbei Gleichung V. auf

$$\delta^2 U = h^2 \, . \, \delta y^2$$

reducirt, so erkennt man, dass ein primäres Kleinstes statt findet.

Aufgabe 67.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208. §. 44—46.).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, dass, wenn man an den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührende zieht, und dann von zwei andern in der Ebene irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührende fällt, das Produkt dieser Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Die Auflösung wird (Taf. III. Fig. 2.) vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe durch die beiden bestimmten Punkte H und K legt; und wenn man zugleich HR und KT senkrecht auf OX errichtet, so bekommt man $HM = HR . \sin HRM$, und $KN = KT . \sin KTN$.

Nun ist $\text{tg}\; SFG = \frac{dy}{dx} = p$, also $\cos SFG = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, und man hat somit

$$\text{I)} \; \sin HRM = \sin KTN = \cos SFG = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ferner ist schon in der 66sten Aufgabe dargethan, dass, wenn man die festen Abscissen OH und OK bezüglich mit a und α bezeichnet,

$$HR = y + (a - x) \, . \, p, \text{ und } KT = y + (\alpha - x) \, . \, p;$$

also ist

$$\text{II)} \; HM = \frac{y + (a - x) \, . \, p}{\sqrt{1+p^2}},$$

und

$$\text{III)}\ KN = \frac{y + (\alpha - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Für das gesuchte Produkt $HM \cdot KN$ hat man also, da die beiden Radikale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung repräsentiren,

$$U = \frac{[y + (a - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x)p]}{1 + p^2}.$$

Durch Variiren bekommt man

$$\text{IV)}\ \delta U = \frac{1}{1 + p^2} \cdot [2y + (a + \alpha - 2x)p] \cdot \delta y$$

$$+ \frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot \{[(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x)(\alpha - x)p] \cdot (1 + p^2)$$

$$- 2p \cdot [y + (a - x)p] \cdot [y + (\alpha - x)p]\} \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden heraus gewählt werden, so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen jetzt die zwei identischen Gleichungen stattfinden,

$$1)\ 2y + (a + \alpha - 2x)p = 0$$

$$2)\ [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x)(\alpha - x) \cdot p] \cdot (1 + p^2)$$

$$- 2p \cdot [y + (a - x)p] \cdot [y + (\alpha - x)p] = 0$$

Eliminirt man p aus den beiden Gleichungen, so bekommt man

$$3)\ (\alpha - a)^2 \cdot y = 0$$

d. h. y wäre eine identische Funktion von x, und die gefundene Kurve wäre die in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei ist aber nur

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$+ 2 \cdot (a - x)(\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2.$$

Da aber

$$\frac{d_y{}^2 U}{dy^2} \times \frac{d_p{}^2 U}{dp^2} - \left(\frac{d_y d_p U}{dy \cdot dp}\right)^2 = -(\alpha - a)^2$$

beständig negativ bleibt, so kann von keinem Grössten oder Kleinsten die Rede sein.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe, so reducirt sich Gleichung IV. auf

$$\delta U = \frac{1}{(1 + p^2)^2} \{[(a + \alpha - 2x)y + 2(a - x)(\alpha - x) \cdot p](1 + p^2)$$

$$- 2p \cdot [y + (a - x)p] \cdot [y + (\alpha - x)p]\} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werde, muss sein

$$4)\quad [(a + \alpha - 2x) \,.\, y + 2(a - x)\,(\alpha - x) \,.\, p] \,.\, (1 + p^2) \\ - 2p \,.\, [y + (a - x) \,.\, p] \,.\, [y + (\alpha - x) \,.\, p] = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{dp}{(1+p^2)^2}$; dann hat man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[(a + \alpha - 2x) \,.\, y + 2(a - x)\,(\alpha - x)p] \,.\, (1 + p^2) \,.\, dp \\ - 2[y + (a - x) \,.\, p] \,.\, [y + (\alpha - x) \,.\, p] \,.\, p \,.\, dp\end{array}\right\}}{(1 + p^2)^2} = 0.$$

Da $dy = p \,.\, dx$, so ist der Ausdruck

$$[2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p] \,.\, (1 + p^2)dy \\ - [2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p] \,.\, (1 + p^2) \,.\, p \,.\, dx$$

jedenfalls eine identische Gleichung. Man kann ihn also zu dem Zähler des letzten Bruches addiren, ohne dass derselbe dadurch geändert wird; und somit bekommt man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[2y+(a+\alpha-2x)\cdot p]\cdot(1+p^2)\cdot dy-[2y+(a+\alpha-2x)\cdot p]\cdot(1+p^2)\cdot p\cdot dx\\ +[(a+\alpha-2x)\cdot y+2(a-x)\,(\alpha-x)p]\cdot(1+p^2)\cdot dp\\ -2[y+(a-x)\cdot p]\cdot[y+(\alpha-x)\cdot p]p\cdot dp\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2}=0$$

Diese Gleichung kann man geradezu integriren, und es wird

$$\frac{[y+(a-x)\cdot p]\cdot[y+(\alpha-x)\cdot p]}{1+p^2}=A$$

Daraus folgt $[y+(a-x)p]\cdot[y+(\alpha-x)\cdot p]=A\cdot(1+p^2)$; und führt man diesen Ausdruck in Gleichung 4. ein, so bekommt man

$$[(a+\alpha-2x)\cdot y+2(a-x)\,(\alpha-x)\cdot p]\cdot(1+p^2)$$
$$-2Ap\cdot(1+p^2)=0$$

Daraus folgt

$$\frac{2 \cdot dy}{y} = \frac{(a + \alpha - 2x) \cdot dx}{A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2}.$$

Also ist

$$2 \log \text{nat}\, y = C + \log \text{nat}\, (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)$$

oder mit Veränderung der Konstanten

$$5)\ y^2 = B \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2).$$

Diese Gleichung enthält aber zwei willkührliche Konstanten, während doch die hier vorgegebene Differentialgleichung 4. nur von der ersten Ordnung ist. Aber der Umstand, dass Gleichung 4. durch 5. identisch werden muss, dient dazu, die eine der Konstanten durch die andere zu bestimmen.

Aus 5. folgt nun $y = \sqrt{B \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)}$ und $p = \frac{(a + \alpha - 2x) \cdot \sqrt{B}}{2 \cdot \sqrt{A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2}}$. Vereinfacht man noch Gleichung 4), so bleibt nur

$$6)\ (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - 2y^2 \cdot p - (a + \alpha - 2x) \cdot p^2 \cdot y = 0.$$

Und führt man hierin die so eben für y und p gefundenen Ausdrücke ein, so bleibt nach ausgeführten Reduktionen nur noch übrig

$$4A \cdot (1 - B) - B \cdot (\alpha - a)^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$A = \frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2$$

Gleichung 5. geht also über in

$$7)\ y^2 = B \cdot \left[\frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 - a\alpha + ax + \alpha x - x^2\right]$$

welche sich aber auf folgende Weise darstellen lässt

$$8)\ y^2 = B\left[\frac{1}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)^2\right]$$

oder

$$9)\ \frac{\left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)^2}{\frac{1}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1.$$

Die gesuchte Kurve ist also entweder eine Ellipse oder Hyperbel. Sie ist eine Ellipse, wenn $\frac{1}{1 - B}$ und $\frac{B}{1 - B}$ gleichzeitig positiv sind; und dazu ist nöthig, dass $B < 1$ und positiv ist. Die gesuchte Kurve aber ist eine Hyperbel, wenn $\frac{1}{1 - B}$ und $\frac{B}{1 - B}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; und dieses ist der Fall, wenn B negativ ist. B kann niemals grösser als $+1$ sein; denn dabei

käme man (Gleichung 8) auf den Widerspruch, dass y^2 negativ, also y selbst imaginär wäre.

Da $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, u. s. w.; so bekommt man für den Variationskoefficienten der zweiten Ordnung nach und nach

$$\delta^2 U = \frac{1}{(1+p^2)^2} . \{2 . (a-x)(\alpha-x) . (1+p^2) \\ -2[y+(a-x).p]\,[y+(\alpha-x).p]\} . (\frac{d\delta y}{dx})^2$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{(1+p^2)^2} . [2(a-x)(\alpha-x) . (1+p^2) \\ -2A . (1+p^2)] . (\frac{d\delta y}{dx})^2$$

oder

$$\delta^2 U = -\frac{2}{1+p^2} . (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2) . (\frac{d\delta y}{dx})^2$$

oder

$$\delta^2 U = -\frac{2}{1+p^2} . \frac{y^2}{B} . (\frac{d\delta y}{dx})^2.$$

Die Ellipse, bei welcher B positiv ist, liefert also ein primäres Grösstes; und die Hyperbel, bei welcher B negativ ist, liefert ein primäres Kleinstes.

Wie die Konstante B bestimmt wird, ist aus früheren Aufgaben zur Genüge bekannt.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe, so ist $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, u. s. w.; und Gleichung IV. reducirt sich auf

$$\delta U = [2y + (a+\alpha-2x) . p] . \delta y.$$

Man hat also die identische Gleichung

$$10)\quad 2y + (a+\alpha-2x) . p = 0$$

Daraus ergibt sich

$$11)\quad y = E . (x - \frac{a+\alpha}{2}).$$

Die gesuchte Kurve ist also (Taf. III. Fig. 3. und Fig. 4.) die Grade RT, welche genau mitten zwischen H und K die Abscissenaxe durchschneidet, und insofern die Aufgabe löst, als jede Grade auch ihre eigne Berührende ist.

Wie man die Konstante E bestimmt, ist aus früheren Aufgaben zur Genüge bekannt.

Weil $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, u. s. w. ist; so bekommt man für den Variationskoefficienten der zweiten Ordnung

$$\delta^2 U = \frac{2}{1+p^2} . \delta y^2,$$

woran man erkennt, dass jedenfalls ein primäres Kleinstes stattfindet.

Schaut man auf Taf. III. Fig. 3. und Taf. III. Fig. 4., so sieht man, dass das hier gefundene Produkt $U = HM \cdot KN$ eigentlich negativ ist, weil die Faktoren HM und KN entgegengesetzt sind. Ein negativer Ausdruck gilt aber in der Analysis für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht. Jede mit RT parallele Berührende, z. B. VW, aller andern nächstanliegenden Nachbarkurven erzeugt ein Produkt $U + \Delta U = HV \cdot KW$, welches natürlich auch jedesmal negativ ist, aber doch näher bei Null liegt, als das Produkt $U = HM \cdot KN$.

Beweis. Weil $HI = IK$, so sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke HIM und KIN kongruent, also sind die Lothe HM und KN einander gleich, aber entgegengesetzt. Desshalb ist $U = HM \cdot KN = HM \cdot (-HM) = -\overline{HM}^2$. Weil nun VW parallel ist mit MN, so ist $VM = WN$. Man setze $VM = WN = D$, so ist $U + \Delta U = HV \cdot KW = (HM - VM) \cdot (KN + NW) = (HM - D) \cdot [-(HM + D)] = -\overline{HM}^2 + D^2$, wie zu beweisen war.

Aufgabe 68.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208. §. 44 — 46.)

Man zieht in einem beliebigen Punkte einer ebenen Kurve die Berührende. Aus zwei festen Punkten einer gegebenen Graden errichtet man Perpendikel, welche bis zur Berührenden verlängert werden; dadurch entsteht ein Trapez. Hierauf fällt man von denselben zwei festen Punkten Perpendikel auf die Berührende; dadurch entsteht wieder ein Trapez. Welche Kurve ist es nun, wenn der Unterschied dieser beiden Trapeze ein primäres Grösstes oder Kleinstes ist, und alle in Betracht zu ziehenden Kurven das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem haben?

Die gegebene gerade Linie (Taf. III. Fig. 2.) sei OX; H und K seien die in dieser Graden gelegenen bestimmten Punkte. Die beiden in Rede stehenden Trapeze sind also $HRTK$ und $HMNK$. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, wenn man die gegebene Grade OX als Abscissenaxe nimmt; in ihr nehme man dann nach Belieben einen Punkt O als Anfang der Coordinaten. Es ist des Trapezes $HRTK$ Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot HK \cdot (HR + KT)$; und ebenso ist des Trapezes $HMNK$ Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot MN \cdot (HM + KN)$. Ist nun $OH = \alpha$ und $OK = a$, so ist nach Einleitung der vorigen Aufgabe

$$HK = a - \alpha,\ HR = y + (\alpha - x) \cdot p,\ KT = y + (a - x) \cdot p$$

$$MN = ME \cdot \cos NME = HK \cdot \cos SFG = \frac{a - \alpha}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$HM = \dfrac{y + (\alpha - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$, und $KN = \dfrac{y + (a - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Es ist also Trapez $HRTK = \dfrac{a - \alpha}{2} \cdot [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p]$; und weil die Ra-

dikale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung repräsentiren, so ist Trapez

$$HMNK = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p}{1 + p^2}.$$

Der Unterschied dieser beiden Trapeze ist also

$$U = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y \cdot p^2 + (a + \alpha - 2x) \cdot p^3}{1 + p^2}.$$

Durch Variiren bekommt man

$$1)\ \delta U = \frac{\alpha - a}{1 + p^2} \cdot p^2 \cdot \delta y$$
$$+ \frac{\alpha - a}{2(1 + p^2)^2} \cdot p[4y + (a + \alpha - 2x)(3 + p^2) \cdot p] \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden; so sind bekanntlich δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig von einander, und es müssen folgende zwei identische Gleichungen stattfinden:

$$1)\ p^2 = 0$$

$$2)\ p[4y + (a + \alpha - 2x)(3 + p^2) \cdot p] = 0.$$

Erstens. Diesen beiden Gleichungen wird zugleich genügt, wenn $p = 0$; und daraus folgt

$$3)\ y = A.$$

Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Gerade, und die beiden Trapeze $HRTK$ und $HMNK$ fallen in ein einziges zusammen. Dabei ist $U' = 0$ ganz unabhängig vom Werthe des x, so dass von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann. Da nun besagte Gerade mit der Abscissenaxe parallel ist, so liegen alle ihre Ordinaten auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe. **Man setze also fest, dass die Ordinaten, welche zu besagter Graden gehören, die positiven seien; dabei ist auch A positiv.** Ferner ist jetzt nur $\delta^2 U = 2 \cdot (\alpha - a) \cdot A \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$, und es findet, eben weil A als positiv gilt, ein **primäres** Kleinstes statt.

Zweitens. Den Gleichungen 1 und 2 wird auch genügt, wenn

$$4)\ y = 0,$$

d. h. eine identische Funktion von x ist. Dadurch ist die in die Abscissenaxe hineinfallende Gerade gegeben und es ist wieder $U' = 0$. Es ist aber auch $\delta^2 U = 0$, und

$$\delta^3 U = (\alpha - a)\ (4\delta y - 3x \frac{d\delta y}{dx})\ \ (\frac{d\delta y}{dx})^2,$$

woran man erkennt, dass jetzt von keinem Grössten oder Kleinsten die Rede sein kann.

Zweiter Fall. Soll die gesuchte Kurve nur unter allen denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgesucht werden, welche den zu der gerade gewählten Abscisse x gehöri-

gen Berührungspunkt mit einander gemein haben; so reducirt sich die Gleichung I. auf

$$\delta U = \frac{\alpha - a}{2(1+p^2)^2} \cdot p \cdot [4y + (a + \alpha - 2x)(3 + p^2) \cdot p] \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Es muss also jetzt die identische Gleichung

$$5)\ p[4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p] = 0$$

stattfinden.

Erstens. Dieser Gleichung wird genügt, wenn $p = 0$; somit ist wieder

$$6)\ y = A,$$

d. h. man hat wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade, so dass wieder $U' = 0$, und $\delta^2 U = 2(\alpha - a) \cdot A \cdot (\frac{d\delta y}{dx})^2$ ist, also ein primäres Kleinstes stattfindet, und von einer sekundären Beziehung keine Rede sein kann. Also ganz wie im ersten Falle.

Zweitens. Der Gleichung 5) wird aber auch genügt, wenn

$$7)\ 4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p = 0$$

ist. Bringt man die Klammern weg, so bekommt man

$$8)\ 4y + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot p + (a + \alpha - 2x) \cdot p^3 = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so ergibt sich

$$4 \cdot dy + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot dp - 6p \cdot dx - 2p^3 \cdot dx$$
$$+ 3(a + \alpha - 2x) \cdot p^2 \cdot dp = 0.$$

Da aber $dy = p \cdot dx$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$3(a + \alpha - 2x) \cdot (1 + p^2) \cdot dp - 2p \cdot (1 + p^2) \cdot dx = 0;$$

daraus folgt

$$\frac{dp}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot dx}{a + \alpha - 2x} = 0.$$

Also ist

$$\log \operatorname{nat} p + \tfrac{1}{3} \cdot \log \operatorname{nat} (a + \alpha - 2x) = C,$$

oder

$$\log \operatorname{nat} p + \log \operatorname{nat} \sqrt[3]{a + \alpha - 2x} = C$$

oder

$$\log \operatorname{nat} (p\sqrt[3]{a + \alpha - 2x}) = C.$$

Mit Veränderung der Konstanten kann man auch setzen

$$\log \operatorname{nat} (p\sqrt[3]{a + \alpha - 2x}) = \log \operatorname{nat} B,$$

woraus

$$p\sqrt[3]{a + \alpha - 2x} = B$$

folgt. Also ist

$$p=\frac{B}{\sqrt[3]{a+\alpha-2x}},$$

und man bekommt durch abermaliges Integriren

$$9)\ y=E-\frac{3B}{4}\cdot\sqrt[3]{(a+\alpha-2x)^2}.$$

Dieses Integral hat aber zwei willkührliche Konstanten, während doch die vorgelegte Differentialgleichung 7) oder 8) nur eine der ersten Ordnung ist. Allein gerade der Umstand, dass durch Gleichung 9) die Gleichung 7) oder 8) identisch werden muss, dient dazu, die eine der Konstanten durch die andere zu bestimmen. Führt man nun die aus 9) für y und p sich ergebenden Ausdrücke in 8) ein, so bleibt (nach ausgeführten Reduktionen) nur $4E+B^3=0$; daraus folgt $B=-\sqrt[3]{4E}$, und Gleichung 9) geht über in

$$10)\ y=E+\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{4E(a+\alpha-2x)^2}$$

$$11)\ (y-E)^3=\frac{27}{16}\cdot E\cdot(a+\alpha-2x)^2.$$

Die dadurch dargestellte Kurve ist die Neil'sche Parabel. Hierbei ist ferner

$$U'=\frac{\alpha-a}{2}\,[4E+\sqrt[3]{4E(a+\alpha-2x)^2}]\cdot\frac{\sqrt[3]{16E^2}}{(\sqrt[3]{16E^2})+\sqrt[3]{(a+\alpha-2x)^2}}$$

und

$$\delta^2 U=-\frac{3\cdot(\alpha-a)}{2\cdot(1+p^2)^2}\cdot[4E+\sqrt[3]{4E\cdot(a+\alpha-2x)^2}]\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

und somit hängt es von E ab, ob ein primäres Grösstes oder Kleinstes stattfindet.

Dritter Fall. Soll man nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x lauter parallele Berührende haben, während die zu dieser Abscisse x gehörigen Berührungspunkte der hier in Betracht zu ziehenden Kurven in verschiedenen (jedoch einander nächstanliegenden) Entfernungen von der Abscissenaxe sich befinden können, diejenige heraussuchen, wobei das U grösser oder kleiner wird als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven, so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx}=0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}=0$, u. s. w.; und Gleichung I. reducirt sich auf

$$\delta U=\frac{\alpha-a}{1+p^2}\cdot p^2\cdot\delta y.$$

Daraus folgt $p=0$, und somit ist $y=A$, d. h. man hat die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Aber eben weil $\frac{d\delta y}{dx}=0$,

$\frac{d\delta^3 y}{dx} = 0$ u. s. w. ist, so ist auch $\delta^3 U = 0$, $\delta^4 U = 0$, u. s. w. und man erkennt, dass von einem primären Grössten oder Kleinsten keine Rede sein kann.

Aufgabe 70.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 216. §. 48.).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, dass für den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt das von der Normale und den beiden Coordinatenaxen eingeschlossene Dreieck grösser oder kleiner wird, als bei allen andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann, während die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen das um das Quadrat dieser Abscisse verminderte Produkt der Abscisse und Subtangente den **bestimmt** gegebenen (positiven oder negativen) Werth A hat.

Es sei (Taf. III. Fig. 5.) S ein beliebig gewählter Punkt, durch welchen die Normale gelegt ist; dann COD das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck, wenn O als Anfangspunkt der Coordinaten gilt. Nun ist die Gleichung der Normale

$$(y'' - y) \,.\, p + x'' - x = 0,$$

wo x'' und y'' die veränderlichen Coordinaten der Normale, und x und y die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Kurve sind, durch den man gerade die Normale legt; ferner ist, wie gewöhnlich, p statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt. Für den Punkt D ist $y'' = 0$, und somit folgt aus obiger Gleichung $OD = x'' = py + x$; für den Punkt C ist $x'' = 0$, und somit folgt aus obiger Gleichung $OC = y'' = \frac{py + x}{p}$. Des Dreiecks OCD Inhalt ist $= \frac{1}{2} \,.\, OC \,.\, OD$ und sonach hat man

$$\text{I)} \quad U = \frac{(py + x)^2}{2p}.$$

Ferner hat man für die hier vorgeschriebene Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad \frac{y}{p} \,.\, x - x^2 = A.$$

Erste Auflösung.

Variirt man Gleichung I., so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = (py + x) \,.\, \left(\delta y + \frac{py - x}{2 \,.\, p^2} \,.\, \frac{d\delta y}{dx}\right)$$

$$\text{IV)}\ \delta^2 U=(py+x).(\delta^2 y+\frac{py-x}{2.p^2}.\frac{d\delta^2 y}{dx})+p\delta y^2+2y.\delta y.\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+\frac{x^2}{p^3}.(\frac{d\delta y}{dx})^2.$$

Aus Gleichung II. aber folgt:

$$\text{V)}\ \frac{d\delta y}{dx}=\frac{p}{y}.\delta y,$$

$$\text{VI)}\ \frac{d\delta^2 y}{dx}=\frac{p}{y}.\delta^2 y,\ \text{u. s. w.}$$

Eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$ aus III., so bekommt man

$$\text{VII)}\ \delta U=\frac{1}{2py}.(py+x).(3py-x).\delta y.$$

Soll nun $\delta U=0$ werden, so muss entweder $3py-x=0$ oder $py+x=0$ sein.

Erstens. Aus $3py-x=0$ folgt $3y^2-x^2=B$. Dieses ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Coordinaten in O anfangen. Man hat aber vor Allem zu untersuchen, ob durch diese Gleichung auch Gleichung II. identisch wird. Man führe also $\sqrt{\frac{1}{3}.(x^2+B)}$ statt y, und $\frac{x}{\sqrt{3(x^2+B)}}$ statt p in Gleichung II. ein, und berücksichtige, dass die Radikale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung haben. Es ergibt sich $\frac{\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+B)}}{\frac{x}{\sqrt{3(x^2+B)}}}.x-x^2=A$, oder $B=A$. Somit ist die vollkommen bestimmte und keiner weitern Nebenbedingung mehr unterliegende Gleichung der gesuchten Hyperbel $3y^2-x^2=A$. Unter diesen Umständen geht Gleichung IV. über in

$$\text{VIII)}\ \delta^2 U=\frac{4x}{\sqrt{\frac{1}{3}.(x^2+A)}}.\delta y^2.$$

Ferner ist $U'=\frac{8x}{3}.\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+A)}$; und man erkennt, dass die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke zweideutig sind, weil sie das Radikal als gemeinschaftlichen Faktor enthalten. In solchen Fällen pflegt man sich dahin zu entscheiden: Es findet ein Kleinstes statt, wenn U' und $\delta^2 U$ einerlei Zeichen haben, und es findet ein Grösstes statt, wenn U' und $\delta^2 U$ entgegengesetzte Zeichen haben. Demnach findet hier ein primäres Kleinstes statt; denn U' und $\delta^2 U$ haben unter allen Umständen einerlei Zeichen.

Zweitens. Aus $py+x=0$ folgt $y^2+x^2=r^2$, d. h. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in O liegt, so dass die Normale durch O geht, und das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck Null wäre. Man untersuche nun vor Allem, ob durch die hiesige Gleichung auch Gleichung II. identisch wird, und führe zu diesem Ende $\sqrt{r^2-x^2}$ statt y, und $\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ statt p in

Gleichung II. ein. Dadurch bekommt man $\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}} \cdot x - x^2 = A$ oder $-(r^2-x^2)-x^2=A$ oder $-r^2=A$, so dass der Kreis nur existiren kann, wenn der Werth A der gegebenen Differenz negativ ist. Unter diesem Umständen ist

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = -\frac{4x}{\sqrt{r^2-x^2}} \cdot \delta y^2.$$

Dieser Ausdruck ist wegen des Radikals $\sqrt{r^2-x^2}$ zweideutig; und da jetzt $U'=0$ nichts mit diesem Radikal zu thun hat, so muss man sich dahin entscheiden, dass hier weder ein Grösstes noch Kleinstes stattfinde. Dieses wird aber auch noch durch folgende Betrachtung bestättigt: Die Aufgabe führt auf einen bestimmten Kreis d. h. auf einen Kreis mit dem bestimmten Halbmesser $\sqrt{-A}$. Aber nicht allein bei diesem Kreise, sondern auch bei allen andern Kreisen wird $U'=0$, so dass man unter allen möglichen Kreisen keinen heraussuchen kann, bei welchem U' grösser oder kleiner sein könnte, als bei allen andern.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Funktion y von x auch der Gleichung II. genügen muss; so wird die gesuchte Funktion irgend ein Integral der Gleichung II. sein. Man integrire also Gleichung II., und forme sie deshalb vorher um in $\frac{dy}{y} = \frac{x \cdot dx}{x^2+A}$. Daraus folgt durch Integration

$$\log \text{nat}\, y = \tfrac{1}{2} \log \text{nat}\, E + \tfrac{1}{2} \cdot \log \text{nat}\, (x^2+A),$$

oder

$$\log \text{nat}\, y = \tfrac{1}{2} \cdot \log \text{nat}\, [E \cdot (x^2+A)],$$

oder

$$\log \text{nat}\, y = \log \text{nat} \sqrt{E(x^2+A)},$$

und sonach ist

$$y = \sqrt{E \cdot (x^2+A)}.$$

Das E muss also so beschaffen sein, dass das Produkt $E.(x^2+A)$ positiv wird.

Führt man nun $\sqrt{E \cdot (x^2+A)}$ statt y, und $\frac{E \cdot x}{\sqrt{E(x^2+A)}}$ statt p in Gleichung I. ein, so bekommt man

$$U' = \frac{x}{2E} \cdot (E+1)^2 \cdot \sqrt{E \cdot (x^2+A)}.$$

Man erkennt nun an der für y gefundenen Funktion, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des E auch stetig neben einander liegende Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an dem für U' hergestellten Ausdrucke, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des E auch stetig neben einander liegende Werthe

des U' gehören. Um nun zu wissen, wenn U' ein primäres Grösstes oder Kleinstes ist, differentiire man U' nach E und man bekommt

$$\frac{dU'}{dE} = \frac{x}{4E^2} \cdot (3E-1) \cdot (E+1) \cdot \sqrt{E(x^2+A)}.$$

Es kann also $\frac{dU'}{dE} = 0$ werden entweder wenn $3E - 1 = 0$ oder wenn $E + 1 = 0$.

Erstens. Wenn $3E - 1 = 0$, so ist $E = \frac{1}{3}$, und man hat $y = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + A)}$ oder $3y^2 - x^2 = A$. Differentiirt man noch ein mal und führt man dann für E den Werth $\frac{1}{3}$ ein; so ist $\frac{d^2U'}{dE^2} = 27x \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + A)}$. Ferner ist $U' = \frac{8x}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + A)}$ und da die für $\delta^2 U$ und U' hergestellten Ausdrücke das Radikal als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so erkennt man, dass $\delta^2 U$ und U' unter allen Umständen einerlei Zeichen haben, und kann sich dahin entscheiden, dass ein primäres Kleinstes stattfinde. Also Alles wie beim ersten Fall der vorigen Auflösung.

Zweitens. Wenn $E + 1 = 0$, so ist $E = -1$ und $y = \sqrt{-x^2 - A}$ oder $y^2 + x^2 = -A$, woraus hervorgeht, dass A jedenfalls negativ sein muss. Ferner ist jetzt $\frac{d^2U'}{dE^2} = -x \cdot \sqrt{-x^2 - A}$. Dieser Ausdruck ist wegen des Radikals zweideutig; und da jetzt $U' = 0$ nichts mit diesem Radikal zu thun hat, so muss man sich dahin entscheiden, dass hier weder ein Grösstes noch ein Kleinstes stattfinde. Dieses kann man auch durch die am Schlusse der vorigen Auflösung gemachte Betrachtung noch weiter bestättigen.

Aufgabe 71.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 216. §. 48.).

Man zieht durch einen beliebigen Punkt einer ebenen Kurve die Berührende. Hierauf fällt man aus zwei in der Ebene irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührende. Welche Kurve ist es aber, wenn die Summe dieser beiden Perpendikel ein primäres Grösstes oder Kleinstes ist, während die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen die Berührenden immer durch den nemlichen gegebenen Punkt gehen?

D sei (Taf. III. Fig. 2.) derjenige feste Punkt, durch welchen die Berührenden aller hier zu betrachtenden Kurven gehen sollen; H und K seien diejenigen Punkte, von welchen aus man Perpendikel auf die Berührende der gesuchten Kurve ziehen soll. Man lege eine Linie OX durch die beiden Punkte H und K, und nehme diese Linie als Abscissenaxe an. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D ein Perpendikel auf OX. Dieses Perpendikel YO nehme man als Ordinatenaxe, so ist der Punkt O der Anfang der Coordinaten. Die hier in Rede stehenden Perpendikel sind HM und KN.

Nun ist $y'-y=(x'-x)\,.\,\frac{dy}{dx}$ die Gleichung der berührenden Graden FT. Für den Punkt D ist $x'=0$, also ist $OD=y'=y-px$. Ferner hat man nach den vorhergehenden Aufgaben $HM=\frac{y+(a-x)\,.\,p}{\sqrt{1+p^2}}$, und $KN=\frac{y+(\alpha-x)p}{\sqrt{1+p^2}}$. Man hat also jetzt die Aufgabe: Es soll

$$\text{I)}\quad U=\frac{2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p}{\sqrt{1+p^2}}$$

ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)}\quad y-px=g$$

stattfindet, wo g einen bestimmten konstanten (positiven oder negativen) Werth hat.

Erste Auflösung.

Man variirt Gleichung I., so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\,.\,[2\,.\,(1+p^2)\,.\,\delta y+(a+\alpha-2x-2py)\,.\,\frac{d\delta y}{dx}].$$

Aus Gleichung II. folgt

$$\text{IV)}\quad \delta y=x\,.\,\frac{d\delta y}{dx}.$$

Führt man diesen für δy gefundenen Ausdruck in Gleichung III. ein; so bekommt man

$$\text{V)}\quad \delta U=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\,.\,(a+\alpha-2\,.\,py+2p^2\,.\,x)\,.\,\frac{d\delta y}{dx}.$$

Es ist also

$$\text{VI)}\quad a+\alpha-2\,.\,py+2p^2\,.\,x=0.$$

Um aber diese Gleichung zu integriren, differentiire man sie zuvor noch einmal, und man bekommt $-2p\,.\,dy-2y\,.\,dp+4px\,.\,dp+2p^2\,.\,dx=0$. Weil aber $dy=p\,.\,dx$, so reducirt sich diese Gleichung auf $2\,.\,(2px-y)\,.\,dp=0$, und dieser Gleichung geschieht Genüge, entweder wenn $dp=0$, oder wenn $2px-y=0$.

Erstens. Wenn $dp=0$, so ist

$$\text{VII)}\quad y=Ax+B,$$

d. h. man hat die gerade Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Gerade zugleich ihre eigene Berührende ist. Diese Gleichung enthält aber zwei willkührliche Konstanten, während doch die vorgegebene Differentialgleichung VI. nur von der ersten Ordnung ist. Aber eben der Umstand, dass VI. durch VII. identisch werden muss, dient dazu, um eine der Konstanten durch die andere zu bestimmen. Man führe also $Ax+B$ statt y, und A statt p in Gleichung VI. überall ein, und reducire so viel als mög-

lich, so bekommt man $a+\alpha-2AB=0$, also $A=\frac{a+\alpha}{2B}$, und Gleichung VII. geht über in

$$\text{VIII)}\quad y=\frac{a+\alpha}{2B}\,.\,x+B.$$

Durch diese Gleichung muss aber auch Gleichung II. identisch werden; man führe also $\frac{a+\alpha}{2B}\,.\,x+B$ statt y, und $\frac{a+\alpha}{2B}$ statt p in Gleichung II. ein, und es ergibt sich $B=g$. Gleichung VIII. geht also über in

$$\text{IX)}\quad y=\frac{a+\alpha}{2g}\,.\,x+g,$$

so dass die Gleichung der gesuchten Graden vollkommen bestimmt ist, und keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Auch ist $U'=\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}$, und unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden ist

$$\delta^2 U=-\frac{16\,.\,g^4}{[(a+\alpha)^2+4g^2]\,.\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}}\,.\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2.$$

Das Radikal $\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}$ ist bei den für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücken gemeinschaftlicher Faktor; und somit erkennt man, dass U' und $\delta^2 U$ unter allen Umständen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Desshalb entscheidet man sich dahin, dass ein **primäres** Grösstes stattfindet. Weil ferner der Werth des U' von x ganz unabhängig ist, so kann von einer sekundären Beziehung keine Rede sein.

Zweitens. Setzt man $2px-y=0$, so bekommt man $y^2=Cx$, d. h. die Gleichung einer **Apollonischen Parabel.** Da aber dieses Integral noch die Gleichung VI. identisch machen muss, so führe man $\sqrt{Cx}$ statt y, und $\frac{C}{2\sqrt{Cx}}$ statt p in Gleichung VI. ein, reducire so viel als möglich, und es bleibt $a+\alpha-\frac{C}{2}=0$; also ist $C=2(a+\alpha)$, und die Gleichung der gesuchten Apollonischen Parabel ist

$$\text{X)}\quad y^2=2(a+\alpha)\,.\,x.$$

Da aber Gleichung X. als Integral von Gleichung VI. gelten muss, während diese Gleichung X. keine willkührliche Konstante mehr enthält, auch kein besonderer Fall von Gleichung VIII. ist, so ist Gleichung X. ein **singuläres** Integral von Gleichung VI. Nun soll aber durch X. auch noch II. identisch werden; man führe also $\sqrt{2(a+\alpha)\,.\,x}$ statt y, und $\frac{1}{2}\,.\sqrt{\frac{2\,.\,(a+\alpha)}{x}}$ statt p in Gleichung II. überall ein; und man bekommt $\frac{1}{2}\,.\sqrt{2(a+\alpha)\,.\,x}=g$. Diese Gleichung ist aber keine identische, und somit kann dieser zweite Fall, welcher auf ein singuläres Integral führt, nicht weiter berücksichtigt werden.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Funktion y von x auch der Gleichung II. genügen muss; so wird die gesuchte Funktion irgend ein Integral von Gleichung II. sein. Man integrire also Gleichung II., und forme sie zu diesem Ende um in $\frac{dy}{y-g}=\frac{dx}{x}$. Daraus folgt $y=cx+g$. Man führe also $cx+g$ statt y, und c statt p in Gleichung I. überall ein, so bekommt man $U'=\frac{2g+(a+\alpha).c}{\sqrt{1+c^2}}$. An der Gleichung $y=cx+g$ erkennt man, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des c auch stetig neben einander liegender Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an der Gleichung $U'=\frac{2g+(a+\alpha)c}{\sqrt{1+c^2}}$, dass zu stetig neben einander liegenden Werthen des c auch stetig neben einander liegende Werthe des U' gehören. Um nun zu wissen, wenn U' ein Grösstes oder Kleinstes ist, differentiire man U' nach c, und es ergibt sich $\frac{dU'}{dc}=\frac{a+\alpha-2gc}{\sqrt{(1+c^2)^3}}$; daraus folgt $a+\alpha-2gc=0$, also $c=\frac{a+\alpha}{2g}$, und man hat wieder

$$\text{XI)}\quad y=\frac{a+\alpha}{2g}.x+g,$$

wie schon in Gleichung X. gefunden ist. Differentiirt man noch ein mal, so bekommt man im Allgemeinen

$$\frac{d^2U'}{dc^2}=-\frac{2g.(1+c^2)+3c.(a+\alpha-2gc)}{\sqrt{(1+c^2)^5}};$$

und wenn man den für c gefundenen Werth einführt, so ist

$$\frac{d^2U'}{dc^2}=-\frac{16g^4}{[(a+\alpha)^2+4g^2].\sqrt{(a+\alpha)^2+4g^2}};$$

daran erkennt man wieder, dass ein primäres Grösstes stattfindet, wie bei der ersten Auflösung.

Es ist bemerkenswerth, dass diese zweite Auflösung nur auf den Fall führt, welcher mit dem in der ersten Auflösung erhaltenen allgemeinen Integral übereinstimmt. Der Grund davon ist aber der, dass das in der ersten Auflösung erhaltene singuläre Integral gar kein Integral der Gleichung II. ist, und somit die zweite Auflösung, welche ganz allein vom Integral der Gleichung II. ausgeht, auch nicht auf besagtes singuläre Integral führen kann. Die zweite Auflösung ist also ebenso vollständig, wie die erste.

Aufgabe 72.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 216. §. 48).

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinaten-

system bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, bei welcher für den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt das von der Normale und den beiden Coordinatenaxen eingeschlossene Dreieck grösser oder kleiner wird, als bei allen andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann, während die gesuchte Kurve nur aus der Zahl derjenigen heraus gewählt werden darf, bei welchen die Differenz, die zwischen dem Quadrate der Normale und dem doppelten Quadrate der Abscisse stattfindet, den bestimmten gegebenen (positiven oder negativen) Werth A hat.

Es ist (Taf. III. Fig. 5.), wie in Aufgabe 70., das Dreieck COD das auf vorgeschriebene Weise begränzte; und sein Inhalt ist

$$\text{I)}\quad U = \frac{(py+x)^2}{2 \cdot p}.$$

Die Normale ist $y \cdot \sqrt{1+p^2}$; und die vorgeschriebene Bedingungsgleichung ist

$$\text{II)}\quad y^2 \cdot (1+p^2) - 2x^2 = A.$$

Variirt man Gleichung I. und II., und eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$; so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{1}{2y \cdot p^2} \cdot (py - x)\,(py + x) \cdot (p^2 - 1) \cdot \delta y.$$

Hier wird $\delta U = 0$, wenn eine von den folgenden drei Gleichungen stattfindet:

$$py - x = 0 \text{ oder } py + x = 0 \text{ oder } p^2 - 1 = 0.$$

Erstens. Setzt man $py - x = 0$, so ergibt sich $y^2 - x^2 = B$, d. h. die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel. Man hat aber vor Allem zu untersuchen, ob dadurch auch Gleichung II. identisch wird; und führe zu diesem Ende $x^2 + B$ statt y^2, und $\frac{x^2}{x^2+B}$ statt p^2 in Gleichung II. ein. Dadurch bekommt man

$$(x^2 + B) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + B}\right) - 2x^2 = A \text{ oder } B = A.$$

Somit ist die vollkommen bestimmte Gleichung der gesuchten gleichseitigen Hyperbel $y^2 - x^2 = A$, welche keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Unter diesen Umständen bekommt man

$$\delta^2 U = \left(\frac{1}{x}\right)^4 \cdot Ax \cdot (\sqrt{x^2+A}) \cdot \delta y^2, \text{ und } U' = 2x \cdot \sqrt{x^2+A}.$$

Da die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke das Radikal $\sqrt{x^2+A}$ als gemeinschaftlichen Faktor enthalten, so muss man, wie in den beiden vorigen Aufgaben, beachten, ob dieselben mit einerlei oder mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Sie sind mit einerlei Vorzeichen versehen, wenn x und Ax gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind; in diesem Falle entscheidet man sich für ein Kleinstes. Widrigenfalls entscheidet man sich für ein Grösstes.

Zweitens. Setze man $py+x=0$, so ergibt sich $y^2+x^2=r^2$ d. h. die **Gleichung eines Kreises.** Führt man aber r^2-x^2 statt y^2 und $\frac{x^2}{r^2-x^2}$ statt p^2 in Gleichung II. ein, so bekommt man $(r^2-x^2).(1+\frac{x^2}{r^2-x^2})-2x^2=A$, woraus $r^2-2x^2=A$ folgt. Letztere Gleichnng ist aber keine identische und somit ist dieser zweite Fall, welcher den Kreis als Resultat liefert, unzulässig.

Drittens. Setzt man $p^2-1=0$, so bekommt man $p=\pm1$, woraus $y=\pm x+C$ folgt. Führt man jetzt $(\pm x+C)^2$ statt y^2, und 1 statt p^2 in Gleichung II. ein, so bekommt man $(\pm x+C)^2.(1+1)-2x^2=A$, woraus $\pm2Cx+2C^2=A$ folgt.

Letztere Gleichung ist aber wieder keine identische, und somit darf dieser dritte Fall, welcher die grade Linie als Resultat liefert, gleichfalls nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 79.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.).

Man hat zwei mit einander parallele Graden, und man sucht eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve, welche in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, dass, wenn man den diesem Punkte der Kurve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und die senkrechten Entfernungen dieses Krümmungsmittelpunktes bis zu den zwei parallelen Graden nimmt, das **Produkt** beider Entfernungen ein **primäres** Grösstes oder Kleinstes, d. h. grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Die beiden gegebenen parallelen Geraden (Taf. III. Fig. 7.) seien MN und PQ. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man auch die Abscissenaxe mit den zwei gegebenen Geraden parallel nimmt.

V sei der zu der grade genommenen Abscisse $OG=x$ gehörige Krümmungsmittelpunkt. VT und VR sind also die beiden in Rede stehenden senkrechten Entfernungen. Die Gleichung der Linie MN sei

$$\text{I)}\quad y'=m,$$

und die Gleichung der Linie PQ sei

$$\text{II)}\quad y''=n.$$

Es ist also $WR=m$ und $WT=n$. Die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist $WV=y+\frac{1+p^2}{q}$; und desshalb ist

$$VR=m-(y+\frac{1+p^2}{q}) \text{ und } VT=n-(y+\frac{1+p^2}{q}),$$

wo wie gewöhnlich zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt wurde. Das hier in Rede stehende Produkt ist

$$\text{III)}\quad U = \left(m - y - \frac{1+p^2}{q}\right) . \left(n - y - \frac{1+p^2}{q}\right).$$

Variirt man, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left(2y - m - n + \frac{2 . (1+p^2)}{q}\right) . \left(\delta y + \frac{2p}{q} . \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} . \frac{d^2\delta y}{dx}\right).$$

Erster Fall. Soll man die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden heraussuchen; so kann nur folgende Gleichung stattfinden:

$$\text{V)}\quad 2y - m - n + \frac{2 . (1+p^2)}{q} = 0.$$

Diese Gleichung formt sich geradezu um in

$$\frac{2 . dx}{2y - m - n} + \frac{dp}{1+p^2} = 0,$$

und wenn man diese Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man

$$\frac{2dy}{2y - m - n} + \frac{pdp}{1+p^2} = 0.$$

Durch Integration bekommt man

$$\log \text{ nat } (2y - m - n) + \log \text{ nat } \sqrt{1+p^2} = C$$

oder mit Aenderung der Konstanten

$$\log \text{ nat } [(2y - m - n) . \sqrt{1+p^2}] = \log \text{ nat } A$$

oder

$$(2y - m - n) . \sqrt{1+p^2} = A.$$

Daraus folgt

$$p = \frac{\sqrt{A^2 - (2y - m - n)^2}}{2y - m - n}, \text{ oder } dx = \frac{(2y - m - n) . dy}{\sqrt{A^2 - (2y - m - n)^2}};$$

und wenn man nochmals integrirt, so ergibt sich

$$x + B = -\tfrac{1}{2} . \sqrt{A^2 - (2y - m - n)^2}$$

oder

$$\text{VI)}\quad (x + B)^2 = \tfrac{1}{4} . A^2 - \tfrac{1}{4} . (2y - m - n)^2$$

oder

$$\text{VII)}\quad \left(y - \frac{m+n}{2}\right)^2 + (x + B)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2.$$

Dieses ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Durchmesser $= A$ ist und dessen Mittelpunkt genau mitten zwischen den beiden gegebenen Parallellinien liegt. Er löst in sofern die Aufgabe, als er in jedem seiner Punkte auch zugleich sein eigener Krümmungskreis ist.

Die beiden willkürlichen Konstanten A und B machen, dass man diesen Kreis noch zwei Nebenbedingungen unterwerfen kann. Dergleichen sind z. B.:

1) Der Kreis soll durch zwei feste Punkte (f, g) und (h, k) gehen. Für diese zwei Punkte geht Gleichung VII. bezüglich über in

$$(g - \frac{m+n}{2})^2 + (f+B)^2 = (\frac{A}{2})^2,$$

und

$$(k - \frac{m+n}{2})^2 + (h+B)^2 = (\frac{A}{2})^2$$

und mittelst dieser beiden Gleichungen lassen sich bestimmte Werthe für A und B ermitteln. Oder

2) Die gesuchte Kurve soll durch den festen Punkt (f, g) gehen und die zu diesem Punkte gehörige Berührende soll mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= K$. Aus Gleichung VII. folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2 - (x+B)^2}};$$

und man hat jetzt folgende zwei Gleichungen:

$$(g - \frac{m+n}{2})^2 + (f+B)^2 = (\frac{A}{2})^2$$

und

$$K = -\frac{f+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2 - (f+B)^2}};$$

und mittelst dieser beiden Gleichungen lassen sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln. Oder

3) Die gesuchte Kurve soll durch den festen Punkt (f, g) gehen und die zu der bestimmten Abscisse h gehörige Berührende soll mit der Abscisse einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= K$. Hier hat man folgende zwei Gleichungen

$$(g - \frac{m+n}{2})^2 + (f+B)^2 = (\frac{A}{2})^2$$

und

$$K = -\frac{h+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2 - (h+B)^2}},$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen. Oder

4) Die zur festen Abscisse f gehörige Normale und Subnormale sollen bezüglich die Längen h und k haben. Hier bekommt man die Gleichungen

$$h = \frac{A}{2}, \text{ und}$$

$$K = -[\frac{m+n}{2} + \sqrt{(\frac{A}{2})^2 - (f+B)^2}] \cdot \frac{f+B}{\sqrt{(\frac{A}{2})^2 - (f+B)^2}},$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen. Oder

5) Bei der festen Abscisse f soll der Quotient der Subtangente in die Subnormale den bestimmten Werth g haben; und bei der festen Abscisse h soll derselbe Quotient den festen Werth k haben. Hier bekommt man die beiden Gleichungen

$$g = \frac{(f+B)^2}{(\frac{A}{2})^2 - (f+B)^2}, \text{ und } k = \frac{(h+B)^2}{(\frac{A}{2})^2 - (h+B)^2},$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen.

Dergleichen Nebenbedingungen kann man in beliebiger Menge aufstellen. Was für Nebenbedingungen man aber auch aufstellen mag, so folgt doch aus Gleichung VI ganz unbedingt $y + \frac{1+p^2}{q} = \frac{m+n}{2}$. Dabei geht Gleichung III. über in $U' = -\frac{1}{4}.(m-n)^2$, d. h. U' ist negativ und unabhängig von dem beliebigen Werthe des x. Variirt man noch einmal, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = 2.(\delta y + \frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2,$$

woran man erkennt, dass in der That ein primäres Kleinstes stattfindet. Ein negativer Ausdruck gilt aber für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null entfernt ist.

Zweiter Fall. Soll man aber nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche alle den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkt mit einander gemein haben, diejenige heraussuchen, wobei das vorgegebene Produkt grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so haben alle hier in Betracht zu ziehenden Kurven bei der gerade gewählten Abscisse x auch einerlei Ordinate. Es ist also $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, u. s. w.; und Gleichung IV. reducirt sich auf

$$\text{IX)}\quad \delta U = (2y - m - n + \frac{2.(1+p^2)}{q}).(\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})$$

Daraus folgt aber wieder Gleichung V. und VII.; und Gleichung VIII. reducirt sich auf

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = 2.(\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2.$$

Und so fort.

Aufgabe 80.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.)

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Kurven diejenige heraussuchen, bei welcher der zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu diesem

Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunkt mit zwei festen Punkten (a, b) und (α, β) verbindet, die Summe der Quadrate beider Verbindungslinien grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Der Krümmungsmittelpunkt habe die Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die Entfernung des festen Punktes (a, b) bis zum Krümmungsmittelpunkte ist also $\sqrt{(\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{y}-b)^2}$; und die Entfernung des festen Punktes (α, β) bis zum Krümmungsmittelpunkte ist $\sqrt{(\mathfrak{x}-\alpha)^2+(\mathfrak{y}-\beta)^2}$. Die Aufgabe führt also zunächst auf den Ausdruck

$$\text{I)}\quad U=[(\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{y}-b)^2]+[(\mathfrak{x}-\alpha)^2+(\mathfrak{y}-\beta)^2].$$

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe der gesuchten Kurve durch die beiden festen Punkte (a, b) und (α, β) legt. Dabei ist $b=0$ und $\beta=0$ und Gleichung I. reducirt sich auf

$$\text{II)}\quad U=(\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{x}-\alpha)^2+2\,.\,\mathfrak{y}^2.$$

Nun ist $\mathfrak{x}=x-\frac{(1+p^2)\,.\,p}{q}$ und $\mathfrak{y}=y+\frac{1+p^2}{q}$, wo, wie gewöhnlich zur Abkürzung p anstatt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt ist. Gleichung II. geht nun über in

$$\text{III)}\quad U=\left(x-a-\frac{(1+p^2)\,.\,p}{q}\right)^2+\left(x-\alpha-\frac{(1+p^2)\,.\,p}{q}\right)^2$$
$$+2\,.\,\left(y+\frac{1+p^2}{q}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck soll ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden. Durch Variiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U=\frac{4}{q}\,.\,(1+p^2+y\,.\,q)\,.\,\delta y$$
$$+\frac{2}{q^2}\,.\,[6p\,.\,(1+p^2)^2-(1+3p^2)\,.\,(2x-a-\alpha)\,.\,q+4ypq]\,.\,\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+\frac{2\,.\,(1+p^2)}{q^2}\,.\,[(2x-a-\alpha)\,.\,pq-2yq-2\,.\,(1+p^2)^2]\,.\,\frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{V)}\quad 1+p^2+q\,.\,y=0$$
$$\text{VI)}\quad 6p\,.\,(1+p^2)^2-(1+3p^2)\,.\,(2x-a-\alpha)\,.\,q+4ypq=0$$
$$\text{VII)}\quad (2x-a-\alpha)\,.\,pq-2yq-2\,.\,(1+p^2)^2=0.$$

Diese Gleichungen werden einfacher, wenn man x statt $x-\frac{a+\alpha}{2}$ setzt; denn sie gehen bezüglich über in

$$\text{VIII)}\quad 1+p^2+q\,.\,y=0$$

$$\text{IX)}\quad 3p\,.\,(1+p^2)^2-(1+3p^2)\,.\,zq+2ypq=0,$$

$$\text{X)}\quad z\,.\,pq-y\,.\,q-(1+p^2)^2=0.$$

Gleichung VIII. ist die einfachste; sie kann auch auf folgende Weise: $1+p\,.\,\frac{dy}{dz}+\frac{dp}{dz}\,.\,y=0$, oder auf folgende Weise: $dz+p\,.\,dy+y\,.\,dp=0$ geschrieben werden, und daraus folgt zunächst

$$\text{XI)}\quad z+p\,.\,y=A.$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit $z\,.\,dz+y\,.\,dy=A\,.\,dz$, und daraus folgt weiter

$$\text{XII)}\quad z^2+y^2=2Az+B.$$

Man sehe nun zu, ob durch diese Gleichung auch IX. und X. identisch werden. Aus XII. folgt $y=\sqrt{B+2Az-z^2}$,

$$p=\frac{A-z}{\sqrt{B+2Az-z^2}}\text{ und }q=-\frac{A+B}{(B+2Az-z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke in Gleichung IX. ein, so bekommt man nach gehörigen Reductionen

$$\frac{A\,.\,(A^2+B)\,.\,(3A^2+B-4Az+2z^2)}{(B+2Az-z^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Diese Gleichung wird identisch, wenn $A=0$ ist. Gleichung XII. zieht sich also zurück auf

$$\text{XIII)}\quad z^2+y^2=B;$$

und dadurch werden die Gleichungen VIII. und IX. zugleich identisch; man hat also noch zu untersuchen, ob dadurch auch Gleichung X. identisch wird. Aus XIII. folgt

$$y=\sqrt{B-z^2},\ p=-\frac{z}{\sqrt{z^2-B}}\text{ und }q=-\frac{B}{(B-z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man aber diese für y, p, q zuletzt hergestellten Ausdrücke in Gleichung X. ein, so findet man, dass sie in der That identisch wird. Führt man für z seinen Ausdruck wieder zurück, so geht Gleichung XIII. über in

$$\text{XIV)}\quad y^2+\left(x-\frac{a+\alpha}{2}\right)^2=B,$$

und durch diese Gleichung werden die Gleichungen V., VI., VII. zugleich identisch. Letztere Gleichung stellt aber einen jeden beliebigen Kreis vor, dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt, und zwar da, wo $x=\frac{a+\alpha}{2}$ ist. Gleichung III. geht nun über in

$$\text{XV)}\quad U'=2\,.\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2,$$

d. h. U' ist konstant, und unabhängig von x und von der willkührlichen Konstanten B. Variirt man noch einmal, so bekommt man

$$\text{XVI)}\ \delta^2 U = 4(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2})^2$$
$$+ 4(\frac{1+3 \cdot p^2}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2})^2,$$

woran man erkennt, dass ein primäres Kleinstes stattfindet.

Zweiter Fall. Soll man aber nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche alle sowohl den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkt, als auch die zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Berührende mit einander gemeinschaftlich haben, diejenige heraussuchen, bei welcher die vorgegebene Summe grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so müssen bei der gerade gewählten Abscisse x folgende Gleichungen

$$\delta y = 0,\ \frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \text{ u. s. w.}$$

stattfinden. Desshalb reducirt sich Gleichung IV. auf

$$\text{XVII)}\ \delta U = \frac{2 \cdot (1+p^2)}{q^3} \cdot [(2x - a - \alpha) \cdot p \cdot q - 2y \cdot q$$
$$- 2 \cdot (1+p^2)^2] \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Es findet also jetzt nur die Gleichung VII. oder X. statt. Wenn man $p^2 \cdot qy - p^2 \cdot qy$ zu Gleichung X. addirt, so geht sie über in

$$(1+p^2) \cdot qy + (1+p^2)^2 - (py+z) \cdot pq = 0,$$

und diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt. Thut man dieses, so bekommt man

$$\frac{qy + 1 + p^2}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(py+z) \cdot pq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nun geradezu integriren, und man bekommt

$$\text{XVIII)}\ \frac{py+z}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = C.$$

Aus dieser Gleichung folgt $y = -\frac{z}{p} + \frac{C \cdot \sqrt{1+p^2}}{p}$; und wenn man auf beiden Seiten differentiirt, und dann $p \cdot dz$ statt dy setzt, so bekommt man

$$p \cdot (1+p^2) dz + (\frac{C}{\sqrt{1+p^2}} - z) \cdot dp = 0.$$

Der integrirende Faktor zu dieser Gleichung ist $\frac{1}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$; und multiplicirt man letztere Gleichung damit, so bekommt man

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} \cdot dz - \frac{z \cdot dp}{p^2 \sqrt{1+p^2}} + \frac{C \cdot dp}{p^2 \cdot (1+p^2)} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nun geradezu integriren, und man bekommt

$$\text{XIX)}\quad \frac{z\sqrt{1+p^2}}{p} + C.(-\frac{1}{p} - \text{arctang } p) = E.$$

Führt man $x - \frac{a+\alpha}{2}$ statt z in die Gleichung XVIII. und XIX. zurück, so kann man für x und y folgende Ausdrücke herstellen:

$$\text{XX)}\quad x = \frac{a+\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.(C + Ep + C.p.\text{arctang } p)$$

$$\text{XXI)}\quad y = \frac{1}{p.\sqrt{1+p^2}}.(Cp^2 - E.p - Cp.\text{arctang } p).$$

Die hier gesuchte Kurve ist, wie es oft geschieht, durch zwei Gleichungen gegeben, und kann durch ihre Tangenten konstruirt werden. Widrigenfalls hätte man aus XX. und XXI. das p zu eliminiren, und so eine einzige Gleichung zwischen x und y herzustellen. Variirt man bei Gleichung XVII. den in den eckigen Klammern stehenden Faktor noch einmal, so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{2.(1+p^2)}{q^2}.[(2x-a-\alpha).p - 2y].(\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2.$$

Aus Gleichung X. folgt aber $(2x-a-\alpha).p - 2y = 2\frac{(1+p^2)^2}{q}$, und somit ist

$$\delta^2 U = 4(1+p^2).(\frac{1+p^2}{q^2})^2.(\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2,$$

woran man erkennt, dass ein primäres Kleinstes statt findet.

Dritter Fall. Soll man aber nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche alle bei den gerade für x genommenen Werthe nicht nur fur y einerlei (aber einen nicht gegebenen) Werth, sondern auch für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einerlei (aber gleichfalls einen nicht gegebenen) Werth liefern, diejenige heraussuchen, bei welcher die vorgegebene Summe grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so müssen bei der gerade gewählten Abscisse x folgende Gleichungen:

$$\delta y = 0,\ \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0,\ \text{u. s. w.}$$

stattfinden. Desshalb reducirt sich Gleichung IV. auf

$$\text{XXII)}\quad \delta U = \frac{2}{q^2}.[6p.(1+p^2)^2 - (1+3p^2).(2x-a-\alpha).q + 4ypq].\frac{d\delta y}{dx}.$$

Es findet also jetzt nur die einzige Gleichung IV. oder IX. statt. Wenn man $3y.p^3.q + y.p.q - 3y.p^3.q - y.p.q$ zu IX. addirt, so kann man ihr folgende Form geben

$$3y.p.q(1+p^2) + 3.p.(1+p^2)^2 - q.(yp+z) - 3p^2.q.(yp+z) = 0$$

oder

$$3p\,.\,(1+p^2)\,.\,(yq+1+p^2)-(yp+x)\,.\,(q+3\,.\,p^2\,.\,q)=0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{3(p+p^3)^{\frac{4}{3}}}$ multiplicirt; und thut man dieses, so bekommt man

$$\frac{y\,.\,q+1+p^2}{(p+p^3)^{\frac{1}{3}}}-\frac{(y\,.\,p+x)\,.\,(q+3\,.\,p^2\,.\,q)}{3\,.\,(p+p^3)^{\frac{4}{3}}}=0.$$

Integrirt man, so bekommt man $\frac{y\,.\,p+x}{\sqrt[3]{p+p^3}}=F$, oder

$$\text{XXIII)}\quad yp+x=F\,.\,\sqrt[3]{p+p^3}.$$

Wenn man Gleichung XXIII. auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man zunächst $y\,.\,dp+p\,.\,dy+dx=\frac{F}{3}\,.\,\frac{(1+3p^2)\,.\,dp}{(p+p^3)^{\frac{2}{3}}}$; und wenn man diese ganze Gleichung mit $p=\frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man

$$py\,.\,dp+(p^2+1)\,.\,dy=\frac{F}{3}\,.\,\frac{(p+3p^3)\,.\,dp}{(p+p^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt; und thut man dieses, so ergibt sich

$$\frac{py\,.\,dp}{\sqrt{1+p^2}}+dy\sqrt{1+p^2}=\frac{F}{3}\,.\,\frac{(p+3p^3)\,.\,dp}{(\sqrt{1+p^2})\,.\,(p+p^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren und es ergibt sich

$$\text{XXIV)}\quad y\sqrt{1+p^2}=G+\frac{F}{3}\,.\int\frac{(p+3p^3)\,.\,dp}{(\sqrt{1+p^2})\,.\,(p+p^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Führt man $x-\frac{a+\alpha}{2}$ statt x in Gleichung XXIII. ein, so kann man sie auf folgende Weise schreiben:

$$\text{XXV)}\quad yp+x-\frac{a+\alpha}{2}=F\,.\,\sqrt[3]{p+p^3}.$$

Auch die jetzige Kurve ist durch zwei Gleichungen gegeben und man hat zu verfahren, wie schon im zweiten Falle angegeben wurde. Das Prüfungsmittel wird hergestellt, indem man bei Gleichung XXII. den in den eckigen Klammern stehenden Faktor variirt, und dabei beachtet, dass $\delta y=0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}=0$, u. s. w. ist.

Aufgabe 82.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.).

Es sind zwei in einer Ebene gelegene sich schneidende und auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogene Gerade

gegeben. Man sucht eine auf das nemliche Coordinatensystem bezogene Kurve, welche in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, dass, wenn man den diesem Punkte der Kurve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und von diesem Krümmungsmittelpunkte Perpendikel auf die zwei gegebenen Geraden zieht, das Produkt beider Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann.

Die Linien MN und PQ seien (Taf. III. Fig. 8.) die beiden gegebenen Geraden und V sei der zur Abscisse OG gehörige Krümmungsmittelpunkt der gesuchten Kurve. VR und VT sind also die zwei in Rede stehenden Perpendikel. Die Gleichung der Linie MN sei

$$\text{I)}\quad A \,.\, x' + B \,.\, y' + C = 0$$

und die Gleichung der Linie PQ sei

$$\text{II)}\quad \mathfrak{A} \,.\, x'' + \mathfrak{B} \,.\, y'' + \mathfrak{C} = 0.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes V seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$; so ist die Entfernung des Punktes V von der Linie MN bekanntlich

$$\text{III)}\quad VR = \frac{A \,.\, \mathfrak{x} + B \,.\, \mathfrak{y} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

und des Punktes V Entfernung von der Linie PQ ist ebenso

$$\text{IV)}\quad VT = \frac{\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{x} + \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{y} + \mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}.$$

Erst wenn man die gesuchte Kurve und den Krümmungsmittelpunkt gefunden hat, ist es möglich, zu entscheiden, welche Bedeutung man einem jeden der Radikale $\sqrt{A^2 + B^2}$ und $\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$ beilegen muss. Das in Rede stehende Produkt ist also

$$\text{V)}\quad U = \frac{(A \,.\, \mathfrak{x} + B \,.\, \mathfrak{y} + C) \,.\, (\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{x} + \mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{y} + \mathfrak{C})}{(\sqrt{A^2 + B^2}) \,.\, (\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}.$$

Nun ist $\mathfrak{x} = x - \frac{p \,.\, (1 + p^2)}{q}$ und $\mathfrak{y} = y + \frac{1 + p^2}{q}$; und wenn man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ diese Ausdrücke in V. einführt, und zur Abkürzung noch $\mathfrak{Q}$ statt $\frac{1}{(\sqrt{A^2 + B^2}) \,.\, (\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}$ setzt, so geht V. über in

$$\text{VI)}\quad U = \mathfrak{Q} \,.\, \left[Ax + By + C + \frac{1 + p^2}{q} \,.\, (B - Ap)\right] \,.$$
$$\left[\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C} + \frac{1 + p^2}{q} \,.\, (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}p)\right].$$

Wenn man jetzt diesen Ausdruck variirt, so ergeben sich sehr weitläuftige Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung, und es wäre bei deren Integration ein nicht geringer Grad von Aufmerksamkeit nöthig. Desshalb ist es räthlich, sich vor Allen umzuschauen, ob man nicht einen einfachern Ausdruck statt Gleichung VI. gewinnen kann. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe

nicht, wenn man eine der gegebenen Graden als Abscissenaxe annimmt, und den Anfangspunkt der Coordinaten in jenen Punkt verlegt, wo sich die beiden gegebenen Graden schneiden. Unter A und $\mathfrak{A}$ sind bekanntlich die Sinus der Winkel zu verstehen, welche von den gegebenen Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen werden; eben so sind unter B und $\mathfrak{B}$ die Cosinus der Winkel zu verstehen, welche von den gegebenen Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen werden. Soll nun die durch Gleichung I. dargestellte Gerade MN als Abscissenaxe und KY' als Ordinatenaxe angenommen werden, so ist $A=0$ und $B=1$, und Gleichung I. reducirt sich zunächst auf $y'+C=0$. Weil aber jetzt $y'=0$ sein muss bei jedem Werthe des x, so ist auch $C=0$; und der Ausdruck III. reducirt sich zunächst auf den bekannten Ausdruck:

$$\text{VII)}\quad VR = y + \frac{1+p^2}{q}.$$

Da ferner die durch Gleichung II. dargestellte Grade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so ist $\mathfrak{C}=0$ und Gleichung II. reducirt sich zunächst auf $\mathfrak{A} \,.\, x'' + \mathfrak{B} \,.\, y'' = 0$ oder auf $y'' + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \,.\, x'' = 0$; und wenn man zur Abkürzung $-m$ statt $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ setzt, so ist $y'' - mx'' = 0$. Der Ausdruck IV. geht über in

$$\text{VIII)}\quad VT = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \,.\, \left[-mx + y + \frac{1+p^2}{q} \,.\, (1+mp)\right].$$

Erst, wenn man die gesuchte Kurve und den Krümmungsmittelpunkt gefunden hat, ist es möglich zu entscheiden, welche Bedeutung man dem Radikal $\sqrt{1+m^2}$ beilegen muss. Das in Rede stehende Produkt ist also

$$\text{IX)}\quad U = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \,.\, \left[y + \frac{1+p^2}{q}\right] \,.\, \left[-mx + y + \frac{1+p^2}{q}(1+mp)\right].$$

Variirt man nun, so bekommt man

$$\text{X)}\ \delta U = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \Big\{ \Big[2y - mx + \frac{(2+mp) \cdot (1+p^2)}{q}\Big] \cdot \delta y$$
$$+ \frac{1}{q}\Big[my + 4yp - 2mxp + 3m \cdot y \cdot p^2 + \frac{(m+4p+5m \cdot p^2)(1+p^2)}{q}\Big] \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- \frac{1}{q^2} \cdot \Big[2y - mx + myp + \frac{2 \cdot (1+mp) \cdot (1+p^2)}{q}\Big] \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\Big\}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden; so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{XI)}\ 2y - mx + \frac{(2+mp) \cdot (1+p^2)}{q} = 0$$

$$\text{XII)}\ my + 4yp - 2mxp + 3my \cdot p^2 + \frac{(m+4p+5m \cdot p^2) \cdot (1+p^2)}{q} = 0$$

$$\text{XIII)}\ 2y - mx + myp + \frac{2 \cdot (1+mp)\ (1+p^2)}{q} = 0.$$

Gleichung XI. ist die einfachste; sie soll auch zuerst integrirt werden. Zunächst geht sie über in $2yq + 2 + 2p^2 - mxq + mp + mp^3 = 0$. Man addire $mpqy - mpqy$ zu dieser Gleichung, so kann man sie auf folgende Weise schreiben:

$$(qy + 1 + p^2) \cdot (2 + mp) - (py + x) \cdot mq = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{q}{(2+mp)^2}$ multiplicirt; und thut man dieses, so geht sie über in

$$\frac{qy+1+p^2}{2+mp}-\frac{(py+x).mq}{(2+mp)^2}=0.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren und es ergibt sich

$$\text{XIV)}\ \frac{py+x}{2+m.p}=H.$$

Daraus folgt $yp-mHp=2H-x$; und integrirt man wieder, so bekommt man

$$\tfrac{1}{2}.y^2-mHy=2Hx-\tfrac{1}{2}.x^2+\tfrac{1}{2}G$$

oder

$$y^2-2mHy=4Hx-x^2+G$$

oder

$$y^2-2mHy+m^2H^2+x^2-4Hx+4H^2=G+(4+m^2).H^2$$

oder

$$\text{XV)}\ (y-mH)^2+(x-2H)^2=G+(4+m^2)H^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt da liegt, wo $x=2H$ und $y=mH$ ist. Aus XV. folgt

$$y=mH+\sqrt{G+m^2.H^2-x^2+4Hx},$$

und daraus folgt weiter

$$p=\frac{-x+2H}{\sqrt{G+m^2.H^2-x^2+4Hx}}$$

und

$$q=\frac{-G-(m^2+4).H^2}{(G+m^2.H^2-x^2+4Hx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese für y, p, q hergestellten Ausdrücke hat man in die Gleichung XII. und XIII. einzuführen; und man findet, dass diese identisch werden, wenn $H=0$. Gleichung XV. reducirt sich also auf

$$\text{XVI)}\ y^2+x^2=G.$$

Dieses ist aber die Gleichung eines jeden beliebigen Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten d. h. im Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Graden liegt. Variirt man noch einmal, und beachtet man, dass jetzt sowohl $y+\frac{1+p^2}{q}=0$ als auch $-mx+\frac{mp.(1+p^2)}{q}=0$ wird; so bleibt nur

$$\delta^2U=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}.[(\delta y+\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx}-\frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})^2$$
$$+m(\delta y+\frac{2p}{q}.\frac{d\delta y}{dx}-\frac{1+p^2}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2}).(\frac{1+3p^2}{q}.\frac{d\delta y}{dx}$$
$$-\frac{p.(1+p^2)}{q^2}.\frac{d^2\delta y}{dx^2})].$$

Der innerhalb der eckigen Klammer stehende Faktor kann, wie man geradezu erkennt, nicht immer einerlei Zeichen behalten, und somit findet jetzt weder ein Grösstes noch Kleinstes statt.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe, so ist

$$\delta y = 0,\ \frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \delta^2 y = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Gleichung X. zieht sich also zurück auf

$$\text{XVII)}\ \delta U = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \left[2y - mx + mpy + \frac{2 \cdot (1+mp) \cdot (1+p^2)}{q}\right] \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Man hat also jetzt nur die einzige Gleichung

$$\text{XVIII)}\ 2y - mx + mpy + \frac{2 \cdot (1+mp) \cdot (1+p^2)}{q} = 0$$

oder

$$2yq + mpyq + 2 \cdot (1+p^2) \cdot (1+mp) - mxq = 0.$$

Wenn man hier $mpyq - mpyq$ addirt, so kann man letzterer Gleichung auch folgende Form geben:

$$2yq(1+mp) + 2 \cdot (1+p^2) \cdot (1+mp) - mq \cdot (yp+x) = 0$$

oder

$$2 \cdot (yq + p^2 + 1) \cdot (1+mp) - mq \cdot (yp+x) = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{2 \cdot (1+mp)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt; und thut man dieses, so bekommt man

$$\frac{yq + p^2 + 1}{(1+mp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{mq \cdot (yp+x)}{2 \cdot (1+mp)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung kann man geradezu integriren und es ergibt sich

$$\text{XIX)}\ \frac{yp+x}{\sqrt{1+mp}} = E.$$

Daraus folgt $yp + x = E \cdot \sqrt{1+mp}$; und wenn man hier auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man

$$y \cdot dp + p \cdot dy + dx = \frac{E}{2} \cdot \frac{m \cdot dp}{\sqrt{1+mp}}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$yp \cdot dp + (1+p^2) \cdot dy = \frac{E}{2} \cdot \frac{mp \cdot dp}{\sqrt{1+m \cdot p}}.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt und dadurch geht sie über in

$$\frac{yp\,.\,dp}{\sqrt{1+p^2}}+dy\,.\sqrt{1+p^2}=\frac{E}{2}\,.\,\frac{m}{\sqrt{1+mp}}\,.\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,dp.$$

Durch Integration bekommt man

$$\text{XX)}\quad y\,.\sqrt{1+p^2}=F+\frac{E}{2}\,.\int\frac{m}{\sqrt{1+mp}}\,.\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,.\,dp.$$

Die hier gesuchte Kurve ist also durch zwei Gleichungen gegeben (XIX. und XX.); das Radikal $\sqrt{1+mp}$ hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung; eben so hat das Radikal $\sqrt{1+p^2}$ entweder durchweg seine negative oder durchweg seine positive Bedeutung; übrigens ist das Zeichen des Radikals $\sqrt{1+mp}$ vom Zeichen des Radikals $\sqrt{1+p^2}$ ganz unabhängig.

Dritter Fall. Macht man hier dieselbe Einschränkung wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe, so ist

$$\delta y=0,\ \frac{d^2\delta y}{dx^2}=0,\ \delta^2 y=0,\ \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}=0,\ \text{u. s. w.;}$$

und Gleichung X. zieht sich zurück auf

$$\delta U=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\,.\,\frac{1}{q}\Big[my+4yp-2mxp+3my\,.\,p^2+\frac{(m+4p+5m\,.\,p^2)\,(1+p^2)}{q}\Big]\,.\,\frac{d\delta y}{dx}.$$

Man hat also nur die einzige Gleichung

$$\text{XXI)}\quad my+4yp-2mxp+3my\,.\,p^2+\frac{(m+4p+5m\,.\,p^2)\,.\,(1+p^2)}{q}=0$$

oder

$$\text{XXII)}\quad myq+4ypq-2mx\,.\,pq+3my\,.\,p^2\,.\,q+m+4p+6m\,.\,p^2+4p^3+5m\,.\,p^4=0.$$

Ich will, um nicht zu weitläuftig zu werden, es unterlassen, hier an dieser Stelle die Methode mitzutheilen, nach welcher ich letztere Gleichung integrirt habe. Das Integral selbst ist

$$\text{XXIII)}\quad yp+x=L\,.\,\frac{[m+(2-\sqrt{4-5\,.\,m^2})\,.\,p]^{\frac{2+\sqrt{4-5\,.\,m^2}}{5\,.\sqrt{4-5\,.\,m^2}}}}{[m+(2+\sqrt{4-5\,.\,m^2})\,.\,p]^{\frac{2-\sqrt{4-5m^2}}{5\,.\sqrt{4-5m^2}}}}.$$

Von der Richtigkeit dieses Integrals kann man sich überzeugen, wenn man Gleichung XXIII. differentiirt, und dann aus der sich ergebenden Differentialgleichung und aus XXIII. das L eliminirt. Man wird genau Gleichung XXII. wieder bekommen. Setzt man nun statt XXIII. zur Abkürzung

$$\text{XXIV)}\quad yp + x = L \cdot \varphi p$$

und differentiirt man, so ergibt sich

$$y \cdot dp + p \cdot dy + dx = L \cdot d(\varphi p).$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt; denn es ergibt sich

$$\frac{py \cdot dp}{\sqrt{1+p^2}} + dy \cdot \sqrt{1+p^2} = L \cdot \frac{p \cdot d(\varphi p)}{\sqrt{1+p^2}},$$

und integrirt man wirklich, so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad y \cdot \sqrt{1+p^2} = M + L \cdot \int \frac{p \cdot d(\varphi p)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Die hier gesuchte Kurve ist also wieder durch zwei Gleichungen (XXIII. und XXV.) gegeben. Das Radikal $\sqrt{4-5 \cdot m^2}$ hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung; dasselbe gilt von dem Radikal $\sqrt{1+p^2}$. Uebrigens ist das Zeichen des Radikals $\sqrt{1+p^2}$ von dem des $\sqrt{4-5 \cdot m^2}$ ganz unabhängig.

Aufgabe 83.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 220. §. 49—51.)

Man hat eine Menge von unter sich parallelen Graden, und man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. In den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt dieser Kurve legt man den Krümmungskreis, welcher eine jede dieser Parallellinien zweimal durchschneidet, so dass jedes der auf diesen Parallellinien abgeschnittenen Stücke eine Sehne des Krümmungskreises bildet. Die gesuchte Kurve soll in dem zu der gerade nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate aller obgenannten Sehnen grösser oder kleiner wird als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann. Welche Kurve wird gesucht?

Die unter sich parallelen Geraden (Taf. III. Fig. 9.) seien MP, NO, u. s. w. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe senkrecht auf die besagten Parallellinien zieht. Wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und x' und y' die Coordinaten des Krümmungskreises sind; so ist

$$\text{I)}\quad (y' - \mathfrak{y})^2 + (x' - \mathfrak{x})^2 = \varrho^2$$

die Gleichung des Krümmungskreises. Daraus folgt

$$\text{II)}\quad y' = \mathfrak{y} \pm \sqrt{\varrho^2 - (x' - \mathfrak{x})^2}.$$

Nun ist $\mathfrak{y} = y + \frac{1+p^2}{q}$, $\mathfrak{x} = x - \frac{p+p^3}{q}$, und $\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$; und wenn man diese Ausdrücke in II. einführt, so bekommt man

$$\text{III)}\quad y' = y + \frac{1+p^2}{q} \pm \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(x'-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (x'-x)^2}.$$

Man erkennt, dass es für y' zwei verschiedene Ausdrücke gibt, d. h. zu jeder beliebigen Abscisse x' gibt es zwei verschiedene Ordinaten. Setzt man die Abssisse $OM = a_1$, so geht dabei Gleichung III. über in

$$\text{IV)}\quad y'_{a_1} = y + \frac{1+p^2}{q} \pm \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2.(a_1-x).\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2}$$

Dadurch sind die zu OM gehörigen Ordinaten Mm und Mw zugleich ausgedrückt; und zwar ist

$$Mm = y + \frac{1+p^2}{q} - \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2(a_1-x).\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2}$$

und

$$Mw = y + \frac{1+p^2}{q} + \sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2.(a_1-x).\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2}.$$

Die Sehne mw ist also $= Mw - Mm$, d. h. es ist

$$mw = 2\sqrt{(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2}$$

und daraus folgt

$$\text{V)}\quad \overline{mw}^2 = 4\,.\,[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2].$$

Setzt man ferner die Abscisse $ON = a_2$, so bekommt man auf gleiche Weise

$$\text{VI)}\quad \overline{uv}^2 = 4[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_2-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_2-x)^2]$$

und sofort. Und setzt man endlich die letzte Abscisse $OR = a_n$, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \overline{rs}^2 = 4\,.\,[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_n-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_n-x)^2].$$

Die Aufgabe führt also auf folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\text{VIII)}\quad U = {} & 4[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_1-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2] \\ & + 4[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_2-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_1-x)^2] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 4.[(\frac{1+p^2}{q})^2 - 2\,.\,(a_n-x)\,.\,\frac{p+p^3}{q} - (a_n-x)^2].\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man noch umformen in

$$\text{IX)}\quad U = 4n \, . \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 + 8n \, . \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\right) . \frac{p+p^3}{q.}$$
$$-4 \, . \left[(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a_n - x)^2\right].$$

Durch Variiren bekommt man

$$\text{X)}\quad \delta U = \frac{8n}{q^2} . \left[2p \, . (1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\right) . (1+3p^2) \, . \, q\right] . \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- \frac{8n}{q^2} . \left[(1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}\right) pq\right] . (1+p^2) \, . \frac{d^2\delta y}{dx^2}.$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende zwei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{XI)}\quad 2p \, . (1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\right) . (1+3p^2) \, . \, q = 0$$

$$\text{XII)}\quad 1 + p^2 + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}\right) . \, p \, . \, q = 0.$$

Man erkennt aber geradezu, dass es keine Funktion von x gibt, welche diese beiden Gleichungen zugleich identisch macht.

Zweiter Fall. Soll man nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x lauter parallele Berührende haben, diejenige heraussuchen, wobei die Summe der Quadrate aller auf vorgeschriebene Weise begränzter Sehnen grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so ist bei der gerade genommenen Abscisse x jetzt $\frac{d\delta y}{dx}=0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}=0$, u. s. w. Gleichung X. reducirt sich also auf

XIII) $\delta U = -\frac{8n}{q^4}\cdot[1+p^2+(x-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}).p.q].(1+p^2).\frac{d^2\delta y}{dx}$

Man hat also jetzt die einzige Gleichung

XIV) $1+p^2+(x-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}).p.q=0.$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man $x-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=z$ setzt; denn dabei geht sie über in $1+p^2+z.pq=0$

oder in $\frac{1}{z}+\frac{pq}{1+p^2}=0$ oder in $\frac{dz}{z}+\frac{p.dp}{1+p^2}=0$

und daraus folgt

$$\log \text{nat } z + \log \text{nat } \sqrt{1+p^2} = \log \text{nat } A$$

oder $z . \sqrt{1+p^2} = A$. Daraus folgt weiter

$$p = \frac{1}{z} . \sqrt{A^2 - z^2}, \text{ oder } dy = \frac{dz}{z} . \sqrt{A^2 - z^2}.$$

Wenn man abermals integrirt, so ergibt sich

$$\text{XV) } y = B + \sqrt{A^2 - z^2} + \frac{A}{2} . \log \text{nat } \frac{-A + \sqrt{A^2 - z^2}}{A + \sqrt{A^2 - z^2}}.$$

Hier hat man statt z wieder $x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots . a_n}{n}$ zurückzuführen.

Dritter Fall. Soll man nur unter denen einander in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven, welche bei der gerade genommenen Abscisse x alle für $\frac{d^2y}{dx^2}$ einerlei aber einen nicht gegebenen Werth liefern, diejenige heraussuchen, wobei die Summe der Quadrate aller auf vorgeschriebene Weise begränzter Sehnen grösser oder kleiner wird, als bei allen andern so geeigenschafteten Kurven; so ist bei der gerade genommenen Abscisse x jetzt $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$, u. s. w. Gleichung X. reducirt sich also auf

$$\text{XVI) } \delta U = \frac{8n}{q^2} . [2p . (1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}) . (1+3p^2) . q] \frac{d\delta y}{dx}.$$

Man hat also jetzt die einzige Gleichung

$$\text{XVII) } 2p(1+p^2) + (x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots . + a_n}{n}) . (1+3 . p^2) . q = 0.$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man z anstatt

$$x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$$

setzt; denn dabei geht sie über in

$$2p . (1+p^2) + z . (1+3p^2) . q = 0,$$

oder in

$$\frac{1}{z} + \frac{(1+3p^2)q}{2p(1+p^2)} = 0,$$

oder in

$$\frac{dz}{z} + \tfrac{1}{2} . (\frac{dp}{p} + \frac{2p . dp}{1+p^2}) = 0.$$

Daraus folgt

$$\log \text{nat } z + \tfrac{1}{2}(\log \text{nat } p + \log \text{nat } (1+p^2)) = \log \text{nat } C,$$

oder

$$\log \text{nat } z + \tfrac{1}{2} . \log \text{nat } p . (1+p^2) = \log \text{nat } C,$$

oder

$$\log \text{nat } z + \log \text{nat } \sqrt{p\,.\,(1+p^2)} = \log \text{nat } C,$$

oder

$$z\sqrt{p\,.\,(1+p^2)} = C.$$

Führt man hier für z seinen Ausdruck zurück, so bekommt man

$$\text{XVIII)}\ \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n}{n}\right)\sqrt{p\,.\,(1+p^2)} = C.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = \frac{C}{\sqrt{p(1+p^2)}},$$

und wenn man jetzt auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man

$$dx = -\frac{C}{2} \cdot \frac{(1+3\,.\,p^2)\,.\,dp}{p(1+p^2)\sqrt{p\,.\,(1+p^2)}}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $p = \frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$dy = -\frac{C}{2} \cdot \frac{(1+3\,.\,p^2)\,.\,dp}{(1+p^2)\,.\sqrt{p\,.(1+p^2)}}.$$

Integrirt man, so ergibt sich

$$\text{XIX)}\ y = E - \frac{C}{2} \cdot \int \frac{(1+3\,.\,p^2)\,.\,dp}{(1+p^2)\,.\sqrt{p(1+p^2)}}.$$

Die jetzige Kurve ist also durch zwei Gleichungen gegeben (XVIII. und XIX.).

Aufgabe 89.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 234. §. 57. u. s. w.).

(Der erste Fall dieser Aufgabe ist schon von M. Ohm z. B. in dessen System. Siebenter Band. Zweiter Anhang. Seite 58 behandelt. Der zweite, dritte und vierte Fall sind von mir hinzugefügt).

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende, und errichtet in zwei festen Punkten der Abscissenaxe Perpendikel. In diesen beiden Perpendikeln liegen aber die zu besagten zwei festen Punkten gehörigen Ordinaten sowohl der Kurve selbst als auch der Berührenden. Wenn man nun beidemal die zwischen der Ordinate der Kurve selbst und zwischen der Ordinate der Berührenden stattfindende Differenz nimmt: welche Kurve ist es, die in dem zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft hat, dass das Produkt beider Differenzen grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann?

Das gesuchte Produkt (Taf. III. Fig. 6.) ist hier $U = RP \, . \, TQ$; y und x sind die zum Berührungspunkte S gehörigen Coordinaten; y_a ist die zur Abscisse a gehörige Ordinate der Kurve, und ebenso ist y_α die zur Abscisse α gehörige Ordinate der Kurve; die den Abscissen a und α entsprechenden Ordinaten der in S berührenden Geraden sind bezüglich

$$RH = y + (a - x) \, . \, \frac{dy}{dx}$$

und

$$TK = y + (\alpha - x) \, . \, \frac{dy}{dx}.$$

Es ist also

$$RP = [y + (a - x) \, . \, \frac{dy}{dx} - y_a],$$

und

$$TQ = y + (\alpha - x) \, . \, \frac{dy}{dx} - y_\alpha.$$

Setzt man nun zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$, so ist

$$U = [y + (a - x) \, . \, p - y_a] \, . \, [y + (\alpha - x) \, . \, p - y_\alpha].$$

Daraus folgt:

I) $\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \, . \, p - y_a - y_\alpha] \, . \, \delta y$
$+ [(a + \alpha - 2x) \, . \, y + 2(a - x) \, . \, (\alpha - x) \, . \, p$
$- (a - x) \, . \, y_\alpha - (\alpha - x) \, . \, y_a] \, . \, \frac{d\delta y}{dx}$
$- [y + (\alpha - x) \, . \, p - y_\alpha] \, . \, \delta y_a - [y + (a - x) \, . \, p - y_a] \, . \, \delta y_\alpha$

und

II) $\delta^2 U = [2y + (a + \alpha - 2x) \, . \, p - y_a - y_\alpha] \, . \, \delta^2 y$
$+ [(a + \alpha - 2x) \, . \, y + 2 \, . \, (a - x) \, . \, (\alpha - x) \, . \, p$
$- (a - x) \, . \, y_\alpha - (\alpha - x) \, . \, y_a] \, . \, \frac{d\delta^2 y}{dx}$
$- [y + (\alpha - x) \, . \, p - y_\alpha] \, . \, \delta^2 y_a - [y + (a - x) \, . \, p - y_a] \, . \, \delta^2 y_\alpha$
$+ 2 \, . \, \delta y^2 + 2(a + \alpha - 2x) \, . \, \delta y \, . \, \frac{d\delta y}{dx}$
$+ 2 \, . \, (a - x) \, . \, (\alpha - x) \, . \, (\frac{d\delta y}{dx})^2$
$- 2 \, . \, \delta y \, . \, \delta y_a - 2(\alpha - x) \, . \, \frac{d\delta y}{dx} \, . \, \delta y_a - 2 \, . \, \delta y \, . \, \delta y_\alpha$
$- 2(a - x) \, . \, \frac{d\delta y}{dx} \, . \, \delta y_\alpha$
$+ 2 \, . \, \delta y_a \, . \, \delta y_\alpha.$

Erster Fall. Soll die gesuchte Kurve aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt wer-

den, so sind δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, δy_a, δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig von einander; und es muss Gleichung I. in folgende vier zerfallen:

$$1)\ 2y + (a + \alpha - 2x)\,.\,p - y_a - y_\alpha = 0$$

$$2)\ (a + \alpha - 2x)\,.\,y + 2\,.\,(a - x)\,.\,(\alpha - x)\,.\,p - (a - x)\,.\,y_\alpha - (\alpha - x)\,.\,y_a = 0$$

$$3)\ y + (\alpha - x)\,.\,p - y_\alpha = 0$$

$$4)\ y + (a - x)\,.\,p - y_a = 0.$$

Addirt man 3) und 4), so bekommt man Gleichung 1). Multiplizirt man 3) mit $a - x$, und 4) mit $\alpha - x$, und addirt beide Produkte, so ergibt sich Gleichung 2). Eliminirt man p aus den beiden letzten Gleichungen, so folgt

$$5)\ y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a}\,.\,x + \frac{\alpha\,.\,y_a - a\,.\,y_\alpha}{\alpha - a}.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, die insoferne die Aufgabe löst, als sie zugleich ihre eigne Berührende ist. Da nun dadurch den Gleichungen 1), 2), 3), 4) genügt wird, so kann sie die Aufgabe lösen. Uebrigens sind y_a und y_α noch ganz unbestimmt, und somit kann man die gefundene Gerade noch zwingen, irgend zwei Bedingungen zu genügen, z. B. durch zwei gegebene Punkte zu gehen. Sind nun (n, m) und (k, h) diese Punkte, so geht für diese Punkte die Gleichung 5) bezüglich über in

$$6)\ m = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a}\,.\,n + \frac{\alpha y_a - a\,.\,y_\alpha}{\alpha - a},$$

$$7)\ h = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a}\,.\,k + \frac{\alpha y_a - a\,.\,y_\alpha}{\alpha - a},$$

wodurch sich y_a und y_α vollkommen bestimmen lassen. In Folge der Gleichungen 3) und 4) erkennt man, dass $TQ = 0$ und $RP = 0$; es ist also auch $U' = 0$. Gleichung II. reducirt sich jetzt auf

$$\delta^2 U = 2\,.\,\delta y^2 + 2(a + \alpha - 2x)\,.\,\delta y\,.\,\frac{d\delta y}{dx} + 2\,.\,(a - x)\,.\,(\alpha - x)\,.\,\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2\delta y\,.\,\delta y_a$$
$$- 2\,.\,(\alpha - x)\,.\,\frac{d\delta y}{dx}\,.\,\delta y_a - 2\,.\,\delta y\,.\,\delta y_\alpha - 2\,.\,(a - x)\,.\,\frac{d\delta y}{dx}\,.\,\delta y_\alpha - 2\,.\,\delta y_a\,.\,\delta y_\alpha.$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht beständig einerlei Zeichen behalten, namentlich weil die beiden Elemente δy_a^2 und δy_α^2 dabei fehlen. Es findet also jetzt weder ein primäres Grösstes noch Kleinstes statt.

Zweiter Fall. Soll man die gesuchte Kurve nur aus allen denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herauswählen, bei welchen die Summe der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten denselben (gegebenen oder nicht gegebenen) konstanten

Werth B behält; so hat man für die gesuchte Kurve folgende Gleichung:

$$y_a + y_\alpha = B,$$

und für alle hier in Betracht zu ziehenden und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Kurven hat man die Gleichung

$$(y_a + k \,.\, \delta y_a + \frac{k^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2 y_a + \ldots\,.)$$
$$+ (y_\alpha + k \,.\, \delta y_\alpha + \frac{k^2}{1\,.\,2} \,.\, \delta^2 y_\alpha + \ldots\,.) = B.$$

Da aber letztere Gleichung für ein im Momente des Verschwindens befindliches k gelten soll; so muss einzeln stattfinden $\delta y_a + \delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a + \delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w. Wenn man nun δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, u. s. w. als abhängig betrachtet, so ist $\delta y_\alpha = -\delta y_a$, $\delta^2 y_\alpha = -\delta^2 y_a$, u. s. w. Eliminirt man δy_α aus Gleichung I), so bekommt man

$$\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p - y_a - y_\alpha] \,.\, \delta y$$
$$+ [(a + \alpha - 2x) \,.\, y + 2(a - x) \,.\, (\alpha - x) \,.\, p - (a - x) \,.\, y_\alpha$$
$$- (\alpha - x) \,.\, y_a] \,.\, \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- [(\alpha - a) \,.\, p - y_\alpha + y_a] \,.\, \delta y_a.$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$8)\ 2y + (a + \alpha - 2x) \,.\, p - y_a - y_\alpha = 0$$

$$9)\ (a + \alpha - 2x) \,.\, y + 2(a - x) \,.\, (\alpha - x) \,.\, p - (a - x) \,.\, y_\alpha$$
$$- (\alpha - x) \,.\, y_\alpha = 0$$

$$10)\ (\alpha - a) \,.\, p - y_\alpha + y_a = 0.$$

Eliminirt man p aus 8) und 10), so ergibt sich

$$11)\ y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \,.\, x + \frac{\alpha \,.\, y_a - a \,.\, y_\alpha}{\alpha - a}.$$

Diese Gleichung gehört einer geraden Linie an, und genügt den drei Gleichungen 8), 9), 10), kann also die Aufgabe lösen. Da aber y_α und y_a noch ganz unbestimmt sind, so kann man der Aufgabe selbst, damit sie eine bestimmte Auflösung habe, noch zwei Bedingungen zufügen, z. B. dass die gesuchte Linie durch zwei gegebene Punkte gehe, oder dass sie durch einen Punkt gehe und zugleich die Summe $y_a + y_\alpha = B$ einen bestimmt gegebenen Werth habe, u. s. w. Ferner geht Gleichung II. über in

$$\delta^2 U = 2 \,.\, \delta y^2 + 2 \,.\, (a + \alpha - 2x) \,.\, \delta y \,.\, \frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ 2 \,.\, (a - x) \,.\, (\alpha - x) \,.\, (\frac{d\delta y}{dx})^2$$
$$- 2(\alpha - a) \,.\, \frac{d\delta y}{dx} \,.\, \delta y_a - 2 \,.\, \delta y_a^2.$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht beständig einerlei Zeichen haben, namentlich weil δy^2 und δy_a^2 entgegengesetze Vorzeichen haben.

Es findet also weder ein primäres Grösstes noch Kleinstes statt.

Dritter Fall. Soll die gesuchte Kurve nur aus denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, bei welchen allen die Ordinaten y_a und y_α denselben (gegebenen oder nicht gegebenen) Werth haben und welche alle den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungspunkt mit einander gemeinschaftlich haben; so findet einzeln statt $\delta y=0$, $\delta y_a=0$, $\delta y_\alpha=0$, $\delta^2 y=0$, $\delta^2 y_a=0$, $\delta^2 y_\alpha=0$, u. s. w.

Mancher Anfänger möchte behaupten: wenn einzeln stattfindet $\delta y=0$, $\delta^2 y=0$, u. s. w., in welchen Ausdrücken der Werth des x noch ganz unbestimmt ist: so muss auch bei den bestimmten Werthen $x=a$ und $x=\alpha$ einzeln stattfinden $\delta y_a=0$, $\delta y_\alpha=0$, $\delta^2 y_a=0$, $\delta^2 y_\alpha=0$, u. s. w., so dass durch die Gleichungen $\delta y_a=0$, $\delta y_\alpha=0$, $\delta^2 y_a=0$ $\delta^2 y_\alpha=0$ u. s. w. die Zahl der zu vergleichenden Kurven nicht mehr enger eingeschränkt wird, als es schon durch die Gleichungen $\delta y=0$, $\delta^2 y=0$, u. s. w. geschehen ist. Dieses wäre ganz richtig, wenn die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, u. s. w. identische Funktionen wären; allein sie müssen alle beliebigen nur keine identischen Funktionen vorstellen; und wenn gleich der Werth des x unbestimmt ist, so ist er doch bei allen zu vergleichenden Funktionen der nemliche unveränderliche Werth, und für einen solchen nach Belieben angenommenen aber festzuhaltenden Werth des x und für keinen andern müssen auch die allgemeinen Gleichungen $\delta y=0$, $\delta^2 y=0$, u. s. w. stattfinden.

Unter diesen Umständen reducirt sich nun Gleichung I. auf

$$\delta U=[(a+\alpha-2x)\,.\,y+2\,.\,(a-x)\,(\alpha-x)\,.\,p-(a-x)\,.\,y_\alpha -(\alpha-x)\,.\,y_a]\,.\,\frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U=0$ werden kann, muss sein

$$12)\quad (a+\alpha-2x)\,.\,y+2\,.\,(a-x)\,.\,(\alpha-x)\,.\,p-(a-x)\,.\,y_\alpha -(\alpha-x)\,.\,y_a=0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit dem nach bekannter Methode leicht aufzufindenden Faktor $\frac{1}{2[(a-x)\;(\alpha-x)]^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt; dadurch bekommt man

$$\frac{2\,.\,(a-x)\;(\alpha-x)\,.\,dy-(2x-a-\alpha)\,.\,y\,.\,dx}{2[(a-x)\,.\,(\alpha-x)]^{\frac{3}{2}}} -\frac{[(a-x)\,.\,y_\alpha+(\alpha-x)\,.\,y_a]\,.\,dx}{2[(a-x)\,.\,(\alpha-x)]^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{y}{\sqrt{(a-x)\;(\alpha-x)}}+\frac{(a-x)\,.\,y_\alpha-(\alpha-x)\,.\,y_a}{(\alpha-a)\sqrt{(a-x)\;(\alpha-x)}}=C$$

oder

$$13)\quad \frac{(\alpha-a)\,.\,y+(a-x)\,.\,y_\alpha-(\alpha-x)\,.\,y_a}{(\alpha-a)\,.\,\sqrt{(a-x)\,.\,(\alpha-x)}}=C.$$

Sind die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben, so kann man diese Kurve noch drei Bedingungen unterwerfen, weil ausser y_a und y_α auch noch C zu bestimmen ist; sind aber die Werthe von y_a und y_α gegeben, so kann man diese Kurve nur einer einzigen Bedin-

gung unterwerfen. Soll sie z. B. durch den festen Punkt (n, m) gehen, so ist

$$C = \frac{(\alpha - a) \cdot m + (a - n) \cdot y_\alpha - (\alpha - n) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - n) \cdot (\alpha - n)}}.$$

Gleichung 13) geht also jetzt über in

$$14) \quad \frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot m + (a - n) \cdot y_\alpha - (\alpha - n) \cdot y_a} = \sqrt{\frac{(a - x) \cdot (\alpha - x)}{(a - n) \cdot (\alpha - n)}}.$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung II. jetzt auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2,$$

so dass ein primäres Grösstes stattfindet, wenn $x > a$ und $x < \alpha$; dagegen findet ein Kleinstes statt, wenn entweder $x > a$ und $x > \alpha$, oder wenn $x < a$ und $x < \alpha$. Ferner ist jetzt

$$U' = -\left(\frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{2 \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}}\right)^2$$

oder

$$U' = -\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}}\right)^2$$

oder

$$U' = -\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 \cdot C^2.$$

Unter den hier zu bemerkenden Specialitäten ist besonders die hervorzuheben, wo $C = 0$. Dabei geht Gleichung 13) über in

$$(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0,$$

und daraus folgt

$$y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber eine Specialität von Nr. 13, und somit kein singuläres Integral; übrigens stimmt sie mit Nr. 5. und 11. überein.

Vierter Fall. Sollen nur diejenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Kurven in Betracht kommen, bei welchen die Ordinaten y_a und y_α ihren Werth nicht ändern, und bei welchen allen die zu der gerade gewählten Abscisse $OG = x$ gehörigen Berührenden mit einander parallel laufen; so muss einzeln stattfinden

$$\delta y_a = 0,\ \delta y_\alpha = 0,\ \frac{d\delta y}{dx} = 0,\ \delta^2 y_a = 0,\ \delta^2 y_\alpha = 0,\ \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Gleichung I. reducirt sich also jetzt auf

$$\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y.$$

Damit nun $\delta U = 0$ werde, so muss sein

$$15) \quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0.$$

Der jetzt integrirende Faktor ist $\frac{1}{(2x - a - \alpha)^2}$, und somit hat man letztere Gleichung in folgende umzuformen:

$$-\frac{(2x-a-\alpha).dy-2y:dx}{(2x-a-\alpha)^2}-\frac{(y_a+y_\alpha).dx}{(2x-a-\alpha)^2}=0.$$

Daraus ergibt sich durch Integration

$$-\frac{y}{2x-a-\alpha}+\frac{y_a+y_\alpha}{2.(2x-a-\alpha)}+E=0$$

oder

$$16)\quad y=2E.x+\tfrac{1}{2}.[y_a+y_\alpha-2E.(a+\alpha)].$$

Erstens. Sind die Werthe von y_a und y_α gegeben, d. h. soll die gesuchte Grade durch die zwei festen Punkte (a, y_a) und (α, y_α) gehen; so geht Gleichung 16) bezüglich über in

$$17)\quad y_a=2E.a+\tfrac{1}{2}[y_a+y_\alpha-2E.(a+\alpha)]$$

und

$$18)\quad y_\alpha=2E.\alpha+\tfrac{1}{2}.[y_a+y_\alpha-2E.(a+\alpha)]$$

und aus jeder dieser beiden Gleichungen folgt $E=\frac{y_\alpha-y_a}{2(\alpha-a)}$, so dass jetzt Gleichung 16) übergeht in

$$19)\quad y=\frac{y_\alpha-y_a}{\alpha-a}.x+\frac{\alpha.y_a-a.y_\alpha}{\alpha-a}.$$

Zweitens. Lässt man aber die gesuchte Gerade durch die zwei festen Punkte (n, m) und (k, h) gehen, wobei also die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben sind; so geht Gleichung 16) bezüglich über in

$$20)\quad m=2E.n+\tfrac{1}{2}[y_a+y_\alpha-2E.(a+\alpha)]$$

und

$$21)\quad h=2E.k+\tfrac{1}{2}.[y_a+y_\alpha-2E.(a+\alpha)].$$

Daraus folgt $E=\frac{1}{2}.\frac{m-h}{n-k}$, und $y_a+y_\alpha=\frac{2nh-2mk}{n-k}+\frac{m-h}{n-k}.(a+\alpha)$ und Gleichung 16) geht über in

$$22)\quad y=\frac{m-h}{n-k}.x+\frac{nh-mk}{n-k},$$

aus welcher Gleichung sich geradezu die Werthe von y_a und y_α ergeben, wenn man bezüglich a oder α an die Stelle des x einsetzt.

Uebrigens ist unter allen Umständen $\delta^2 U=2.\delta y^2$; und somit findet unter allen Umständen ein primäres Kleinstes statt.

Aufgabe 91.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 234. §. 57. u. s. w.).

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende. Von zwei zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten der ge-

suchten Kurve fällt man Perpendikel auf diese Berührende. Welche Kurve hat aber in dem zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft, dass das Produkt beider Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann?

Die Gleichung irgend einer geraden Linie sei

$$\text{I)}\ \mathfrak{A} \,.\, x' + \mathfrak{B} \,.\, y' + \mathfrak{C} = 0,$$

so ist bekanntlich die senkrechte Entfernung eines Punktes (a, b) von dieser Linie gegeben durch

$$\text{II)}\ \frac{\mathfrak{A} \,.\, a + \mathfrak{B} \,.\, b + \mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}.$$

Die nach Belieben gewählte Abscisse (Taf. III. Fig. 10.) sei $OQ = x$ und die zugehörige Berührende sei SV; so ist deren Gleichung bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) \,.\, p,$$

oder

$$\text{III)}\ p \,.\, x' - y' + y - p \,.\, x = 0.$$

Die erste feste Abscisse sei $OP = a$; so ist $Ps = y_a$; und die Länge des von s auf SV gefällten Perpendikels ergibt sich nach Formel II., d. h. es ist

$$\text{IV)}\ sS = \frac{a \,.\, p - y_a + y - px}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{(a - x) \,.\, p - y_a + y}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Die zweite feste Abscisse sei $OR = \alpha$, so ist $Rv = y_\alpha$; und für die Länge des Perpendikels vV ergibt sich auf ähnliche Weise

$$\text{V)}\ vV = \frac{(\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha + y}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Das im Ausdrucke IV. und V. vorkommende Radikal hat entweder jedesmal seine positive oder jedesmal seine negative Bedeutung, und das hier in Rede stehende Produkt ist

$$\text{VI)}\ U = \frac{[(a - x) \,.\, p - y_a + y] \,.\, [(\alpha - x) \,.\, p - y_\alpha + y]}{1 + p^2}.$$

Unter den verschiedenen Fällen, welche hier aufgestellt werden können, soll folgender besonders hervorgehoben werden:

Man soll die gesuchte Kurve nur aus denen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herauswählen, bei welchen allen die Ordinaten y_a und y_α denselben (gegebenen oder nicht gegebenen) Werth haben, und welche alle den zu der gerade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungspunkt mit einander gemein haben. Hier ist $\delta y = 0$, $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, u. s. w. (die nöthige Erklärung steht gleich im Anfange des dritten Falles der 89sten Aufgabe). Durch Variiren bekommt man

VII) $\delta U = \frac{1}{(1+p^2)^2} . \{[2 . (a-x) (\alpha - x) . p + (a+\alpha-2x) . y - (a-x) . y_\alpha - (\alpha - x) . y_a] . (1+p^2) - 2p . [(a-x) . p - y_a + y] . [(\alpha - x) . p - y_\alpha + y]\} . \frac{d\delta y}{dx}.$

Daraus folgt die Gleichung

VIII) $[2 . (a-x) . (\alpha - x) . p + (a+\alpha-2x) . y - (a-x) . y_\alpha - (\alpha - x) . y_a] . (1+p^2) - 2p . [(a-x) . p - y_a + y] . [(\alpha - x) . p - y_\alpha + y] = 0.$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{dp}{(1+p^2)^2}$; und es ist

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[2.(a-x).(\alpha-x).p+(a+\alpha-2x).y-(a-x).y_\alpha-(\alpha-x).y_a].(1+p^2).dp\\ -2p[(a-x).p-y_a+y].[(\alpha-x).p-y_\alpha+y].dp\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2}=0.$$

Da $dy = p\,.\,dx$ ist, so verschwindet folgender Ausdruck

$$[2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p-y_a-y_\alpha]\,.\,(1+p^2)\,.\,dy$$
$$-[2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p-y_a-y_\alpha]\,.\,(1+p^2)\,.\,p\,.\,dx$$

jedenfalls, und man kann ihn zum Zähler des letzten Bruches addiren, ohne, dass er sich ändert. Es ist also auch vollkommen genau

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}[2\,.\,(a-x)\,(\alpha-x)\,.\,p+(a+\alpha-2x)\,.\,y-(a-x)\,.\,y_\alpha-(\alpha-x)\,.\,y_a]\,.\,(1+p^2)\,.\,dp\\ -2p[(a-x)\,.\,p-y_a+y]\,.\,[(\alpha-x)\,.\,p-y_\alpha+y]\,.\,dp\\ +[2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p-y_a-y_\alpha]\,.\,(1+p^2)\,.\,dy\\ -[2y+(a+\alpha-2x)\,.\,p-y_a-y_\alpha]\,.\,(1+p^2)\,.\,p\,.\,dx\end{array}\right\}}{(1+p^2)^2}=0.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren, und man bekommt

$$\text{IX)}\quad \frac{[(a-x)\,.\,p-y_a+y]\,.\,[(\alpha-x)\,.\,p-y_\alpha+y]}{1+p^2}=A$$

oder

$$\text{X)}\quad [(a-x)\,.\,p-y_a+y]\,.\,[(\alpha-x)\,.\,p-y_\alpha+y]=A\,.\,(1+p^2).$$

Setzt man nun $A \,.\, (1 + p^2)$ statt des gleichbedeutenden Ausdrucks in Gleichung VIII. ein, so bekommt man

$$[2(a - x)\,(\alpha - x) \,.\, p + (a + \alpha - 2x) \,.\, y - (a - x) \,.\, y_\alpha - (\alpha - x) \,.\, y_a] \,.\, (1 + p^2) - 2A \,.\, p \,.\, (1 + p^2) = 0$$

oder

$$2[(a - x)\,(\alpha - x) - A] \,.\, p + (a + \alpha - 2x) \,.\, y - (a - x) \,.\, y_\alpha - (\alpha - x) \,.\, y_a = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{1}{2[(a - x)\,(\alpha - x) - A]^{\frac{3}{2}}}$. Dadurch geht letztere Gleichung zunächst über in

$$\frac{2[(a - x)\,(\alpha - x) - A] \,.\, dy - (2x - a - \alpha) \,.\, y \,.\, dx}{2[(a - x)\,(\alpha - x) - A]^{\frac{3}{2}}} - \frac{[(a - x) \,.\, y_\alpha + (\alpha - x) \,.\, y_a] \,.\, dx}{2[(a - x) \,.\, (\alpha - x) - A]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich geradezu integriren und es ergibt sich

$$\frac{y}{\sqrt{(a - x)\,(\alpha - x) - A}} + \frac{(\alpha - a) \,.\, [(a - x) \,.\, y_\alpha - (\alpha - x) \,.\, y_a] - 2A \,.\, (y_a + y_\alpha)}{[4A + (\alpha - a)^2] \,.\, \sqrt{(a - x)\,(\alpha - x) - A}} = B$$

oder

XI) $$[4A + (\alpha - a)^2] \,.\, y + (\alpha - a) \,.\, [(a - x) \,.\, y_\alpha - (\alpha - x) \,.\, y_a] - 2A \,.\, (y_a + y_\alpha) = [4A + (\alpha - a)^2] \,.\, B \,.\, \sqrt{(a - x)\,(\alpha - x) - A}.$$

Dieses soll die Integralgleichung zu Gleichung VIII. sein. Da aber Gleichung VIII. nur eine Differentialgleichung der ersten Ordnung ist, so ist in Gleichung XI. eine Konstante zu viel eingegangen. Man stelle also aus Gleichung XI. für y und für p die Ausdrücke her, substituire sie in VIII., und bestimme dann A durch B, oder B durch A; jenachdem das eine oder das andere am bequemsten ist. (In dieser Hinsicht vergleiche man Aufgabe 67) oder 68) oder 71) erste Auflösung erster Fall).

Sind die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben, so kann man die hier gefundene Kurve noch drei Bedingungen unterwerfen, weil ausser y_a und y_α auch noch eine der Konstanten A oder B zu bestimmen ist.

Sind aber die Werthe von y_a und y_α gegeben, so kann man die hier gefundene Kurve nur einer einzigen Bedingung unterwerfen.

(Man vergleiche den dritten Fall der 89sten Aufgabe).

Aufgabe 94.

(Zu Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 234. §. 57. u. s. w.).

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man legt in die zu zwei festen Abscissen gehörigen Punkte die Krümmungskreise, und zieht durch deren Mittelpunkte zwei mit einander parallele Graden. Man legt aber auch in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt der gesuchten Kurve den Krümmungskreis, und fällt von dessen Mittelpunkte Perpendikel auf die beiden obgenannten parallelen Graden. Beide Perpendikel fallen aber ganz in einander, und unterscheiden sich nur durch ihre Grösse. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Kurve die Eigenschaft hat, dass das Produkt der beiden in Rede stehenden Perpendikel grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, wenn man (Taf. III. Fig. 12.) die Coordinaten der gesuchten Kurve so annimmt, dass die Abscissenaxe parallel wird mit den (durch die zu den festen Abscissen gehörigen Krümmungsmittelpunkte gezogenen) zwei parallelen Graden. Der zur ersten festen Abscisse gehörige Krümmungsmittelpunkt sei K, und der zur zweiten festen Abscisse gehörige Krümmungsmittelpunkt sei G. Die in der Aufgabe besagten parallelen Graden sind also EF und BC. Man gebe nun der Abscissenaxe die Lage OX parallel mit BC, und der Ordinatenaxe die Lage OY senkrecht auf OX. Der ersten festen Abscisse entspreche der Punkt P, und der zweiten festen Abscisse entspreche der Punkt R. Die nach Willkür genommene Abscisse sei OQ und der dazu gehörige Krümmungsmittelpunkt sei H. Die in der Aufgabe besagten zwei in eine einzige Grade fallenden Perpendikel sind also HI und HL; und das in Rede stehende Produkt ist

$$\text{I)}\quad U = HL\,.\,HI$$

oder

$$\text{II)}\quad U = (WK - MH)\,.\,(NG - MH).$$

Setzt man $OQ = x$ und $QT = y$, so ist $MH = y + \frac{1+p^2}{q}$; setzt man $OP = a$, so ist $WK = y_a + \frac{1+p_a^2}{q_a}$; und setzt man $OR = \alpha$, so ist $NG = y_\alpha + \frac{1+p_\alpha^2}{q_\alpha}$. Gleichung II. geht also über in

$$\text{III)}\quad U = \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right].\left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right].$$

Variirt man nun, so ergibt sich

$$\text{IV)}\ \delta U = [(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q})] \cdot (\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2})_a$$

$$+ [(y+\frac{1+p^2}{q})_a - (y+\frac{1+p^2}{q})] \cdot (\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2})_\alpha$$

$$+ [2y + \frac{2.(1+p^2)}{q} - (y+\frac{1+p^2}{q})_a - (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha] \cdot (\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}).$$

Soll nun die gesuchte Kurve aus allen möglichen in jedem Punkte einander unmittelbar anliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende drei Gleichungen

$$\text{V)}\ (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha - (y+\frac{1+p^2}{q}) = 0$$

$$\text{VI)}\ (y+\frac{1+p^2}{q})_a - (y+\frac{1+p^2}{q}) = 0$$

$$\text{VII)}\ 2y + \frac{2.(1+p^2)}{q} - (y+\frac{1+p^2}{q})_a - (y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha = 0$$

gleichzeitig neben einander bestehen; dieses ist aber nur möglich wenn

$$\text{VIII)}\ (y+\frac{1+p^2}{q})_a=(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha$$

stattfindet. Man setze zur Abkürzung g anstatt $(y+\frac{1+p^2}{q})_a$ und anstatt $(y+\frac{1+p^2}{q})_\alpha$, und jede der drei obigen Gleichungen geht über in

$$y+\frac{1+p^2}{q}=g.$$

Daraus folgt

$$\frac{q}{1+p^2}+\frac{1}{y-g}=0;$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $p=\frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man

$$\frac{p\,.\,dp}{1+p^2}+\frac{dy}{y-g}=0;$$

daraus folgt

$$(y-g)\,.\,\sqrt{1+p^2}=h,$$

und daraus folgt weiter

$$dx=\frac{(y-g)\,.\,dy}{\sqrt{h^2-(y-g)^2}}.$$

Integrirt man abermals, so ergibt sich

$$x+k=-\sqrt{h^2-(y-g)^2},$$

oder

$$\text{X)}\ (y-g)^2+(x+k)^2=h^2,$$

so dass der Kreis die gesuchte Kurve ist, welcher insofern die Aufgabe löst, als er in jedem seiner Punkte auch sein eigener Krümmungskreis ist. Bei Bestimmung der Konstanten muss aber Gleichung VIII. mitbenutzt werden. Allein Gleichung VIII. geht über in $g=g$, woraus nichts gefolgert werden kann; und sonach erkennt man, dass die gesuchte Kurve noch drei verschiedenen Nebenbedingungen unterworfen werden kann.

Da die hier gesuchte Kurve ein Kreis ist, so fallen alle Krümmungsmittelpunkte der gesuchten Kurve in einen einzigen Punkt zusammen. Es fallen also die drei Punkte K, H und G in einen einzigen Punkt, und die zwei Linien BC und EF in eine einzige Linie zusammen. Es ist also $U'=0$ unabhängig von den zwei festen Werthen a und α, und unabhängig von dem willkürlichen Werthe des x.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Nachdem ich schon so manche Aufgabe durchgeführt habe, lege ich noch folgende den Lesern des Archivs zur Uebung vor.

Aufgabe 92.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Sie wird in den zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten, so wie auch in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte berührt. Diese drei berührenden Graden schliessen ein Dreieck ein. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Kurve die Eigenschaft hat, dass besagtes Dreieck einen grössern oder kleinern Flächeninhalt hat als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Die gesuchte Kuve (Taf. III. Fig. 11.) sei MVN; die festen Abscissen a und α seien OP und OQ, und die nach Belieben gewählte Abscisse x sei OR. Die drei in Rede stehenden Berührenden sind also MT, NT und KH. Das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck ist KHT. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez } GKTL + \text{Trapez } TLFH - \text{Trapez } GKHF$$

oder

$$U = \tfrac{1}{2} . (GK + TL) . (OL - OG) + \tfrac{1}{2}(TL + HF) . (OF - OL) \\ - \tfrac{1}{2} . (GK + HF) . (OF - OG)$$

oder

$$\text{I)} \quad U = \tfrac{1}{2} . [GK . (OL - OF) + TL . (OF - OG) \\ + HF . (OG - OL)].$$

Ist nun $OR = x$ und $RV = y$, so ist die Gleichung der in V berührenden Geraden bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) . \frac{dy}{dx}$$

oder

$$\text{II)} \quad y' = \frac{dy}{dx} . x' + y - \frac{dy}{dx} . x.$$

Ist $OP = a$ und $PM = y_a$, so ist die Gleichung der in M berührenden Graden

$$\text{III)} \quad y'' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a . x'' + y_a - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a . a.$$

Ist ferner $OQ = \alpha$ und $QN = y_\alpha$, so ist die Gleichung der in N berührenden Graden

$$\text{IV)} \quad y''' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha . x''' + y_\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha . \alpha.$$

Da, wo die Berührenden KH und MT einander schneiden, ist $x' = x''$ und $y' = y''$; und aus Gleichung II. und III. folgt

$$\text{V)}\quad OG = x' = x'' = \frac{x \cdot p - a \cdot p_a - y + y_a}{p - p_a},$$

$$\text{VI)}\quad GK = y' = y'' = \frac{(x - a) \cdot p \cdot p_a + y_a \cdot p - y \cdot p_a}{p - p_a}.$$

Da wo die Berührenden NT und KH einander schneiden, ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$, und aus den Gleichungen II. und IV. folgt

$$\text{VII)}\quad OF = x' = x''' = \frac{x \cdot p - \alpha \cdot p_\alpha - y + y_\alpha}{p - p_\alpha}$$

$$\text{VIII)}\quad FH = y' = y''' = \frac{(x - \alpha) \cdot p \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p - y p_\alpha}{p - p_\alpha}.$$

Da, wo die Berührenden MT und NT einander schneiden ist $x'' = x'''$ und $y'' = y'''$; und aus den Gleichungen III. und IV. folgt

$$\text{IX)}\quad OL = x'' = x''' = \frac{a \cdot p_a - \alpha \cdot p_\alpha - y_a + y_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

$$\text{X)}\quad LT = y'' = y''' = \frac{(a - \alpha) \cdot p_a \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p_a - y_a \cdot p_\alpha}{p_a - p_\alpha}.$$

Diese für OG, OF, OL, GK, LT und FH gefundenen Ausdrücke hat man jetzt in Gleichung I. einzuführen und dann weiter zu verfahren, wie bekannt.

Aufgabe 93.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Sie wird in den zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten berührt. Von dem zu einer nach Willkür genommenen Abscisse x gehörigen Punkte besagter Kurve fällt man Perpendikel auf die beiden Berührenden. Die beiden Perpendikel und die beiden Berührenden schliessen ein Viereck ein, durch dessen vier Punkte, weil die zwei entgegengesetzten Winkel jedesmal zusammen zwei Rechte betragen, man einen Kreis legen kann. Wenn nun der zu der gerade nach Willkür genommenen Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass besagtes Viereck einen grössern oder kleinern Flächeninhalt hat, als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Die gesuchte Kurve (Taf. III. Fig. 13.) sei MVN, die festen Abscissen a und α seien OP und OQ, und die nach Willkür gewählte Abscisse x sei OR. Die zwei in Rede stehenden Berührenden sind MT und NT; der zur Abscisse x gehörige Punkt der Kurve ist V; die zwei in Rede stehenden Perpendikel sind also VW und VS; das auf vorgeschriebene Weise erzeugte Viereck ist also $VWTS$. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez } WKLT + \text{Trapez } LTSH - \text{Trapez } VWKR - \text{Trapez } VSHR$$

oder

$$U = \tfrac{1}{2}.(WK+TL).(OL-OK) + \tfrac{1}{2}.(TL+SH).(OH-OL) - \tfrac{1}{2}(WK+VR).(OR-OK) - \tfrac{1}{2}(VR+SH).(OH-OR)$$

oder

I) $U = \tfrac{1}{2}[(WK-SH).(OL-OR) + (VR-TL)(OK-OH)]$.

Ist $OP = a$ und $PM = y_a$, so ist die Gleichung der in M berührenden Graden MT

II) $y' = (\frac{dy}{dx})_a . x' + y_a - (\frac{dy}{dx})_a . a.$

Da nun $OR = x$ und $RV = y$, so ist die Gleichung der durch den Punkt V gehenden und auf MT senkrechten Geraden VW folgende:

III) $y'' = -\frac{1}{(\frac{dy}{dx})_a} . x'' + y + \frac{1}{(\frac{dy}{dx})_a} . x.$

Ist $OQ = \alpha$ und $QN = y_\alpha$, so ist die Gleichung der in N berührenden Geraden NT

IV) $y''' = (\frac{dy}{dx})_\alpha . x''' + y_\alpha - (\frac{dy}{dx})_\alpha . \alpha,$

und die Gleichung der durch V gehenden und auf NT senkrechten Graden VS ist folgende:

V) $y'''' = -\frac{1}{(\frac{dy}{dx})_\alpha} . x'''' + y + \frac{1}{(\frac{dy}{dx})_\alpha} . x.$

Da wo die Linien MT und VW einander schneiden ist $x' = x''$ und $y' = y''$; und aus den Gleichungen II. und III. folgt

VI) $OK = x' = x'' = \frac{a . p_a^2 + x + (y - y_a) . p_a}{1 + p_a^2},$

VII) $KW = y' = y'' = \frac{(x - a) . p_a + y_a + y . p_a^2}{1 + p_a^2}.$

Da wo die Linien NT und VS einander schneiden ist $x''' = x''''$ und $y''' = y''''$; und aus den Gleichungen IV. und V. folgt

VIII) $OH = x''' = x'''' = \frac{\alpha . p_\alpha^2 + x + (y - y_\alpha) . p_\alpha}{1 + p_\alpha^2}$

IX) $HS = y''' = y'''' = \frac{(x - \alpha) . p_\alpha + y_\alpha + y . p_\alpha^2}{1 + p_\alpha^2}.$

Da wo die Berührenden MT und NT einander schneiden ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$; und aus der Gleichung II. und IV. folgt

X) $OL = x' = x''' = \frac{a . p_a - \alpha . p_\alpha - y_a + y_\alpha}{p_a - p_\alpha}$

$$XI)\ LT = y' = y''' = \frac{(a-\alpha) \cdot p_a \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p_a - y_a \cdot p_\alpha}{p_a - p_\alpha}.$$

Da wo die Linien VW und VS einander schneiden, ist $x'' = x'''$ und $y'' = y'''$; und aus Gleichung III. und V folgt

$$XII)\ OR = x'' = x''' = x$$

$$XIII)\ RV = y'' = y''' = y.$$

Diese für OK, OR, OL, OH, KW, RV, LT und HS gefundenen Ausdrücke hat man jetzt in Gleichung I. einzuführen und dann weiter zu verfahren, wie bekannt ist.

Aufgabe 95.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve, und legt in die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte die Krümmungskreise. Man legt aber auch in den zu der nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt den Krümmungskreis. Man verbindet die zu den Abscissen a und α gehörigen Krümmungsmittelpunkte mit dem zu der Abscisse x gehörigen Krümmungsmittelpunkte. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Kurve die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate beider Verbindungslinien grösser oder kleiner wird, als bei den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Es seien (Taf. III. Fig. 14.) die festen Abscissen $OP = a$ und $OR = \alpha$; und die nach Willkür genommene Abscisse sei $OQ = x$. Der zu $OP = a$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist K, der zu $OR = \alpha$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist G, und der zu $OQ = x$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist H. Die beiden Verbindungslinien sind KH und GH. Die Aufgabe verlangt also: es soll

$$I)\ U = \overline{KH}^2 + \overline{GH}^2$$

ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden. Statt I. kann man auch setzen

$$II)\ U = [(HM - KW)^2 + (OM - OW)^2] + [(HM - GN)^2 + (ON - OM)^2]$$

oder

$$III)\ U = \overline{OW}^2 + 2 \cdot \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{KW}^2 + 2 \cdot \overline{HM}^2 + \overline{GN}^2 - 2 \cdot OM \cdot (OW + ON) - 2 \cdot HM \cdot (KW + GN).$$

Hier ist $OM = x - \frac{(1+p^2) \cdot p}{q}$, und $MH = y + \frac{1+p^2}{q}$; ferner

$OW = a - \frac{(1 + p_a^2) \cdot p_a}{q_a}$, und $WK = y_a + \frac{1 + p_a^2}{q_a}$; und ebenso ist $ON = \alpha - \frac{(1 + p_\alpha^2) \cdot p_\alpha}{q_\alpha}$, und $NG = y_\alpha + \frac{1 + p_\alpha^2}{q_\alpha}$.

Diese Ausdrücke hat man in III. einzusetzen, und dann zu verfahren, wie gewöhnlich.

Aufgabe 96.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Kurve. Man legt in die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte die Krümmungskreise. Man legt aber auch in den zu der nach Willkür gewählten Abscisse x gehörigen Punkt den Krümmungskreis. Man verbindet die drei Krümmungsmittelpunkte mit einander. Dadurch entsteht ein Dreieck. Wenn nun der zu der gerade genommenen Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass des besagten Dreiecks Inhalt grösser oder kleiner ist als bei den zur nämlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Kurve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarkurven der Fall sein kann: welche Kurve wird gesucht?

Hier soll (Taf. III. Fig. 14.)

$$\text{I)} \quad U = \text{Dreieck } KHG$$

ein primäres Grösstes oder Kleinstes werden. Statt I. kann man auch setzen

$$\text{II)} \quad U = \text{Trapez } WKHM + \text{Trapez } HMNG - \text{Trapez } KWNG$$

oder

$$U = \tfrac{1}{2}(KW + HM) \cdot (OM - OW) + \tfrac{1}{2} \cdot (HM + GN)\,(ON - OM) - \tfrac{1}{2} \cdot (KW + GN) \cdot (ON - OW)$$

oder

$$\text{III)} \quad U = \tfrac{1}{2} \cdot [KW \cdot (OM - ON) + HM \cdot (ON - OW) + GN \cdot (OW - OM)].$$

Hier hat man die schon in voriger Aufgabe für OW, WK, OM, MH, ON, NG aufgestellten Ausdrücke einzuführen und dann zu verfahren wie gewöhnlich.

XX.

Neue Auflösung der die Bestimmung der Anzahl aller ganzen Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl und zu derselben relative Primzahlen sind, betreffenden Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

1.

Die erste Auflösung der oben genannten, für die Zahlenlehre in mehrfacher Beziehung wichtigen Aufgabe ist von Euler in den Nov. Comm. Acad. Petrop. T. VIII. p. 74. gegeben, und in den Nov. Act. Petrop. T. VIII. p. 17. wiederholt worden, worüber man auch Essai sur la théorie des nombres, par Legendre. Seconde édition. Paris. 1808. p. 6. nachsehen kann. Eine sehr schöne und höchst einfache Auflösung hat Gauss in den Disq. arithm. Lipsiae. 1801. p. 30. gegeben, mit welcher die von Cauchy in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. Tome deuxième. Paris. 1841. p. 9. gegebene Auflösung im Wesentlichen übereinstimmt. Eine aus An elementary investigation of the theory of numbers, with its application to the indeterminate and diophantine analysis, the analytical and geometrical division of the circle and several other curious algebraical and arithmetical problems, by P. Barlow. London. 1811. 8. entlehnte Auflösung, die mit Eulers Auflösung Aehnlichkeit hat, findet man in dem Lehrbuche der Mathematik für Gymnasien und Realschulen von J. H. T. Müller. Erster Theil. Halle. 1838. S. 246. Eine von A. v. Ettingshausen in der Zeitschrift für Physik und Mathematik. Herausgegeben von A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen, gegebene Auflösung, welche nach Müller's Urtheil a. a. O. jedoch nicht scharf genug zu sein scheint, ist mir bis jetzt unbekannt geblieben.

Die Auflösung von Euler lässt sich, wie es mir scheint, nur mit Weitläufigkeit zu völliger Allgemeinheit erheben, und ein gleiches Urtheil darf ziemlich mit demselben Rechte über die von Barlow gegebene Auflösung gefällt werden. Die schöne Auflösung von Gauss, mit welcher, wie schon erwähnt worden ist, Cauchy's Auflösung im Wesentlichen ganz übereinstimmt, setzt die Theorie der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten

Grades zwischen zwei unbekannten Grössen, oder die Aufgabe: alle Zahlen zu finden, welche durch gegebene Zahlen dividirt, gegebene Reste übrig lassen, als bekannt voraus. Diese Gründe haben mich bewogen, eine neue Auflösung zu suchen, welche ich im Folgenden mittheile, weil sie auf sehr einfachen Gründen beruhet, und mir, wenn sie sich auch nicht als ganz kurz erweisen sollte, doch einen Blick in die eigentliche Natur dieses Gegenstandes zu verstatten scheint, wozu noch kommt, dass mir, des nächstfolgenden Aufsatzes wegen, sehr viel daran liegen musste, im Besitz einer von der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen ganz unabhängigen Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe zu sein.

Dass alle im Folgenden gebrauchten Symbole positive ganze Zahlen bezeichnen, braucht wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden.

2.

Lehrsatz. Wenn μ und k relative Primzahlen sind, sind immer auch $nk+\mu$ und k relative Primzahlen.

Beweis. Wären $nk+\mu$ und k nicht relative Primzahlen, und hätten also einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Factor p, so sei

$$nk+\mu=pq,\ k=pq'.$$

Dann wäre $nk=npq'$, und folglich

$$\mu=pq-nk=pq-npq'=p(q-nq'),$$

so dass also auch μ den Factor p hätte, und folglich mit k nicht relative Primzahl wäre, wie doch vorausgesetzt wurde. Also sind $nk+\mu$ und k relative Primzahlen, wie bewiesen werden sollte.

3.

Lehrsatz. Wenn $nk+\mu$ und k relative Primzahlen sind, so sind immer auch μ und k relative Primzahlen.

Beweis. Wären μ und k nicht relative Primzahlen, und hätten also einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Factor p, so sei

$$\mu=pq,\ k=pq'.$$

Dann wäre $nk=npq'$, und folglich

$$nk+\mu=npq'+pq=p(nq'+q),$$

so dass also auch $nk+\mu$ den Factor p hätte, und folglich mit k nicht relative Primzahl wäre, wie doch angenommen wurde. Also sind μ und k relative Primzahlen, wie bewiesen werden sollte.

4.

Zusatz. Wenn μ und k keine relativen Primzahlen sind, so sind auch $nk+\mu$ und k keine relativen Primzahlen; und umgekehrt: wenn $nk+\mu$ und k keine relativen Primzahlen sind, so sind auch μ und k keine relativen Primzahlen.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

5.

Wir wollen nun annehmen, dass

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_{\varphi(k)}$$

die sämmtlichen Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots k$$

sind, welche mit k relative Primzahlen sind, wo also $\varphi(k)$ die Anzahl aller der Zahlen bezeichnet, welche mit k relative Primzahlen und kleiner als k sind. Bilden wir uns dann die Reihe

$$nk+1,\ nk+2,\ nk+3, \dots nk+(k-1),\ nk+k;$$

d. i. die Reihe

$$nk+1,\ nk+2\ \ nk+3, \dots (n+1)k-1,\ (n+1)k;$$

so sind nach den vorher bewiesenen Sätzen die sämmtlichen Glieder

$$nk+a_1,\ nk+a_2,\ nk+a_3, \dots nk+a_{\varphi(k)}$$

dieser Reihe, aber auch nur diese Glieder der in Rede stehenden Reihe, mit k relative Primzahlen, und in den beiden Reihen

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots k$$

und

$$nk+1,\ nk+2,\ nk+3,\ nk+4, \dots (n+1)k$$

kommt also immer eine gleiche Anzahl von Gliedern, in jeder Reihe nämlich $\varphi(k)$ Glieder, vor, welche mit k relative Primzahlen sind.

6.

Hat man jetzt die Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots pk;$$

so kann man diese Reihe auf folgende Art in p Abtheilungen oder Gruppen, eine jede mit k Gliedern, abtheilen:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots k;$$
$$k+1,\ k+2,\ k+3,\ k+4, \dots 2k;$$
$$2k+1,\ 2k+2,\ 2k+3,\ 2k+4, \dots 3k;$$
$$3k+1,\ 3k+2,\ 3k+3,\ 3k+4, \dots 4k;$$
u. s. w.
$$(p-1)k+1,\ (p-1)k+2,\ (p-1)k+3, \dots pk;$$

und übersieht hieraus mit Hülfe der in 5. angestellten Betrachtungen, dass $p\varphi(k)$ die Anzahl der sämmtlichen in der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots pk$$

vorkommenden Glieder ist, welche mit k relative Primzahlen sind.



7.

Indem wir von jetzt an immer annehmen, dass das in der vorhergehenden Nummer gebrauchte Symbol p eine absolute von der Einheit verschiedene Primzahl bezeichne, wollen wir nun zuerst den Fall betrachten, wenn die Primzahl p ein Factor der Zahl k ist.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich behaupten, dass jede Zahl μ, welche mit k relative Primzahl ist, auch mit pk relative Primzahl ist, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Sollten nämlich μ und pk nicht relative Primzahlen sein, und also einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor haben, so müsste dieser gemeinschaftliche Primfactor, weil nach der Voraussetzung μ und k relative Primzahlen sind, und also keinen gemeinschaftlichen von der Einheit verschiedenen Primfactor haben, nothwendig p sein, und es müsste also μ den Primfactor p haben, welches aber ungereimt ist, da nach der Voraussetzung p auch ein Primfactor von k ist, und doch μ und k relative Primzahlen sein sollen. Also müssen unter der Voraussetzung, dass p ein Primfactor von k ist und μ und k relative Primzahlen sind, jederzeit auch μ und pk relative Primzahlen sein, wie behauptet wurde.

Ferner erhellet auf der Stelle, dass jede Zahl μ welche mit k nicht relative Primzahl ist, auch mit pk nicht relative Primzahl sein kann.

Nach diesen beiden Sätzen ist also, wenn p ein Primfactor von k ist, jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk,$$

welches mit k relative Primzahl ist, auch mit pk relative Primzahl, und jedes Glied dieser Reihe, welches mit k nicht relative Primzahl ist, ist auch mit pk nicht relative Primzahl. Die sämmtlichen Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk,$$

welche mit k relative Primzahlen sind, sind folglich die sämmtlichen Glieder dieser Reihe, welche mit pk relative Primzahlen sind, und da nun nach 6. die Anzahl der sämmtlichen Glieder der in Rede stehenden Reihe, welche mit k relative Primzahlen sind, $p\varphi(k)$ ist, so ist dies auch die Anzahl der sämmtlichen Glieder dieser Reihe, welche mit pk relative Primzahlen sind. Bezeichnen wir also, analog mit $\varphi(k)$, die Anzahl der sämmtlichen relativen Primzahlen zu pk, welche kleiner als pk sind, durch $\varphi(pk)$; so ist in dem Falle, wo die Primzahl p ein Primfactor von k ist, jederzeit

$$\varphi(pk) = p\varphi(k).$$

8.

Ferner wollen wir nun auch den Fall betrachten, wenn die Primzahl p kein Factor von k ist.

Weil

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_{q(k)}$$

sämmtlich mit k relative Primzahlen sind und p kein Primfactor von k ist, so hat offenbar keins der Producte

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{q(k)}$$

einen Primfactor mit k gemein, und alle diese Producte sind also mit k relative Primzahlen, wobei sich, weil die Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{q(k)}$$

sämmtlich kleiner als k sind, von selbst versteht, dass die Producte

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{q(k)}$$

alle in der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk$$

als Glieder derselben wirklich vorkommen; und eben so versteht sich von selbst, dass keins dieser Produkte mit pk relative Primzahl ist.

Ferner kann leicht gezeigt werden, dass jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k relative Primzahl, dagegen mit pk nicht relative Primzahl ist, ein Glied der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{q(k)}$$

sein muss. Jede Zahl nämlich, welche mit k relative Primzahl ist, also mit k keinen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor hat, dagegen mit pk nicht relative Primzahl ist, also mit pk einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor hat, muss offenbar nothwendig den Primfactor p haben, und wir können daher die in Rede stehende Zahl durch pq bezeichnen. Da nun pq mit k keinen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Primfactor hat, so muss natürlich q mit k relative Primzahl sein. Es ist aber, wenn, wie wir jetzt voraussetzen wollen, pq ein Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk$$

ist, natürlich

$$pq \overline{\overline{<}} pk,$$

also $q \overline{\overline{<}} k$, oder vielmehr, weil q mit k relative Primzahl ist, $q < k$. Weil nun bekanntlich

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_{q(k)}$$

alle relative Primzahlen zu k unter k sind, so muss, nach dem vorher Bewiesenen, q nothwendig in dieser Reihe, also pq nothwendig in der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots . pa_{q(k)},$$

d. h. jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k relative Primzahl, dagegen mit pk nicht relative Primzahl ist, muss in der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{\varphi(k)}$$

als ein Glied derselben vorkommen.

Endlich versteht sich auch von selbst, dass alle Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk,$$

welche mit k nicht relative Primzahlen sind, auch mit pk nicht relative Primzahlen sind.

Wir wissen also jetzt, unter der Voraussetzung, dass die Primzahl p kein Factor von k ist:

Erstens: dass die Anzahl der sämmtlichen Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk,$$

welche mit k relative Primzahlen sind, jederzeit

$$p\varphi(k)$$

ist *).

Zweitens: dass die in der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots . pk$$

wirklich vorkommenden Producte

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots pa_{\varphi(k)},$$

deren Anzahl

$$\varphi(k)$$

ist, sämmtlich mit k relative Primzahlen, dagegen mit pk nicht relative Primzahlen sind.

Drittens: dass jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k relative Primzahl, mit pk dagegen nicht relative Primzahl ist, in der Reihe

$$pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, \ldots . pa_{\varphi(k)}$$

als ein Glied derselben vorkommen muss.

Viertens: dass jedes Glied der Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots pk,$$

welches mit k nicht relative Primzahl ist, auch mit pk nicht relative Primzahl ist.

Hieraus ergiebt sich also ganz unzweideutig und mit völliger Strenge, dass in dem Falle, wenn die von der Einheit verschiedene Primzahl p kein Primfactor von k ist, indem wir immer die früher eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten,

---

*) Dies ist in 6. gezeigt worden, und setzt im Allgemeinen als nothwendige Bedingung nicht voraus, dass p eine Primzahl und kein Factor von k ist, sondern gilt für jedes p und jedes k.

$$\varphi(pk) = p\varphi(k) - \varphi(k),$$

d. i.

$$\varphi(pk) = (p-1)\varphi(k)$$

ist.

9.

Wenn also die von der Einheit verschiedene Primzahl p ein Factor von k ist, so ist nach 7. immer

$$\varphi(pk) = p\varphi(k).$$

Wenn dagegen die von der Einheit verschiedene Primzahl p kein Factor von k ist, so ist nach 8. immer

$$\varphi(pk) = (p-1)\varphi(k).$$

Sei nun überhaupt

$$N = p^a N_1,$$

wo p eine von der Einheit verschiedene Primzahl und kein Factor von N_1 sein soll; so erhält man zuvörderst durch successive Anwendung des ersten Theils des vorhergehenden Satzes

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= p\varphi(p^{a-1}N_1) \\ &= p\; p\varphi(p^{a-2}N_1) = p^2\varphi(p^{a-2}N_1) \\ &= p^2 p\varphi(p^{a-3}N_1) = p^3\varphi(p^{a-3}N_1) \\ &= p^3 p\varphi(p^{a-4}N_1) = p^4\varphi(p^{a-4}N_1) \\ &= p^4 p\varphi(p^{a-5}N_1) = p^5\varphi(p^{a-5}N_1) \\ &\text{u. s. w.} \\ &= p^{a-2}p\varphi(pN_1) = p^{a-1}\varphi(pN_1). \end{aligned}$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung p kein Primfactor von N_1 ist, so ist nach dem zweiten Theile des obigen Satzes

$$\varphi(pN_1) = (p-1)\varphi(N_1),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\varphi(N) = p^{a-1}(p-1)\varphi(N_1).$$

Setzen wir nun

$$N = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_\lambda^{a_\lambda},$$

wo $p, p_1, p_2, p_3, \ldots p_\lambda$ lauter ungleiche von der Einheit verschiedene Primzahlen bezeichnen sollen; so ist nach dem vorher Bewiesenen:

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= p^{a-1}(p-1)\varphi(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}), \\ \varphi(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}) &= p_1^{a_1-1}(p_1-1)\varphi(p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4^{a_4} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}), \\ \varphi(p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4^{a_4} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}) &= p_2^{a_2-1}(p_2-1)\varphi(p_3^{a_3}p_4^{a_4}p_5^{a_5} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}), \\ \varphi(p_3^{a_3}p_4^{a_4}p_5^{a_5} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}) &= p_3^{a_3-1}(p_3-1)\varphi(p_4^{a_4}p_5^{a_5}p_6^{a_6} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}), \\ &\text{u. s. w.} \\ \varphi(p_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}}p_\lambda^{a_\lambda}) &= p_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}-1}(p_{\lambda-1}-1)\varphi(p_\lambda^{a_\lambda}), \\ \varphi(p_\lambda^{a_\lambda}) &= p_\lambda^{a_\lambda-1}(p_\lambda-1); \end{aligned}$$

und folglich, wenn man die Grössen auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen in einander multiplicirt, und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\varphi(N) = p^{a-1}(p-1)p_1^{a_1-1}(p_1-1)p_2^{a_2-1}(p_2-1)\,.\,.\,p_\lambda^{a_\lambda-1}(p_\lambda-1),$$

oder

$$\varphi(N) = p^{a-1}p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}\,.\,.\,p_\lambda^{a_\lambda-1}(p-1)\;(p_1-1)\;(p_2-1)\,.\,.\,(p_\lambda-1),$$

oder

$$\varphi(N) = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\,.\,.\,p_\lambda^{a_\lambda}\,.\,\frac{(p-1)\;(p_1-1)\;(p_2-1)\,.\,.\,(p_\lambda-1)}{pp_1p_2\,.\,.\,p_\lambda},$$

oder

$$\varphi(N) = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2}\,.\,.\,p_\lambda^{a_\lambda}(1-\frac{1}{p})\;(1-\frac{1}{p_1})\;(1-\frac{1}{p_2})\,.\,.\,.\,(1-\frac{1}{p_\lambda});$$

also, weil

$$N = p^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}\,.\,.\,.\,p_\lambda^{a_\lambda}$$

ist,

$$\varphi(N) = N(1-\frac{1}{p})\;(1-\frac{1}{p_1})\;(1-\frac{1}{p_2})\,.\,.\,(1-\frac{1}{p_\lambda}),$$

welches die bekannte zuerst von Euler gefundene Formel ist, die wir hier auf Beispiele weiter nicht anwenden wollen.

XXI.

Ueber Cauchy's Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen in ganzen Zahlen.

Von

dem Herausgeber.

1.

In dem Mémoire sur la résolution des équations indéterminées du premier dégré en nombres entiers (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. II. Pa-

ris. 1841. p. 1.) hat **Cauchy** eine früher von **Libri** und **Binet** gegebene, im Ganzen auf sehr einfachen Betrachtungen beruhende Auflösung der Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen in ganzen Zahlen, wie er selbst sagt, zu grösserer Allgemeinheit erhoben, und, wie wir noch hinzufügen wollen, überhaupt mit mehreren wichtigen Zusätzen bereichert. Da es uns scheint, dass diese Auflösung, wenigstens bis zu einer gewissen Gränze, worüber wir uns am Ende dieses Aufsatzes weiter aussprechen werden, wohl verdient, in den mathematischen Elementar-Unterricht aufgenommen zu werden, wenn man sich nämlich, was jetzt wohl vorausgesetzt werden kann, überhaupt nicht mehr scheuet, schon die Schüler der obern Klassen der Gymnasien und anderer höherer Lehranstalten mit den Elementen der Zahlenlehre bekannt zu machen; so halten wir es für zweckmässig, die in Rede stehende schöne Auflösung im Folgenden zu entwickeln, für jetzt jedoch nur so weit, als sich dieselbe nach unserer Meinung zur Aufnahme in den mathematischen Elementar-Unterricht eignet, indem wir uns vorbehalten, in einem spätern Aufsatze auf diesen interessanten Gegenstand zurückzukommen.

2.

Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen x und y kann man sich, offenbar, wenn a, b, c ganze Zahlen bezeichnen, immer unter der Form

$$ax - by = c$$

dargestellt denken. Soll diese Gleichung aber überhaupt in ganzen Zahlen auflösbar sein, so muss augenscheinlich der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b auch nothwendig in c aufgehen, und wir werden also die in Rede stehende Gleichung, indem wir a, b, c durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a und b dividiren, und die entsprechenden Quotienten durch m, n, k bezeichnen, immer auf die Form

$$mx - ny = k$$

bringen können, wo nun, was man im Folgenden stets gehörig vor Augen zu behalten hat, die Coefficienten m, n von x, y relative Primzahlen sind.

Dass wir uns im Folgenden bloss mit der Bestimmung der einen der beiden unbekannten Grössen x und y, etwa der Grösse x, zu beschäftigen brauchen, versteht sich von selbst, weil, wenn man alle Werthe von x kennt, durch welche die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen aufgelöst wird, die entsprechenden Werthe von y natürlich immer leicht mittelst der Formel

$$y = \frac{mx - k}{n}$$

berechnet werden können, wodurch wir also berechtigt sind, im

Folgenden unser Augenmerk bloss auf die Bestimmung der die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösenden Werthe von x zu richten.

Wir wollen nun zuvörderst annehmen, dass x und X zwei specielle Werthe der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse seien, durch welche die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst wird, so dass also

$$mx - ny = k,$$
$$mX - nY = k$$

ist, wo x, y und X, Y ganze Zahlen bezeichnen. Dann ist, wie man sogleich durch Subtraction findet,

$$m(X - x) - n(Y - y) = 0,$$

also

$$m(X - x) = n(Y - y),$$

und folglich

$$X - x = \frac{n(Y - y)}{m}.$$

Weil nun $X - x$ eine ganze Zahl ist, so geht m in dem Producte $n(Y - y)$ auf. Nach der Voraussetzung sind aber m und n relative Primzahlen, woraus sich ergiebt, dass m in $Y - y$ aufgehen *), also

$$\frac{Y - y}{m} = z$$

eine ganze Zahl sein muss. Folglich ist

$$X - x = n\frac{Y - y}{m} = nz,$$

also

$$X = x + nz,$$

woraus man sieht, dass, wenn x ein beliebiger die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösender bestimmter Werth der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse ist, jeder andere die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösende Werth X dieser unbekannten Grösse die Form

$$X = x + nz$$

hat, wo z eine ganze Zahl bezeichnet.

Umgekehrt lässt sich aber auch sehr leicht zeigen, dass, wenn x ein beliebiger specieller die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösender Werth der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse ist, dann immer auch

---

*) M. s. Archiv. Thl. II. S. 3. §. 3.

$$X = x + nz,$$

wo man sich für z jede beliebige ganze Zahl gesetzt denken kann, ein die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösender Werth derselben unbekannten Grösse ist. Weil nämlich nach der Voraussetzung x ein die gegebene Gleichung in ganzen Zahlen auflösender Werth der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse ist, so ist

$$mx - ny = k,$$

wo y eine ganze Zahl bezeichnet, und folglich

$$mx = ny + k.$$

Ferner ist aber nach der Voraussetzung

$$X = x + nz,$$

wo z eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und folglich

$$mX = mx + mnz,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$mX = ny + k + mnz = n(y + mz) + k,$$

oder, wenn wir

$$Y = y + mz$$

setzen, wo Y eine ganze Zahl bezeichnet,

$$mX = nY + k,$$

also

$$mX - nY = k,$$

wodurch die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung offenbar vollständig bewiesen ist.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, dass, wenn man nur einen die gegebene Gleichung in ganze Zahlen auflösenden Werth x der im Allgemeinen auch durch x bezeichneten unbekannten Grösse zu finden im Stande ist, dann auch die allgemeine Auflösung dieser Gleichung in ganzen Zahlen als gefunden betrachtet werden kann, weil nach dem Obigen offenbar die sämmtlichen, die in Rede stehende Gleichung in ganzen Zahlen auflösenden Werthe der ersten der beiden gesuchten unbekannten Grössen in der Formel

$$x + nz,$$

wo z eine ganze Zahl bezeichnet, enthalten sind, und aus dieser Formel erhalten werden, wenn man für z von 0 an aufwärts alle positiven ganzen Zahlen, und von 0 an abwärts alle negativen ganzen Zahlen in dieselbe einführt.

Nach allem Bisherigen reducirt sich also die vollständige Auflösung der Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auf die Auffindung nur eines diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösenden Werths der einen der beiden unbekannten Grössen, nämlich der Grösse x, und wie man einen solchen Werth immer zu finden im Stande ist, soll nun im Folgenden gezeigt werden.



3.

Aus dem Obigen wissen wir, dass die Coefficienten von x und y immer relative Primzahlen sind. Hierzu bemerken wir jetzt nun noch, dass durch geeignete Veränderung der Vorzeichen aller Glieder der Gleichung der Coefficient von x offenbar immer positiv gemacht werden kann. Sollte dann y einen negativen Coefficienten haben, so könnte man statt der unbekannten Grösse y jederzeit die unbekannte Grösse $-y$ in die Gleichung einführen, und würde dieselbe dann offenbar auf eine Form bringen, in welcher auch y einen positiven Coefficienten hat, woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, ergiebt, dass man die in ganzen Zahlen aufzulösende Gleichung, wie nun auch im Folgenden stets geschehen soll, immer auf die Form

$$mx - ny = k$$

gebracht annehmen kann, wo jetzt m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, welche Primzahlen zu einander sind, und k eine positive oder negative ganze Zahl ist, welche Voraussetzungen man im Folgenden stets vor Augen zu behalten hat.

Ist es nun möglich, die, Null übersteigende positive ganze Zahl i so zu bestimmen, dass die Differenz $m^i - 1$ durch n ohne Rest theilbar ist, so ist natürlich auch $(m^i - 1)k$ durch n ohne Rest theilbar, und wir können also, wenn y eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{(m^i - 1)k}{n} = y$$

setzen. Dann ist

$$m^i k - k = ny,$$

und folglich

$$m^i k - ny = k$$

oder

$$m(km^{i-1}) - ny = k,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass km^{i-1} ein die gegebene Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösender Werth von x ist, und also

$$x = km^{i-1}$$

gesetzt werden kann.

Hieraus ergiebt sich also, dass immer ein die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösender Werth von x gefunden werden kann, wenn man die, Null übersteigende positive ganze Zahl i so zu bestimmen im Stande ist, dass die Differenz $m^i - 1$ durch n ohne

Rest theilbar ist, oder mit andern Worten, wenn wir uns des Begriffs und Zeichens der Congruenz der Zahlen *) bedienen, dass

$$m^i \equiv 1 (\text{Mod. } n)$$

ist.

Eine der in Rede stehenden Bedingung genügende positive ganze Zahl i kann aber immer leicht gefunden werden. Denn aus dem durch Euler erweiterten Fermat'schen Theorem, für welches in dem zweiten Theile des Archivs. S. 7. §. 9. ein sehr einfacher, ganz elementarer und leicht verständlicher Beweis gegeben worden ist, wissen wir, dass, wenn m und n, wie es nach dem Obigen hier wirklich der Fall ist, relative Primzahlen sind, und die Anzahl aller Zahlen, welche mit n relative Primzahlen und kleiner als n sind, durch $\varphi(n)$ bezeichnet wird, jederzeit die Differenz

$$m^{\varphi(n)} - 1$$

durch n ohne Rest theilbar, oder mit andern Worten, dass immer

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 (\text{Mod. } n)$$

ist, so dass also immer

$$i = \varphi(n),$$

und folglich nach dem Obigen immer

$$x = k m^{\varphi(n)-1}$$

gesetzt werden kann. Wie aber $\varphi(n)$ in jedem Falle zu bestimmen ist, haben wir in der vorhergehenden Abhandlung ausführlich gezeigt. Zerlegen wir nämlich n in seine Primfactoren, und setzen, indem $p, q, r, s, \ldots.$ lauter von der Einheit verschiedene absolute Primzahlen bezeichnen,

$$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta \ldots.,$$

so ist, wie in der vorigen Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{r})(1-\frac{1}{s})\ldots.$$

oder

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)q^{\beta-1}(q-1)r^{\gamma-1}(r-1)\ldots.,$$

und aus allem Bisherigen ergiebt sich also jetzt die folgende ganz allgemeine und höchst elegante Auflösung der Gleichung

$$mx - ny = k,$$

wo m und n positive ganze Zahlen bezeichnen, die Primzahlen zu einander sind, und k eine positive oder negative ganze Zahl ist, in ganzen Zahlen:

Man zerlege n in seine Primfactoren, so dass, wenn $p, q, r, s, \ldots.$ lauter von der Einheit verschiedene absolute Primzahlen sind,

$$n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta \ldots..$$

*) M. s. Archiv. Thl. II. S. 4. §. 4.

ist, und setze

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p})\,(1-\frac{1}{q})\,(1-\frac{1}{r})\,(1-\frac{1}{s})\ldots.$$

oder

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)q^{\beta-1}(q-1)r^{\gamma-1}(r-1)\ldots.$$

Dann erhält man alle die Gleichung

$$mx - ny = k$$

in ganzen Zahlen auflösenden Werthe von x, wenn man in die Formel

$$x = km^{\varphi(n)-1} + nz$$

für z von 0 an aufwärts alle positiven ganzen Zahlen, und von 0 an abwärts alle negativen ganzen Zahlen einführt. Die den einzelnen gefundenen Werthen von x entsprechenden Werthe von y ergeben sich dann ferner leicht aus der Formel

$$y = \frac{mx-k}{n}.$$

Ist n eine Primzahl, so ist offenbar $\varphi(n) = n-1$, und folglich

$$x = km^{n-2} + nz,$$

in welcher Formel man für z wieder von 0 an aufwärts alle positiven ganzen Zahlen, und von 0 an abwärts alle negativen ganzen Zahlen setzen muss.

Dies ist nach Cauchy's Angabe die von Libri und Binet, indem sie das Fermat'sche Theorem in seiner ursprünglichen Gestalt *) in Anwendung brachten, für den Fall, wenn n eine Primzahl ist, gegebene Auflösung, die Cauchy hierauf durch Anwendung des von Euler erweiterten Fermat'schen Theorems zu völliger Allgemeinheit erhob.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass es im Allgemeinen nur darauf ankommt, die Null übersteigende positive ganze Zahl i so zu bestimmen, dass

$$m^i \equiv 1 (\text{Mod. } n)$$

ist, und die einfachste Auflösung wird also offenbar der kleinste dieser Bedingung genügende Werth von i gewähren. Ueber diesen Gegenstand hat Cauchy in dem angeführten Memoire noch verschiedene Untersuchungen angestellt, die sich aber weniger als die obigen Betrachtungen zu der Aufnahme in den Elementar-Unterricht eignen dürften, weshalb wir dieselben für jetzt übergehen, uns aber vorbehalten, später auf diesen interessanten Gegenstand zurückzukommen.

Sehr erleichtert wird natürlich die oben gegebene Auflösung, wenn man im Besitz einer bis zu einem möglichst grossen Werthe von n fortgesetzten Tafel der Werthe von $\varphi(n)$, wodurch wir be-

*) M. s. Archiv. Thl. II. S. 8.

kanntlich die Anzahl aller der Zahlen, welche Primzahlen zu n und kleiner als n sind, bezeichnet haben, ist; und die Berechnung einer solchen Tafel, der wir gern im Archive einen Platz einräumen würden, möchte daher wohl anzurathen sein.

XXII.

Beweis eines arithmetischen Lehrsatzes.

Von

Herrn Friedrich Arndt

Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.

Das Theorem, welches den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, betrifft die bekannte Eigenschaft der Binomialcoefficienten eines ganzen Exponenten, dass jeder von ihnen eine ganze Zahl ist.

Man pflegt diesen Satz auf indirectem Wege zu bewahrheiten, indem man zeigt, dass der $m$te Binomialcoefficient des ganzen Exponenten n der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen von n Elementen zur $m$ten Klasse gleichkommt, woraus denn unmittelbar folgt, dass der in Rede stehende Binomialcoefficient eine ganze Zahl ist, indem nur diese eine Anzahl anzugeben im Stande ist.

Wenn nun gleich gegen die Richtigkeit dieses Verfahrens nichts einzuwenden ist, so gewährt doch dasselbe noch keineswegs eine deutliche Einsicht in die Art und Weise, wie in der Bruchform

$$\frac{(n-m+1)\,(n-m+2)\,(n-m+3)\ldots(n-1)\,.\,n}{1\,.\qquad 2\,.\qquad 3\,.\;\ldots(m-1)\,.\,m}$$

die Factoren des Nenners sich gegen die Factoren des Zählers aufheben.

Zwar hat Gioachino Pessuti *) sich bemüht, den Satz von dieser Seite zu beleuchten; allein da der von ihm gegebene Beweis wegen seiner grossen Weitschweifigkeit nicht die erforderliche Einfachheit und Evidenz haben dürfte, so schien es der Mühe werth zu sein, einen Beweis zu versuchen, der den oben gemachten Anforderungen am meisten entsprechend wäre, besonders da in neue-

*) Nuove considerazioni su di alcune singulari proprietà de' coefficienti della nota formola del binomio Newtoniano. — Memorie di Matematica della società Italiana. Tom. XI. p. 446.

rer Zeit dieser Gegenstand vom Herrn Professor Kunze *) wieder in Anregung gebracht ist.

Betrachten wir also die Bruchform

$$\frac{(n-m+1)\ (n-m+2)\ (n-m+3)\ldots(n-1)\,.\,n}{1\ .\qquad 2\ .\qquad 3\ ..\quad (m-1)m},$$

in welcher n und m positive ganze Zahlen sind und m kleiner als n ist.

1. Wenn A einen beliebigen Primfactor des Nenners bezeichnet, so kommt es zunächst darauf an, die höchste Potenz von A zu bestimmen, durch welche der Nenner ohne Rest theilbar ist.

Bezeichnen wir zu diesem Behufe die grösste ganze Zahl, welche in dem Bruche $\frac{m}{p}$ enthalten ist, durch $G(\frac{m}{p})$, so ist offenbar $G(\frac{m}{A})$ die Anzahl der durch A theilbaren Glieder des Nenners, $G(\frac{m}{A^2})$ die Anzahl der durch A^2, $G(\frac{m}{A^3})$ die Anzahl der durch A^3, u. s. w. theilbaren Glieder. Wenn aber $m \geqq A^k$ und $< A^{k+1}$, so kommen im Nenner keine Glieder mehr vor, die durch A^{k+1} theilbar sind, die Anzahl hingegen der durch A^k theilbaren Glieder ist wie vorher $G(\frac{m}{A^k})$.

Daher ist die Anzahl der durch A, nicht aber durch eine höhere Potenz von A theilbaren Glieder $G(\frac{m}{A}) - G(\frac{m}{A^2})$, die Anzahl der durch A^2, nicht aber durch eine höhere Potenz von A theilbaren Glieder $G(\frac{m}{A^2}) - G(\frac{m}{A^3})$, u. s. w.; endlich ist die Anzahl der durch A^k, nicht aber durch eine höhere Potenz von A theilbaren Glieder, $G(\frac{m}{A^k})$.

Hieraus folgt, dass der Nenner theilbar ist durch die einzelnen Potenzen

$$A^{G(\frac{m}{A}) - G(\frac{m}{A^2})},\ A^{2\{G(\frac{m}{A^2}) - G(\frac{m}{A^3})\}},\ \ldots\ A^{kG(\frac{m}{A^k})},$$

und da diese verschiedenen Gliedern des Nenners entsprechen, so ist der Nenner durch das Product dieser Potenzen, oder durch

$$A^{G(\frac{m}{A}) + G(\frac{m}{A^2}) + \ldots + G(\frac{m}{A^k})}$$

ohne Rest theilbar. Zugleich erhellet aber auch aus dem Beweise, dass keine höhere Potenz von A in dem Nenner aufgeht.

2. Nun erhellet, dass, indem A^b eine beliebige Potenz von A ist, welche in dem Nenner vorkommt, die kleinsten Reste der Zahlen

$$n-m+1,\ n-m+2,\ n-m+3,\ \ldots\ n-m+A^b$$

nach A^b alle verschieden sind; denn wären die den Zahlen

*) Archiv der Mathematik und Physik Theil II. S. 329.

$n-m+\varphi$, $n-m+\psi$ entsprechenden Reste einander gleich. so wäre die Differenz dieser Zahlen $\pm(\varphi-\psi)$ durch A^b theilbar, welches nicht möglich ist, da beide Zahlen φ, ψ kleiner als A^b sind, oder wenigstens nur eine derselben der Potenz A^b gleich sein kann. Indem nun alle in Rede stehenden Reste ungleich sind und ihre Anzahl A^b ist, so muss einer unter ihnen verschwinden, und dieser verschwindende Rest oder das demselben entsprechende durch A^b theilbare Glied wird durch die Congruenz bestimmt

$$n-m+\varphi\equiv 0 \text{ (mod. } A^b).$$

Wenn wir übrigens den Rest von $n-m$ durch A^b mit ϱ bezeichnen, so ist $\varphi=A^b-\varrho$.

In dem Intervall $n-m+1$ bis $n-m+A^b$ giebt es demnach nur ein einziges Glied, welches durch A^b theilbar ist; ganz ebenso giebt es in dem Intervall $n-m+A^b+1$ bis $n-m+2A^b$, in dem Intervall $n-m+2A^b+1$ bis $n-m+3A^b$ u. s. w. nur ein einziges durch A^b theilbares Glied. Man kann diese Schlüsse bis zu dem Intervall von $n-m+(\Theta-1)A^b+1$ bis $n-m+\Theta.A^b$ fortsetzen, indem Θ so bestimmt wird, dass $n-m+\Theta\,.\,A^b \overline{\overline{<}}\, n$, $\Theta \overline{\overline{<}} \frac{m}{A^b}$ oder $\Theta=G(\frac{m}{A^b})$ ist. Dies vorausgesetzt, giebt es mindestens*) Θ oder $G(\frac{m}{A^b})$ durch A^b theilbare Glieder des Zählers.

Insbesondere enthält der Zähler mindestens $G(\frac{m}{A})$ durch A, mindestens $G(\frac{m}{A^2})$ durch A^2, mindestens $G(\frac{m}{A^3})$ durch A^3 u. s. w. mindestens $G(\frac{m}{A^k})$ durch A^k theilbare Glieder. Hieraus leitet man leicht *ab*, dass der Zähler durch die Potenz

$$A^{G(\frac{m}{A})+G(\frac{m}{A^2})+\ldots+G(\frac{m}{A^k})},$$

von A jederzeit ohne Rest theilbar ist.

3. Zerlegt man nun den Nenner unserer Bruchform in lauter ungleiche Factoren, von denen jeder eine Potenz eines Primfactors ist, so geht nach 2. jede solcher Potenzen in dem Zähler auf, weshalb, da alle Factoren relative Primzahlen sind, auch das Product der letztern d. h. der Nenner selbst in dem Zähler aufgehen wird, w. z. b. w.

Bei dieser Gelegenheit will ich endlich noch zeigen, wie sich der von Gauss in den Disquis. Arithmet. pag. 34—36 aufgestellte Satz, dessen Beweis Gauss auf die Lehre von den Permutationen stützt, mittelst unseres obigen Lehrsatzes sehr leicht darthun lässt.

Der gedachte Satz heisst so:

Wenn p eine Primzahl ist und man p Elemente hat, die nicht alle unter einander gleich sind, so ist die Zahl der Permutationen dieser Elemente stets durch p theilbar.

Wenn nämlich unter den Elementen zuerst a gleich sind, dann b gleich, dann c gleich u. s. w. (wo a, b, c, ... auch die Einheit bezeichnen können), so dass $p=a+b+c+\ldots$, so ist die

Zahl der Permutationen der p Elemente, wie bekannt, der Bruchform gleich

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\,.\,.\,.\,.\, p}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, a \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, b \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, c \,.\,.\,.\,.\,.}$$

Wir können diese Bruchform, die wir P nennen wollen, so in Factoren abtheilen:

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, a}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, a} \times \frac{(a+1)\,(a+2)\,.\,.\,.\,(a+b)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\, b} \times \frac{(a+b+1)\,.\,.\,.\,(a+b+c)}{1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, c} \times \ldots,$$

und es ist also mit Einführung des Zeichens der Binomialcoefficienten

$$P = {}^{a}B_{a} \,.\, {}^{a+b}B_{b} \,.\, {}^{a+b+c}B_{c} \,.\,.\,.\,.\,,$$

woraus folgt, dass P eine ganze Zahl ist, da jeder dieser Binomialcoefficienten eine ganze Zahl ist.

Da nun

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, p = 1 \,.\, 2 \,.\,.\, a \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\,.\, b \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, c \,.\,.\, \times P$$

ist, so ist

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\,.\, a \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\,.\, b \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, c \,.\,.\,.\,.\, \times P}{p}$$

eine ganze Zahl; aber p geht in dem in P multiplicirten Factor nicht auf, also muss p in P aufgehen.

---

*) Es kann nämlich in dem Falle, wenn $n - m + \Theta \,.\, A^{b} < n$ ist, wie leicht erhellet, $G(\frac{m}{A^{b}}) + 1$ durch A^{b} theilbare Glieder des Zählers geben. Ist z. B. $m = 17$, $n = 48$, der Zähler also 32.33.34.35...46.47.48, so giebt es für $A = 3$ und $b = 1$ fünf $(G(\frac{17}{3}) = 5)$ vollständige Intervalle, in deren jedem sich ein durch 3 theilbarer Factor findet, und ausserdem zuletzt noch das unvollständige Intervall 47, 48, in welchem noch 48 ein durch 3 theilbares Glied ist.

XXIII.

Eine Formel für die dreiseitige Pyramide.

Von

Herrn R. Hoppe

Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.

Unter andern Relationen zwischen den Stücken eines beliebigen Tetraeders, die ich gefunden habe, scheint mir eine Formel für den

Inhalt nicht ganz ohne Interesse zu sein, die ich daher hier, als Beitrag zu den Untersuchungen in diesem Gebiete, kurz entwickeln will.

Es bezeichne T den Inhalt eines beliebigen Tetraeders, a, b, c, d, e, f die sechs Kanten desselben, und zwar mögen a und f, b und e, c und d einander gegenüber liegen. Die an diesen Kanten gebildeten Neigungswinkel der Seiten seien respective α, β, γ, δ, ε, ζ; die vier Seitenflächen A, B, C, D, und zwar sei A von b, c, f, B von a, c, e, C von a, b, d und D von d, e, f begrenzt.

Denkt man sich auf D ein Höhenperpendikel H gefällt, so ist

$$T=\tfrac{1}{3}DH.$$

Ist ferner h das Höhenperpendikel des Dreiecks C, dessen Grundlinie d ist, so ist nach bekannten stereometrischen Sätzen

$$H=h\sin\delta.$$

Ausserdem hat man noch die Gleichung

$$C=\tfrac{1}{2}dh.$$

Eliminirt man zwischen diesen 3 Gleichungen H und h, so erhält man leicht

$$d=\frac{2CD\sin\delta}{3T},$$

und durch Vertauschung der entsprechenden Stücke ergeben sich die Gleichungen

$$b=\frac{2C}{3T}\cdot A\sin\beta;\ a=\frac{2C}{3T}\cdot B\sin\alpha;\ d=\frac{2C}{3T}\cdot D\sin\delta.$$

Drückt man das Dreieck C durch seine 3 Seiten a, b, d aus, so ist

$$C^2=\frac{1}{16}(b+a+d)(b+a-d)(b-a+d)(-b+a+d).$$

Setzt man für b, a, d ihre Werthe, so kommt

$$\begin{aligned}C^2=\frac{C^4}{(3T)^4}&(A\sin\beta+B\sin\alpha+D\sin\delta)\\ &\times(A\sin\beta+B\sin\alpha-D\sin\delta)\\ &\times(A\sin\beta-B\sin\alpha+D\sin\delta)\\ &\times(-A\sin\beta+B\sin\alpha+D\sin\delta).\end{aligned}$$

Betrachtet man nun C als die Summe der Projectionen von A, B, D auf C, so erhält man unmittelbar

$$C=A\cos\beta+B\cos\alpha+D\cos\delta,$$

oder

$$D=\frac{C-A\cos\beta-B\cos\alpha}{\cos\delta}.$$

Substituirt man diesen Werth von D in die obige Gleichung, so erhält man

$$(3T)^4 = \frac{C^2}{\cos^4\delta} \{A(\sin\beta\cos\delta - \cos\beta\sin\delta)$$
$$+ B(\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta) + C\sin\delta\}$$
$$\times\{A(\sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta)$$
$$+ B(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta) - C\sin\delta\}$$
$$\times\{A(\sin\beta\cos\delta - \cos\beta\sin\delta)$$
$$- B(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta) + C\sin\delta\}$$
$$\times\{-A(\sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta)$$
$$+ B(\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta) + C\sin\delta\},$$

was sich auch auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$(3T)^4 = \frac{C^2}{\cos^4\delta} (A\sin(\beta-\delta) + B\sin(\alpha-\delta) + C\sin\delta)$$
$$\times(A\sin(\beta+\delta) + B\sin(\alpha+\delta) - C\sin\delta)$$
$$\times(A\sin(\beta-\delta) - B\sin(\alpha+\delta) + C\sin\delta)$$
$$\times(-A\sin(\beta+\delta) + B\sin(\alpha-\delta) + C\sin\delta).$$

Diess ist die beabsichtigte Formel, welche den Inhalt des Tetraeders durch 3 Seiten und die 3 von einer derselben mit den übrigen gebildeten Neigungswinkel ausdrückt.

XXIV.

Miscellen.

Société philomatique de Paris.

Séance du 20 août 1842.

M. Ivan Simonoff. professeur d'astronomie à l'Université de Kasan, présente à la Société un nouvel instrument qu'il a imaginé dans le but d'observer la déclinaison de l'aiguille aimantée à l'aide du sextant.

Une aiguille aimantée, de forme prismatique rectangulaire, horizontalement suspendue, porte un petit miroir à son extrémité dirigée vers le sud, et un contrepoids à son extrémité opposée. En appliquant cette aiguille à un niveau à siphon rempli de mercure, on peut voir si elle est horizontale ou non, et faire disparaître la petite inclinaison, en déplacant le centre de gravité ou le poids.

On met le miroir dans la position perpendiculaire à la direction de l'axe magnétique de l'aiguille, de la même manière qu'on le fait dans le magnétomètre unifilaire de M. Gauss, car jusqu'a présent cet instrument n'en diffère pas. Ayant fait ces corrections préalables, on observe dans le miroir l'image réfléchie du soleil; mais, comme l'aiguille ne reste presque jamais en repos, on le fait descendre et se poser sur la planche inférieure de l'instrument. Alors l'aiguille devient stable; mais, pour voir si elle ne s'est pas déplacée du méridien magnétique, on place devant le miroir une échelle avec une lunette de sextant au dessus. Dans cette lunette on voit les divisions de l'échelle réfléchies par le miroir; on les observe d'abord quand l'aiguille est suspendue, et ensuite quand elle est posée sur la planche inférieure de l'instrument. La différence des parties de la division et la distance du miroir étant connues, on peut calculer l'angle de la déviation de l'aiguille du méridien magnétique; c'est la correction de la déclinaison obtenue au moyen de cet instrument.

Enfin l'on mesure, au moyen d'un sextant, la distance angulaire du soleil à son image réfléchie dans le miroir vertical de l'aiguille.

Soit d la distance mesurée au sextant entre le soleil vu directement et son image réfléchie dans le miroir, z la distance du soleil au zénith, a l'azimuth du soleil et α celui du méridien magnétique. On a un triangle sphérique dans lequel un côté est égal à z, un autre côté égal à $90°$, et le troisième côté égal à $90° - \frac{1}{2}d$, ce qui donne

$$\sin \tfrac{1}{2}d = \sin z \cos (a - \alpha), \text{ d'où } \cos (a - \alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}d}{\sin z}.$$

Il est clair que, d étant donné par les observations, et z ainsi que a par le calcul, on en déduira la valeur de α par cette formule.

L'erreur de la position perpendiculaire du miroir, par rapport à l'axe magnétique de l'aiguille, et l'incertitude dans la direction horizontale de cet axe peuvent être déterminées, la première par le retournement de l'aiguille autour de son axe géométrique et la seconde par les observations faites avant et après le passage du soleil par le méridien magnétique.

On peut varier de plusieurs manières le mode de ces observations au moyen du sextant. Par exemple, on peut observer les distances égales du soleil à son image réfléchie par le miroir de l'aiguille; ces distances correspondantes donneront l'angle horaire du point d'intersection du méridien magnétique avec l'horizon, si l'on connait le temps du passage du soleil par le méridien. L'on peut aussi mesurer la plus grande distance du soleil à son image réfléchie, et si l'on ajoute à $90° - \frac{1}{2}d$ la distance du soleil au pôle du monde, on aura la distance de ce pôle au point d'intersection du méridien magnétique avec l'horizon. Dans cette dernière méthode l'on peut déduire la déclinaison magnétique du triangle tracé sur la voûte céleste, entre le pôle du monde, le zénith et le point d'intersection du méridien magnétique avec l'horizon, sans avoir besoin de chronomètre. A ce dernier mode l'on peut encore appliquer la méthode des hauteurs circumméridiennes, dont on fait usage pour déterminer la latitude géographique.

Enfin l'on peut mesurer la distance angulaire du soleil à son image réfléchie, d'abord dans le miroir vertical, et ensuite dans

l'horizon artificiel. La moitié de cette dernière distance est égale à la distance du soleil au pôle du méridien magnétique, et si l'on désigne par d' la distance entière du soleil à son image doublement réfléchie, on aura

$$\sin(a-\alpha)=\frac{\cos\frac{1}{2}d'}{\sin z}.$$

(L'Institut. No. 454. 8 Sept. 1842.).

Herr James Booth, Professor of Mathematics in Bristol College hat in dem London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. June 1842. p. 473 einen Satz von den Flächen des zweiten Grades bewiesen, welcher als eine Erweiterung eines schon früher bekannten Satzes von der Kugel (M. s. z. B. Élémens de Géometrie par Legendre. Onzième édition. Livre VIII. Prop. XVIII.) betrachtet werden kann. Weil uns der Satz jedenfalls bemerkenswerth und weniger bekannt zu sein scheint, so theilen wir hier den folgenden Auszug aus dem Aufsatze des Herrn James Booth mit.

Eine Fläche des zweiten Grades denken wir uns von zwei parallelen Ebenen durchschnitten, und wollen das Volumen des von diesen beiden Ebenen und der Fläche des zweiten Grades eingeschlossenen Körpers zu bestimmen suchen.

Die drei Halbaxen der Fläche des zweiten Grades seien a, b, c; die Halbaxen des den beiden in Rede stehenden parallelen Ebenen durch den Mittelpunkt der Fläche des zweiten Grades parallel geführten Schnitts seien a', b', und c' sei der halbe conjugirte Durchmesser dieses Schnitts; das von dem Mittelpunkte der Fläche auf die dem letztern Schnitte parallele berührende Ebene der Fläche gefällte Perpendikel sei p. Die Halbaxen eines beliebigen den beiden parallelen Ebenen, durch welche der Körper, dessen Volumen V bestimmt werden soll, begränzt wird, parallelen Schnitts seien α, β, und u und w seien die zwischen diesem Schnitte und dem Mittelpunkte der Fläche liegenden Theile von c' und p; die den beiden gegebenen, den Körper V begränzenden Ebenen entsprechenden Werthe von u und w seien respective u', u'' und w', w''.

Dies vorausgesetzt, ist nun offenbar

$$V=\pi\int_{w'}^{w''}\alpha\beta dw;$$

also, wenn man statt der Variablen w die Variable u einführt,

$$V=\pi\int_{u'}^{u''}\alpha\beta\frac{dw}{du}du.$$

In dem durch a' und c' gelegten Schnitte der Fläche ist

$$\alpha : a'=\sqrt{c'^2-u^2} : c',$$

und eben so ist in dem durch b' und c' gelegten Schnitte der Fläche

$$\beta : b' = \sqrt{c'^2 - u^2} : c'.$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt

$$\alpha\beta = \frac{a'b'}{c'^2} (c'^2 - u^2).$$

Weil ferner offenbar

$$u : w = c' : p,$$

also

$$w = \frac{p}{c'} u$$

ist, so ist

$$\frac{dw}{du} = \frac{p}{c'};$$

und nach dem Obigen ist folglich

$$V = \pi \int_{u'}^{u''} \frac{a'b'p}{c'^3} (c'^2 - u^2) du.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Flächen des zweiten Grades ist aber

$$a'b'p = abc;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$V = \frac{abc}{c'^3} \pi \int_{u'}^{u''} (c'^2 - u^2) du.$$

Integrirt man nun zwischen den gegebenen Gränzen, so erhält man

$$V = \frac{abc}{c'^3} \pi \{c'^2(u'' - u') - \tfrac{1}{3}(u''^3 - u'^3)\}$$

oder, wie man leicht findet,

$$V = \frac{abc}{6c'^3} \pi (u'' - u') (6c'^2 - 2u''^2 - 2u''u' - u'^2);$$

also, wenn man innerhalb der Parenthesen $u''^2 + u'^2$ addirt und subtrahirt,

$$V = \frac{abc}{6c'^3} \pi (u'' - u') \{3(c'^2 - u''^2) + 3(c'^2 - u'^2) + (u'' - u')^2\}.$$

Sind jetzt α', β' und α'', β'' die Halbaxen der den Körper, dessen Volumen V gesucht wird, begränzenden parallelen Schnitte; so ist

$$c'^2 - u'^2 = \frac{c'^2\alpha'\beta'p}{abc}, \quad c'^2 - u''^2 = \frac{c'^2\alpha''\beta''p}{abc},$$

und für die Entfernung t der Ebenen der beiden parallelen Schnitte von einander hat man die Proportion

$$u'' - u' : t = c' : p,$$

aus welcher

$$u'' - u' = \frac{c't}{p}$$

folgt. Führt man nun diese Ausdrücke von $c'^2 - u'^2$, $c''^2 - u''^2$, $u'' - u'$ in den obigen Ausdruck von V ein, so erhält man

$$V = \tfrac{1}{2}\pi t(\alpha'\beta' + \alpha''\beta'') + \frac{abc}{p^3} \cdot \frac{\pi t^3}{6}.$$

Bezeichnen wir jetzt durch A und B die Flächenräume der den Körper, dessen Volumen V ist, begränzenden parallelen Schnitte, und durch S den cubischen Inhalt der mit dem Durchmesser t beschriebenen Kugel; so ist

$$A = \alpha'\beta'\pi, \quad B = \alpha''\beta''\pi, \quad S = \tfrac{1}{6}\pi t^3,$$

und folglich nach dem Obigen

$$V = \tfrac{1}{2}t(A + B) + \frac{abc}{p^3} S.$$

Dies giebt den folgenden Satz:

Das Volumen eines jeden von zwei parallelen Schnitten einer Fläche des zweiten Grades als Grundflächen und dieser Fläche des zweiten Grades als Seitenfläche eingeschlossenen Körpers ist gleich der mit seiner Höhe multiplicirten halben Summe seiner beiden Grundflächen, plus dem mit $\frac{abc}{p^3}$ multiplicirten Volumen der mit seiner Höhe als Durchmesser beschriebenen Kugel.

Für die Kugel ist $a = b = c = p$, also

$$V = \tfrac{1}{2}t(A + B) + S,$$

worin der oben erwähnte, in den Éléments de Géométrie par Legendre. Onzième édition. Livre. VIII. Prop. XVIII. bewiesene Satz von der Kugel enthalten ist.

Für ein Hyperboloid mit einem Fache muss man für a, b, c respective $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, c setzen, und erhält hierdurch aus dem Obigen leicht

$$V = \tfrac{1}{2}t(A + B) - \frac{abc}{p^3} S.$$

Für ein Hyperboloid mit zwei Fächern erhält Herr Booth, indem er für a, b, c, p respective a, b, $c\sqrt{-1}$, $p\sqrt{-1}$ setzt, denselben Ausdruck von V wie vorher.

Für das elliptische Paraboloid findet Herr Booth $V = \frac{1}{2}t(A + B)$.

Es scheint uns dieser Gegenstand eine ausführlichere, recht strenge und deutliche, mehr in's Einzelne gehende und alle verschiedenen Arten der Flächen des zweiten Grades gehörig berücksichtigende Behandlung wohl zu verdienen, aber auch noch zu bedürfen.

G.

Physikalische Bemerkungen.

Von dem Herrn Professor und Director F. Strehlke zu Danzig.

(Diese Bemerkungen sind von dem Herrn Verfasser in dem Programm der Petrischule zu Danzig von Michaelis 1842 mitgetheilt worden. Ich lasse dieselben hier wieder abdrucken, weil ich die Ueberzeugung hege, dass sie insbesondere Lehrern, denen kein sehr vollständiger physikalischer Apparat zu Gebote steht, gewiss sehr angenehm sein werden, und weil dieselben auch einem Zwecke des Archivs, der in der Ankündigung desselben von mir weiter besprochen worden ist, auf eine ausgezeichnete Weise entsprechen. Möchten sich auch andere Lehrer der Physik zu recht vielen dergleichen sehr nützlichen Bemerkungen veranlasst finden! G.)

1. Wenn man durch eine einfache Glaslinse einen weissen Kreis ansieht, so erscheint derselbe in einer gewissen Entfernung mit violettem, in einer andern mit gelbrothem Farbensaume, man soll die Bedingungen, unter denen dies geschieht, angeben *).

2. Man scheint häufig genug zu vergessen, dass ein Sammelglas oder ein Hohlspiegel mit dem Auge verbunden schon ein Fernrohr giebt.

3. Von dem bekannten Busoltschen Farbenkreisel kann man eine mehrfache nützliche Anwendung machen. — Legt man auf den rotirenden Kreisel eine Kreisscheibe mit gleich weit von einander abstehenden Löchern, so wird ein Luftstrom, den man durch das abgeschnittene Ende eines Federkiels durch Blasen mit dem Munde hervorbringt, einen Ton erzeugen, von dem man sogleich die nächst höhere Oktave hört, wenn man denselben Luftstrom durch eine doppelt so grosse Anzahl von Löchern auf derselben Scheibe gehen lässt. So dient der Busoltsche Kreisel als eine unvollkommene Sirene. — Um zu zeigen, dass bei rotirenden kreisförmig gebogenen elastischen Streifen die Kreisform durch die Centrifugalkraft in eine elliptische verwandelt werde, verbindet man 2 parallele Ringe aus Notenpapier mit 4 oder 6 kreisförmig gebogenen Meridianstreifen von demselben Papier. Legt man diese Vorrichtung so auf die Axe des Kreisels, dass die beiden Ringe in der Axe liegen, so wird der obere Ring herabgehen und das Ganze dem Auge ein Ellipsoid zeigen, dessen Abplattung um so geringer wird, je langsamer sich allmählich der Kreisel bewegt. — Um die Dauer des Lichteindrucks einer grössern Menge von Schülern recht augenfällig zu machen, schreibt man auf Eine Seite

*) Bei den folgenden Mittheilungen aus der Experimental-Physik habe ich durchaus nicht die Besitzer kostbarer physikalischer Apparate im Auge, sondern Lehrer an Bürgerschulen, die wie die unsrige nur über eine geringe Anzahl möglichst zweckmässig anzuwendender Hülfsmittel zu gebieten haben.

Str.

eines Rechtecks von weisser Pappe etwa die Worte: „Dauer des“ auf die andere Seite: „Lichteindrucks“, und befestigt dieses Rechteck mit etwas Wachs auf der höchsten Stelle des Kreisels, so dass die Rotations-Axe des Kreisels mit der die Mitten der horizontalen Seiten des Rechtecks verbindenden Geraden zusammenfällt; dann wird jeder an seiner Stelle die 3 Worte gleichzeitig lesen können, so lange der Kreisel rotirt. — Von dieser Dauer des Lichteindrucks kann man auch Gebrauch machen, um die Rotationskörper, den senkrechten Kegel, den Cylinder, die Kugel, das Ellipsoid, das Hyperboloid und das Paraboloid durch Rotation der entsprechenden ebenen Curven, die man sauber gezeichnet aus feiner Pappe ausschneidet, zu zeigen. — Rotirt der Kreisel mit mehrern farbigen Flügeln belastet im Sonnenschein, so erscheint der Schatten von der Axe des Kreisels in den verschiedenen komplementären Farben, also grün in der Rotations-Ebene des rothen Flügels, violett in der Ebene des gelben Flügels u. s. w.

4. Der Gegensatz der beiden Elektricitäten tritt auf eine eigenthümliche Weise in folgenden Versuchen mit 2 Stanniol-Scheibchen von etwa 5 Linien Durchmesser, die an Coconfäden hängen, hervor. Um die Scheibchen einander zu nähern oder sie von einander zu entfernen, befestigt man dieselben mit etwas Wachs auf den Spitzen eines Zirkels dessen einer Schenkel an einem horizontalen Gegenstande mit Bindfaden befestigt wird, und dessen zweiter Schenkel sich in derselben horizontalen Ebene bewegen lässt. Elektrisirt man die beiden Stanniolblättchen mit gleichartiger Elektricität, so divergiren die Coconfäden, aber die Blättchen kehren ihre breiten Flächen einander zu; werden sie dagegen mit entgegengesetzten Elektricitäten geladen, so konvergiren die Fäden, aber die Scheibchen stellen sich so, dass die Ebene des einen in der Verlängerung des andern liegt. Diese letzte Stellung tritt auch ein, wenn das eine Scheibchen nicht elektrisirt ist, wegen des Gesetzes der Vertheilung.

5. Um zu zeigen, dass die erhitzte atmosphärische Luft ein guter Leiter der Elektricität ist, entlade man eine Leidner Flasche so, dass der eine Knopf des Ausladers, eine Lichtflamme und der Knopf der Leidner Flasche ein gleichseitiges Dreieck bilden; dann geht der elektrische Funke nicht auf dem kürzesten Wege, vom Knopfe der Leidner Flasche zum Auslader, sondern durch die beiden andern Seiten des Dreiecks, vom Knopfe der Leidner Flasche in die Flamme und von da zum Auslader.

6. In der Lehre von der Elektricität wünschte ich beim Unterrichte von folgendem leicht anzustellenden Versuche Faraday's Gebrauch gemacht. Wenn man durch 2 Platinspitzen, wozu 2 Stückchen des feinsten käuflichen Platindraths hinreichen, die Elektricitäten des positiven und negativen Conduktors einer gewöhlichen Elektrisirmaschine über ein mit Jodkaliumlösung befeuchtetes Papier entladet, so dass die vertikal gestellten, ohngefähr 2 Zoll von einander entfernten Spitzen das Papier unmittelbar berühren, so zeigt sich das ausgeschiedene Jod an der positiven Spitze, wie es auch bei der Anwendung Eines Plattenpaars einer Voltaschen Kette geschieht. An der negativen Spitze zeigt sich kein brauner Fleck.

Sobald aber beide Spitzen um eine kleine Entfernung von dem Papiere abstehen, so dass kleine elektrische Funken von den Spitzen zu dem befeuchteten Papier überschlagen müssen, alsdann zeigen sich unter beiden Spitzen braune Flecken von dem an beiden Stellen freiwerdenden Jod, welches die aus der atmosphärischen Luft durch den elektrischen Funken gebildete Salpetersäure aus dem Jodkalium ausgeschieden hat.

7. Als Segnerschen Wasserkreisel benütze ich eine an einem Faden hängende oben offene Röhre von Messingblech mit 2 horizontalen dünnen Röhren, auf welche 2 kurze rechtwinklicht gebogene Röhren aufgepasst sind. Bilden die horizontalen Röhren mit ihren aufgepassten Stücken die Form eines lateinischen Z, so erfolgt Drehung, bilden sie die Form einer Klammer, so erfolgt Stillstand. Für denselben Zweck dienen bei der Elektricität 2 in ihrer Mitte mit konischen Vertiefungen versehene Messingdrähte, oder eine freie, auf ihrem Hütchen schwebende Magnetnadel, an deren Enden rechtwinklig auf die Axe der Nadel 2 geradlinigte Stückchen Stanniol angedrückt werden. Lässt man den Zförmig gebogenen Draht im Dunkeln sich drehen, so gewahrt man einige bemerkenswerthe Erscheinungen. Da das elektrische Licht ein discontinuirliches ist, eine Lichtentwickelung mit Lichtpausen, so zeigt das elektrische Rad keinen ununterbrochenen Kreis, sondern ein kreisförmiges Strahlengeflecht, gebildet aus lauter Strahlenbüscheln. Dreht man die Scheibe der Elektrisirmaschine langsam, so treten nur einzelne Strahlen in der Peripherie des Rades hervor, bei schnellerer Drehung der Scheibe wird das Geflecht immer dichter, aber man kann noch immer die einzelnen Strahlen unterscheiden. Wird in die Nähe des elektrischen Rades eine 2te elektrische Wirkungssphäre, z. B. der Knopf einer geladenen Leidner Flasche gebracht, so fehlt in der Wirkungssphäre die Ausströmung, folglich auch das Licht, und der Strahlenkreis ist an dieser Stelle unterbrochen. Hält man den Draht der Leidner Flasche ohngefähr in die Richtung des Durchmessers des elektrischen Rades, entweder einige Linien ober- oder unterhalb der Rotations-Ebene, so hat der Lichtkreis an zwei entgegengesetzten Stellen zwei Unterbrechungen des Lichtes.

8. Wenn man eine sehr starke Entwickelung von freilich weniger reinem Wasserstoffgase haben will, so legt man zu den Zinkstücken kleine eiserne Kugeln oder Nägel. Dann vermehrt die Contact-Elektricität die Entwickelung des Wasserstoffgases auf eine ausgezeichnete Weise.

9. Besitzer von Voltaschen Säulen aus einzelnen Kupfer- und Zinkplatten thun am besten, dieselben Paarweise zusammenlöthen zu lassen. Die Säule kann dann mehrere Stunden hindurch mit stets wachsender Wirkung benutzt werden, wenn man sie oft umbaut und nur dafür sorgt, dass die Salmiak-Auflösung, die jedesmal aus den Tuchplatten ausgedrückt wird, von Zeit zu Zeit durch Zulegen von Salmiak in einem gewissen Grade der Concentration erhalten wird. Je stärker die Kupfer- und Zinkplatten oxydirt werden, desto stärker wirkt die Säule. Man thut daher gut, z. B. die Glühversuche bis zu einer der letzten Aufstellungen aufzuspa-

ren. Das Umlegen der Platten geschieht in wenig Minuten, da es bei solchen Versuchen nicht an hülfreichen Händen fehlt. Sind die Platten nicht zusammengelöthet, so kann die Säule nur Ein Mal gebraucht werden und die Platten müssen, ehe sie wieder in der Säule thätig sein können, zuvor gereinigt werden, da beim Umlegen das Eintreten von saurer Auflösung zwischen die Platten, die sich immer mit blanker Oberfläche berühren sollen, nicht gut vermieden werden kann.

10. Wenn man in verdünnter Schwefelsäure kupferne Scheiben, etwa Kupfermünzen in Berührung mit Zinkstücken bringt, so steigen die Wasserstoffbläschen des Kupfers am Rande nicht vertikal aufwärts, sondern auf einem gekrümmten Wege, als wenn eine Kraft vom Rande sie nach der Mitte der Scheibe triebe. Man bemerkt diese Erscheinung auch bei der unabhängigen Auflösung des Zinks in verdünnter Schwefelsäure. Nimmt man als negatives Metall Platin, so steigen die Bläschen vom Rande vertikal in die Höhe.

11. Mit einem etwas grössern Magnete in Hufeisenform kann man die durch Vertheilung im Eisen hervorgebrachte Anziehung und Abstossung des gleichartigen und ungleichartigen Magnetismus auf eine recht augenfällige Weise zeigen. Man legt über den mit beiden Polen horizontal gelegten Magneten eine denselben ganz bedeckende Glastafel und an die Krümmungsstelle parallel der durch die beiden Pole gezogenen geraden Linie etwa 3 wohl abgedrehte Cylinder von weichem Eisen von wenigstens 1 Linie im Durchmesser, und solcher Länge, dass jeder Cylinder die Breite des Hufeisens überspannt; dann gehen die eisernen Cylinder zu den Polen mit beschleunigter Bewegung, eilen darüber hinaus, kehren zurück und bleiben, jedoch immer getrennt von einander, in den Stellungen, welche durch die gegenseitige Abstossung ihrer gleichartigen Magnetismen und der ungleichartigen des nächsten Pols bedingt werden.

12. Zur Erläuterung der Magneto-Elektricität nehme ich 2 Drathspiralen von Kupfer mit Seide umwickelt. Die beiden Enden jeder Drathspirale, die gerade so gross ist, dass in jede ein Pol eines hufeisenförmig gekrümmten Magnetstabes gesteckt werden kann, können in die beiden Quecksilbergefässe eines Galvanometers getaucht werden. Indem man die 4 Drahtenden der Spiralen in geeigneter Weise mit den beiden Quecksilbergefässen des Galvanometers kombinirt, lässt sich zeigen, dass zwei gleiche und entgegengesetzte elektrische Ströme sich aufheben, zwei in derselben Richtung fliessende elektrische Ströme sich in ihrer Wirkung verdoppeln, wobei immer dieselben durch die beiden Magnetpole erregten Ströme in Anwendung kommen.

13. Wenn man ein verkorktes Glasgefäss, worin etwas Wasser befindlich ist, in der Mitte eines Zimmers auf einen Tisch stellt, so bemerkt man nach einiger Zeit an den den einzelnen Fenstern zunächst gelegenen Stellen des Glases einen Niederschlag des Wasserdampfes in tropfbarer Gestalt. Steht das Gefäss in der Nähe eines Fensters, durch welches man die Aussicht auf Gebäude

hat, zwischen denen freier Himmel hindurchblickt, so bemerkt man in der Form der Begränzung des Niederschlags einen Einfluss der Configuration der lichten und dunkeln Stellen, welche die Aussicht des Fensters bestimmen. Steht das Glasgefäss in einem Glasschranke, so gewahrt man auch an der dem Fenster des Glasschranks und dem nächsten Stubenfenster zugewandten Seite eine Verdichtung des Wasserdampfs, weil das zunächst befindliche Fenster des Glasschranks durch Ausstrahlung der Wärme gegen das erkältete Fenster des Zimmers abgekühlt worden ist.

14. Die gewöhnlichen Luftpumpen reichen hin, um selbst bei einer Temperatur von + 15° R. das Wasser zum Gefrieren zu bringen. — Man stellt über die Oeffnung des Tellers der Luftpumpe einen offenen einige Zoll langen Glas-Cylinder, legt darauf ein Uhrglas, an dessen Rand 3 Wachskügelchen geklebt werden. Darauf wird etwas Wasser in das Uhrglas gegossen und ein zweites gleich grosses Uhrglas auf die Wachskügelchen gedrückt, wodurch man eine Wasserschicht zwischen den beiden Gläsern erhält. Giesst man nun etwas Schwefeläther in das obere Uhrglas, setzt schnell die Glocke darüber und evacuirt, so gefriert die Wasserschicht in kurzer Zeit.

15. Dass im luftverdünnten Raume eine Lichtflamme erlischt, wird offenbar durch 2 Ursachen hervorgebracht. Schliesst man den Zusammenhang zwischen der atmosphärischen Luft und der Luft der Glocke, stellt auf den Teller der Luftpumpe eine kleine Schaale mit entzündetem Alkohol oder Schwefeläther und bedeckt die Schaale schnell mit der Glocke, so erlischt wegen mangelnden Oxygens die Flamme sehr bald und die Glocke haftet fest an dem Teller. Stellt man die Verbindung zwischen der atmosphärischen Luft und der Luft der Glocke wieder her, so dringt die äussere Luft hörbar ein. In den meisten Fällen wird die Lichtflamme schon durch Verbrennung des Oxygens erloschen sein, ehe noch die Luftverdünnung dazu beitragen kann.

16. In der Lehre von der Elektricität ist es ebenfalls nicht genau, wenn man sagt, dass bei der Entladung verstärkter Elektricität über Wasser die Kugeln des Ausladers erheblich weiter von einander entfernt sein können, als ohne dasselbe; denn es kommt offenbar auf die Summe der Erhebungen der Kugeln des Ausladers über die Wasserfläche an, und diese Entfernung wird man ziemlich gleich jener finden, bei welcher der Funke einer elektrischen Batterie ohne Hinzuziehung einer Wasserfläche von einer Kugel des Ausladers zur andern überschlägt.

XXV.

Neue Untersuchungen über die Bestimmung einer gleichseitigen Hyperbel vermittelst vier gegebener Bedingungen.

Von

Herrn Fr. Seydewitz

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Die „Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données, par M. M. Brianchon et Poncelet" im 11ten Bande der Gergonne'schen Annales de Mathématiques, pag. 205—220, folgten auf eine ähnliche Abhandlung im 8ten Bande derselben Annalen, in welcher Herr Coste Brianchon's Konstruktionen der Kegelschnitte auf den besondern Fall der Parabel angewandt hatte. Während aber die letztere für uns kein Interesse weiter als das von Corollaren darbietet, welche durch Annahme einer unendlich-entfernten Tangente unter fünf Bedingungs-Elementen sich unmittelbar aus bereits gelösten allgemeinern Aufgaben ableiten lassen, entspricht die erstere auch jetzt noch einem wesentlichen Bedürfniss der Wissenschaft, indem die allgemeinere Aufgabe, einen Kegelschnitt vermittelst des Asymptoten-Winkels, m beliebiger Punkte und $4-m$ beliebiger Tangenten zu bestimmen, soviel ich weiss, noch nicht zur Erledigung gekommen ist. In dem Folgenden sollen diese Untersuchungen fortgesetzt werden. Vorher aber dürfte es angemessen erscheinen, die in jener Abhandlung enthaltenen Aussagen, deren Beweise eine recht passende Uebung für Schüler sein werden, hier kurz ins Gedächtniss zurückzurufen.

Lehrsätze.

a. In jedem, einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreieck ist der Durchschnitt der drei Höhen ein Punkt der Curve.

b. In jedem, einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieck ist die der Hypotenuse entsprechende Höhe eine Tangente an der Curve.

c. Legt man durch jeden der Mittelpunkte zweier Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, oder auch durch jeden von zwei beliebigen Punkten, oder durch einen der ersteren und durch einen der letzteren bezüglich eine Parallele mit der Sehne oder mit der harmonischen Polare des anderen Punktes, so geht der Kreis, welcher diese zwei Punkte und den Durchschnitt der beiden Parallelen enthält, durch den Mittelpunkt der Curve.

d. Ist von drei Punkten ein jeder in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel der harmonische Pol der Geraden, welche die beiden anderen enthält, so geht der durch diese drei Punkte bestimmte Kreis durch den Mittelpunkt der Curve.

e. Der Kreis, welcher die drei Durchschnitte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits enthält, geht durch die Mittelpunkte der diesem Vierseit eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln.

f. Der Kreis, welcher die drei Durchschnitte der Gegenseiten eines vollständigen Vierecks enthält, geht durch den Mittelpunkt der diesem Viereck umschriebenen gleichseitigen Hyperbel.

g. Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einerlei Dreiecke umschrieben sind, liegen auf dem Umfange desjenigen Kreises, welcher durch die Fusspunkte der Höhen dieses Dreiecks geht, und der zugleich auch die drei Seiten und die Abstände der Ecken von dem Höhenpunkte des Dreiecks hälftet.

Aufgaben,

welche durch diese Sätze gelöst worden sind:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, von welcher man *a*) 3 Punkte und die Tangente in einem derselben; *b*) 2 Punkte und die Tangenten in beiden; *c*) 2 Punkte, die Tangente in einem dieser Punkte und irgend eine andere Tangente; *d*) 4 Punkte; *e*) 3 Punkte und eine beliebige Tangente; *f*) 4 Tangenten kennt.

§. 1.

Sind (Taf. IV. Fig. 1.) Sp, Sq die Asymptoten einer beliebigen Hyperbel, und aa_1, bb_1 zwei beliebige Tangenten derselben, welche den ersteren bezüglich in a, b; a_1, b_1 begegnen, so sind bekanntlich die Geraden ab_1 und a_1b parallel, und man hat demnach, wenn noch durch den Durchschnitt C von aa_1 und bb_1 die Geraden Cp, Cq mit den Asymptoten parallel gezogen werden:

$$ap : Sp = aC : a_1C = b_1C : bC = Sp : bp,$$

also $ap \,.\, bp = Sp^2$, und macht man $sp = Sp$, so ist:

$$\begin{aligned} Sa : sa = Sp \,.\, (Sp + pa) : sp \,.\, (sp - pa) = \\ pa \,.\, (pb + Sp) : pa \,.\, (pb - sp) = \\ Sb : sb, \text{ d. h.} \end{aligned}$$

die vier Punkte S, a, s, b und demnach auch die vier Strahlen CS, Ca, Cs, Cb sind harmonisch; und da das Nämliche von den vier Strahlen CS, Cp, Cs, Cq gilt, weil $Cq \parallel Sp$ und $Sp = sp$; da ferner zur Bestimmung der Strahlen Cp und Cq der Punkt C und die blosse Richtung der Asymptoten hinreichen, und da die Lage zweier Strahlen CS, Cs vollkommen bestimmt ist, wenn sie

mit jedem von zwei gegebenen Linienpaaren harmonisch sind, so erhalten wir den

Satz 1.

Die Mittelpunkte aller Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade berühren und nach denselben zwei unendlich-entfernten Punkten gehen, gehören einem Systeme von zwei geraden Linien an, welche sowohl mit den beiden gegebenen, als mit den, von ihrem Durchschnitte nach den unendlich-entfernten Punkten gehenden Geraden harmonisch sind.

Wir können das in Rede stehende System zweier Geraden leicht vermittelst des blossen Lineals und eines festen Kreises construiren. Sind nämlich (Taf. IV. Fig. 2.) die Linienpaare Ca, Ca_1 und Cb, Cb_1 gegeben, und ist eine beliebige Gerade A gezogen, welche von ihnen in den entsprechenden Punkten a, a_1; b, b_1 geschnitten wird, so verbinde man diese Punkte mit einem beliebigen Punkte B des Hülfskreises durch die Geraden a, a_1, b, b_1, welche ihn zum zweitenmal in den entsprechenden Punkten α, α_1, β, β_1 schneiden; ziehe sofort die Geraden $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ oder b^0 und b'_0, welche sich im Punkte α_0, und die Geraden $\alpha\beta_1$ und $\alpha_1\beta$ oder $b^0{}_1$ und b_0, welche sich im Punkte β_0 kreuzen; ziehe endlich die Gerade $\alpha_0\beta_0$, die dem Kreise in den Punkten γ und γ_1 begegnet, und verbinde die letzteren mit B durch zwei Gerade c und c_1, welche die Gerade A in den gleichnamigen Punkten schneiden. Zuletzt ziehe man die Geraden Cc und Cc_1, so sind dieselben sowohl mit Ca, Ca_1, als mit Cb, Cb_1 harmonisch.

Denn zieht man noch die Geraden $\alpha\gamma$, $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\gamma$, $\alpha_1\gamma_1$ oder c^0, $c^0{}_1$ und c_0, c'_0, so sind der Reihe nach folgende Doppelverhältnisse einander gleich:

$$\frac{bc}{bc_1} : \frac{b_1c}{b_1c_1} = \frac{\sin . bc}{\sin . bc_1} : \frac{\sin . b_1c}{\sin . b_1c_1} = \frac{\sin . b^0c^0}{\sin . b^0c^0{}_1} : \frac{\sin . b^0{}_1c^0}{\sin . b^0{}_1c^0{}_1}$$
$$= \frac{\alpha_0\gamma}{\alpha_0\gamma_1} : \frac{\beta_0\gamma}{\beta_0\gamma_1} = \frac{\sin . b'_0c_0}{\sin . b'_0c'_0} : \frac{\sin . b_0c_0}{\sin . b_0c'_0} = \frac{\sin . b_1c}{\sin . b_1c_1} : \frac{\sin . bc}{\sin . bc_1}$$
$$= \frac{b_1c}{b_1c_1} : \frac{bc}{bc_1};$$

oder mit Worten: Es sind der Reihe nach die Gerade A, die Strahlbüschel B, α, die Gerade $\alpha_0\beta_0$, die Strahlbüschel α_1, B, und die Gerade A in Ansehung der entsprechenden Elemente b, c, b_1, c_1; b, c, b_1, c_1; b^0, c^0, $b^0{}_1$, $c^0{}_1$; α_0, γ, β_0, γ_1; b'_0, c_0, b_0, c'_0; b_1, c, b, c_1; b_1, c, b, c_1 projektivisch; folglich ist auch die Gerade A mit sich selber in Ansehung der entsprechenden Punkte b, c, b_1, c_1 und b_1, c, b, c_1 projektivisch; also $bc : bc_1 = b_1c : b_1c_1$, und ebenso zeigt man, dass $ac : ac_1 = a_1c : a_1c_1$, woraus folgt, dass auch die Strahlbüschel Cb, Cc, Cb_1, Cc_1 und Ca, Cc, Ca_1, Cc_1 beide harmonisch sind. (Vgl. Steiner's Abh. geom. Gest. §. 17. II., §. 46. III. und Geometrische Konstruktionen §. 20., Aufg. 4.).

Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel ist der Asymptoten-Winkel ein rechter, folglich (Taf. IV. Fig. 1.) Cp senkrecht auf Sp und W. SCp = W. sCp; also:

Satz 2.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade berühren und deren Asymptoten einerlei Richtungen haben, gehören einem Systeme von zwei geraden Linien an, welche mit den beiden gegebenen Geraden harmonisch sind, und mit einander Winkel bilden, die nach diesen Richtungen hin gehälftet werden.

Anmerkung: Nimmt man auf der Verlängerung von Cp einen Punkt M so an, dass $Mp \,.\, Cp = ap \,.\, bp = Sp^2 = sp^2$, so ist $\triangle Mpa \backsim \triangle Cpb$, und $\triangle Mpb \backsim \triangle Cpa$; also W. $aMp =$ W. Cbp und W. $aCp =$ W. Mbp; folglich auch W. $aib =$ W. $apM = R$, und W. $akb =$ W. $apC = R$. Demnach ist M der Höhenpunkt des Dreieks Cab. Ferner ist W. MSC ein rechter, weil $Mp.Cp = Sp^2$, und es ist $MS^2 = Mp \,.\, MC = Mk \,.\, Mb$. Beschreibt man also um M mit $MS = Ms$, als Halbmesser, einen Kreis, welcher Ca in T und t schneidet, so ist $MT^2 = Mt^2 = Mk \,.\, Mb$, also W. $MTb =$ W. $Mtb = R$. Demnach sind nicht nur CS und Cs, sondern auch bT und bt Tangenten dieses Kreises, und jede Ecke des Dreiecks Cab ist demzufolge der harmonische Pol ihrer Gegenseite. Aus diesem Grunde nennen wir diesen Kreis den zu dem Dreiecke Cab, (welches immer stumpfwinklig sein muss), zugehörigen harmonischen Kreis.

§. 2.

Denken wir uns jetzt drei Gerade a, b, c gegeben, und aus ihren Durchschnitten A, B, C drei beliebige Parallelen p, p_1, p_2 gezogen, so liegt nach dem Vorigen der Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Geraden a, b, c berührt und deren eine Asymptote mit p, p_1, p_2 einerlei Richtung hat, auf einer von zwei Geraden S und s, welche mit c und b harmonisch sind, und einen Winkel einschliessen, der von p gehälftet wird; ebenso aber auch auf einer von zwei Geraden S_1 und s_1, und wieder auf einer von zwei Geraden S_2 und s_2, welche resp. mit c und a, mit a und b harmonisch sind und mit einander Winkel bilden, die von p_1, von p_2 gehälftet werden. Diese drei Paar Geraden schneiden sich also in denselben vier Punkten σ, σ_1, σ_2, σ_3. Ferner ist von den in Taf. IV. Fig. 3. näher bezeichneten Winkeln

$$SS_1 = pS_1 - pS \text{ und } ss_1 = p_1s_1 - p_1s;$$

aber da

$$p \parallel p_1 \text{ und W.} pS = \text{W.} ps, \text{ W.} p_1S_1 = \text{W.} p_1s_1,$$

so ist

$$\text{W. } pS = \text{W. } ps = \text{W.} p_1s \text{ und W.} pS_1 = \text{W.} p_1S_1 = \text{W.} p_1s_1;$$

folglich ist W. $SS_1 =$ W. ss_1 und es liegen demnach die vier Punkte σ, σ_1, σ_2, σ_3 auf dem Umfange eines und desselben Kreises. In Bezug auf diesen Kreis aber sind offenbar die Ecken A, B, C des von a, b, c gebildeten Dreiecks die harmonischen Pole ihrer Gegenseiten; er ist also der zu diesem Dreiecke zugehörige

harmonische Kreis und daher von der Annahme der Parallelen p, p_1, p_2 unabhängig. Hieraus ergibt sich folgender merkwürdige

Satz 3.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche drei gegebene Gerade berühren, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kreises, nämlich des harmonischen Kreises, welcher zu dem von den gegebenen Geraden gebildeten Dreiecke gehört; und zwar sind jede vier Punkte dieses Kreises, welche ein vollständiges Viereck bilden, dessen Gegenseiten mit den gegebenen Geraden paarweise convergiren, die Mittelpunkte solcher vier gleichseitigen Hyperbeln, welche einerlei Asymptoten-Richtung haben; und man erhält diese Richtung, wenn man die von den Gegenseiten jenes Vierecks gebildeten Winkel hälftet.

Anmerkung: Im Obigen liegt zugleich der Beweis des von Herrn Heinen im 3. Bande des Crelle'schen Journals bekannt gemachten Satzes, dass in einem Kreisviereck die sechs Linienpaare, welche die von den Gegenseiten und von den Diagonalen gebildeten Winkelhälften, drei zu drei parallel sind.

§. 3.

Lassen wir zwei der so eben betrachteten Geraden a, b, c mit einander einen Winkel von zwei Rechten bilden, so fallen die beiden Punkte, in welchen sie von einer beliebigen gleichseitigen Hyperbel berührt werden, mit einander und mit dem Durchschnitte beider Geraden, also mit einem gegebenen Punkte zusammen. Fällt man von diesem Punkte, z. B. A, eine Senkrechte auf die dritte Gerade a, und errichtet im Durchschnitte von a und b (oder c) auf b (oder c) eine zweite Senkrechte, so stellt der Durchschnitt dieser beiden Senkrechten auch jetzt noch den Mittelpunkt, und der Durchschnitt von a und b einen Punkt des §. 1. und §. 2. besprochenen Kreises vor, und wir erhalten, als Corollar des vorigen, noch folgenden

Satz 4.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berühren, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kreises, welcher die letztere im Durchschnitte beider Geraden berührt, und dessen Mittelpunkt auf derjenigen Senkrechten liegt, welche aus dem auf der einen gegebenen Punkte auf die andere Gerade gefällt wird.

§. 4.

Die drei letzteren Sätze genügen nun zur Auflösung folgender Aufgaben:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, von welcher man a) 2 beliebige Tangenten und eine Asymptote; b) 2 beliebige Tangenten, den Berührungspunkt

der einen und die Richtung einer Asymptote; *c*) 2 Tangenten und ihre Berührungspunkte; *d*) 3 Tangenten und die Richtung einer Asymptote; *e*) 3 Tangenten und den Berührungspunkt der einen; *f*) 4 Tangenten kennt.

Es lassen sich nämlich immer zwei Oerter des Mittelpunktes der gesuchten Hyperbel, und vermittelst dessen sodann Alles andere finden. Uebrigens wird man bemerken, dass die Aufgaben *a*), *b*) und *d*) nur besondere Fälle der schon gelösten allgemeineren sind: *a*) einen Kegelschnitt zu beschreiben, von welchem man einen Punkt, drei beliebige Tangenten und den Berührungspunkt der einen; *b*) 2 Punkte, 2 beliebige Tangenten und den Berührungspunkt der einen; *d*) 2 Punkte und 3 Tangenten kennt. Ferner wird man finden, dass nicht nur die Aufgaben *c*) und *f*), sondern auch, was sie selber nicht bemerkt zu haben scheinen, die Aufgabe *e*) vermittelst der von den Herren Brianchon und Poncelet entdeckten Sätze aufgelöst werden können. Bilden nämlich zwei Seiten eines um eine gleichseitige Hyperbel beschriebenen Vierseits mit einander einen Winkel von zwei Rechten, so erhält man, wie sehr leicht einzusehen, als Zusatz zu dem oben unter *e* angeführten Satze noch den folgenden:

Satz 5.

Die Mittelpunkte derjenigen gleichseitigen Hyperbeln, welche drei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berühren, liegen auf dem Umfange desjenigen Kreises, welcher die Verbindungslinie des gegebenen Punktes und des Durchschnittes der beiden andern Geraden in dem ersteren Punkte berührt, und die dritte Gerade zum zweitenmal in einem Punkte schneidet, welcher zu ihren Durchschnittspunkten mit den beiden andern Geraden und zu dem gegebenen Berührungspunkte der vierte harmonische, und zwar dem letztern zugeordnete Punkt ist.

Und auf ähnliche Weise liessen sich aus den Lehrsätzen *f* und *g* noch folgende herleiten:

Satz 6.

Der Mittelpunkt derjenigen gleichseitigen Hyperbel, welche durch drei gegebene Punkte geht und in einem derselben eine gegebene Gerade berührt, liegt auf dem Umfange eines Kreises, welcher den letzteren Punkt und den Durchschnitt der gegebenen Geraden mit der Verbindungslinie der beiden andern Punkte enthält, und diejenige Gerade berührt, welche zu den Verbindungslinien des einen mit den beiden anderen gegebenen Punkten und zu der gegebenen Geraden der vierte harmonische, und zwar der letzteren zugeordnete Strahl ist.

Satz 7.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, und in

einem derselben eine gegebene Gerade berühren, liegen auf dem Umfange eines einzigen Kreises, welcher durch den gegebenen Berührungspunkt, durch den Fusspunkt der, von dem andern gegebenen Punkte auf die gegebene Gerade gefällten Senkrechten und durch die Mitte des Abstandes der beiden gegebenen Punkte von einander geht.

Endlich dürfen wir nicht übersehen, dass in den Aufgaben *f*), *e*) und *c*) einer der Kreise, der zur Bestimmung des Mittelpunktes der gesuchten Kurve dient, sich durch eine Gerade ersetzen lässt. Denn nach dem bekannten Newton'schen Satze liegen „die Mittel„punkte aller Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berüh„ren, auf derjenigen geraden Linie, welche die drei Diagonalen „des von jenen gebildeten vollständigen Vierseits hälftet;" und demzufolge „die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche drei ge„gebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte „berühren, auf derjenigen geraden Linie, welche die letztere Ge„rade und den Abstand des gegebenen Punktes vom Durchschnitte „der beiden anderen gegebenen Geraden hälftet;" und endlich „die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei gegebene Ge„rade in zwei gegebenen Punkten berühren, auf derjenigen gera„den Linie, welche den Durchschnitt der gegebenen Geraden mit „dem Mittelpunkte des Abstandes der gegebenen Punkte von ein„ander verbindet."

Anmerkung 1. Vier beliebige Gerade bilden vier Dreiecke; also liegen die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, welche diese vier Geraden berühren, nach Satz 3. auf den Umfängen der vier, diesen Dreiecken zugehörigen harmonischen Kreise. Verbinden wir hiermit den Lehrsatz *e* und den Newton'schen Satz, so ergibt sich:

Satz 8.

Die vier harmonischen Kreise, welche zu den von vier beliebigen Geraden gebildeten Dreiecken gehören, sowie derjenige Kreis, welcher die Durchschnitte der Diagonalen des von diesen vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits enthält, haben diejenige Gerade, welche diese drei Diagonalen hälftet, zur gemeinschaftlichen Sekante.

Zugleich begegnen wir hier, zunächst für stumpfwinklige Dreiecke, dem von Herrn Heinen an der schon angeführten Stelle bewiesenen Satze:

Satz 9.

Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von vier beliebigen Geraden gebildet werden, liegen in einer geraden Linie.

Anmerkung 2. Die Aufgaben *e*) und *c*) führen zu ähnlichen Sätzen, als die vorigen, von denen sie im Grunde nur besondere Fälle sind.

Anmerkung 3. Aus §. 1. Anmerk. und §. 2. ergibt sich

Satz 10.

Konstruirt man die vier harmonischen Kreise *A*, *B*, *C*, *D*, welche resp. zu den, von vier beliebigen Geraden *a*, *b*, *c*, *d* gebildeten (stumpfwinkligen) Dreiecken *bcd*, *acd*, *abd*, *abc* gehören, und zieht aus den Ecken *ab*, *ac*, *bc* eines beliebigen dieser Dreiecke an die zu den drei anderen gehörigen harmonischen Kreise *C*, *B*, *A* (wo möglich) drei Tangentenpaare, so schneiden sich diese letzteren gegenseitig in vier Punkten, und diese vier Punkte liegen auf dem Umfange des zum ersteren Dreiecke *abc* zugehörigen harmonischen Kreises *D*.

§. 5.

Durch den 3ten Satz werden wir auch noch in den Stand gesetzt, für den Fall, wenn drei Tangenten und ein beliebiger Punkt einer gleichseitigen Hyperbel gegeben sind — eine Aufgabe, welche in der genannten Abhandlung ganz unerledigt geblieben ist — einen Kreis zu zeichnen, welcher den Mittelpunkt derselben enthält. Es ist mir aber nicht gelungen, einen andern zweiten Ort dieses Mittelpunktes zu entdecken, als denjenigen Kegelschnitt, welcher die Mittelpunkte aller Kegelschnitte enthält, die 3 gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. (Siehe Annales de Math. tom. XI. pag. 385—389).

Was endlich den Fall betrifft, wenn von einer gleichseitigen Hyperbel zwei Tangenten und zwei beliebige Punkte gegeben sind, so sehe ich mich genöthigt, denselben einer besondern Untersuchung zu unterwerfen, weil sich hier in die Abhandlung der Herren Brianchon und Poncelet eine Unrichtigkeit eingeschlichen hat, welche durch Herrn Gergonne selbst noch verschlimmert worden ist.

Erstere behaupten nämlich p. 218 ohne Beweis, dass „die Mit-„telpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene „Tangenten berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, auf „einem einzigen Kreisumfange liegen;“ und hiermit übereinstimmend pag. 219: „dass die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche „zwei gegebene Gerade berühren und durch zwei gegebene Punkte „gehen, auf einem andern Kegelschnitte liegen, welcher den Durch-„schnitt der beiden gegebenen Geraden, den Mittelpunkt des Ab-„standes der beiden gegebenen Punkte und den Mittelpunkt des „durch die ersteren auf der Verbindungslinie der letzteren bestimm-„ten Segmentes enthält.“

Dagegen kommt Herr Gergonne in demselben Bande pag. 393 durch analytische Betrachtungen zu dem Resultate, dass der letztere Ort weder ein Kegelschnitt, noch ein System von Kegelschnitten, sondern eine Curve vom 4ten Grade sei. — Wir werden sehen, dass im ersten Satze ein System von zwei Kreisen, und im letzten allerdings ein System von zwei Kegelschnitten zu setzen ist, was, soviel ich weiss, noch nicht synthetisch bewiesen worden ist, und eine passende Gelegenheit darbietet, die Vorzüge der Steiner'schen Methode an einem Beispiele zu zeigen.

Es seien (Taf. IV. Fig. 4.) B, B_1, a, b vier beliebige Punkte eines Kegelschnittes, Bd, B_1c die Tangenten in B, B_1, welche

von der Geraden ab in den Punkten d, c geschnitten werden; ferner seien die Geraden Ba, Bb, B_1a, B_1b gezogen: so sind, nach Steiner's Abh. geom. Gest. Theil I. §. 38. III. die Strahlbüschel B und B_1 in Ansehung der entsprechenden Strahlen Ba, Bb, Bd, BB_1 und B_1a, B_1b, B_1B, B_1c projectivisch; das erstere aber ist mit der Geraden ab in Ansehung der entsprechenden Elemente Ba, Bb, Bd, BB_1 und a, b, d, f; und das zweite mit derselben Geraden in Ansehung der entsprechenden Elemente B_1a, B_1b, B_1B, B_1c und a, b, f, c perspektivisch; also ist diese Gerade mit sich selber in Ansehung der entsprechenden Punkte a, b, d, f und a, b, f, c projektivisch; (Abh. geom. Gest. §. 11. III.) d. h.

$$\frac{ad}{bd}:\frac{af}{bf}=\frac{af}{bf}:\frac{ac}{bc} \text{ oder } \frac{af^2}{bf^2}=\frac{ad\,.\,ac}{bd\,.\,bc},$$

und

$$\frac{ab}{fb}:\frac{ad}{fd}=\frac{ab}{cb}:\frac{af}{cf} \text{ oder } \frac{af}{bf}=\frac{cf\,.\,ad}{df\,.\,cb},$$

also auch

$$\frac{df^2}{cf^2}=\frac{da\,.\,db}{ca\,.\,cb}.$$

Sind also die Punkte a, b und die Tangenten Bd, B_1c gegeben, so sind die Verhältnisse $\frac{af}{bf}$ und $\frac{df}{cf}$, und somit der Punkt f gegeben. Offenbar aber gibt es auf ab zwei solche Punkte, nämlich f und f_1, wovon der eine auf ab selbst und der andere auf ihrer Verlängerung liegt, und es ist

$$\frac{af}{bf}=\frac{af_1}{bf_1} \text{ und } \frac{df}{cf}=\frac{df_1}{cf_1}.$$

Also hat man den

Satz 11.

Die Berührungssehnen aller Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade berühren, und durch zwei gegebene Punkte gehen, convergiren in dem einen oder dem anderen von zwei festen Punkten, welche sowohl mit den beiden gegebenen Punkten, als mit den Durchschnitten der Verbindungslinie dieser letzteren und der beiden gegebenen Geraden harmonisch sind.

Verbinden wir jetzt die Punkte f und f_1 mit dem Durchschnitte A der beiden Tangenten durch die Geraden Af und Af_1, so ist jede der letzteren die harmonische Polare des Punktes f, f_1, welcher der anderen angehört, und zwar in Bezug auf alle Kegelschnitte, deren Berührungssehnen durch diesen Punkt gehen. Wir können also hier den obigen Lehrsatz c. in Anwendung bringen. Legt man nämlich durch die Mitte m der Sehne ab z. B. mit Af_1 eine Parallele, und durch den Punkt f mit ab eine andere Parallele —, so liegen die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche die Punkte a und b enthalten und die Geraden Ac und Ad berühren, und zwar so, dass die Berührungssehne durch den Punkt f geht, auf dem Umfange desjenigen Kreises, welcher die Punkte

m, *f* und den Durchschnitt beider Parallelen enthält, d. h. hier, wo die eine Parallele mit *ab* zusammenfällt — welcher die andere Parallele im Punkte *m* berührt.

Satz 12.

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche zwei gegebene Gerade berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, sind auf die Umfänge zweier Kreise vertheilt, welche 1) sich im Mittelpunkte des Abstandes der gegebenen Punkte von einander schneiden; welche 2) dieselbe Linie zum andernmal in zwei Punkten treffen, die sowohl mit den gegebenen Punkten als mit den Durchschnitten ihrer Verbindungslinie und der gegebenen Geraden harmonisch sind, und deren jeder 3) im ersteren Punkte eine Gerade berührt, welche mit der Verbindungslinie des ihm von den beiden letzteren nicht angehörigen Punktes und des gegenseitigen Durchschnittes der gegebenen Geraden parallel läuft.

Um nun auch den zweiten Theil unserer Behauptung zu beweisen, so ist zunächst klar, dass die Gerade *Ak*, welche *A* mit der Mitte der Sehne BB_1 verbindet, nach dem Mittelpunkte des Kegelschnittes gerichtet ist, welcher *Ad*, *Ac* in *B*, B_1 berührt.

Legen wir ferner durch einen der letzteren Punkte, z. B. B_1, mit *ab* eine Parallele B_1p, ziehen *Bb* (oder *Ba*), welche B_1p in *p* schneidet, ferner durch einen der Punkte *f*, f_1, z. B. *f*, die Gerade *fp*, welche *Ad* in *r*. und sofort *ar*, welche B_1p in *q* schneidet: so liegen im Fünfecke B_1Bbaq die Durchschnitte *f* und *p* der Gegenseiten B_1B und *ab*, B_1q und *Bb* mit dem Punkte *r*, wo die fünfte Seite *aq* von der durch ihre Gegenecke *B* gehenden Geraden *Bd* geschnitten wird, in einer Geraden; also ist, nach Abh. geom. Gest. §. 42. II, dieses Fünfeck einem Kegelschnitte eingeschrieben, welcher *Ad* in *B* — sowie, weil BB_1 durch *f* geht, *Ac* in B_1 — berührt. Verbinden wir also die Mittelpunkte *m* und *i* der Sehnen *ab* und B_1q, oder, was einerlei ist, den einen *m* mit dem Durchschnitte *s* von B_1b und *aq*, durch die Gerade *msi*, so geht auch diese letztere nach dem Mittelpunkte des Kegelschnittes BB_1ab. Folglich liegt dieser Punkt im Durchschnitte der Geraden *An* und *msi*.

Nachdem wir jetzt noch die Gerade *Ak* parallel mit BB_1 gezogen, so dass *Ak*, *Ac*, *An*, *Ad* einen harmonischen Büschel bilden: denken wir uns die Berührungssehne BB_1 um den festen Punkt *f* gedreht und hiemit die ganze Figur unter den angegebenen Bedingungen in Bewegung gesetzt, so bilden die Geraden *fB*, *Ak*, *An*, B_1q, *fp*, *bB*, bB_1, *aq*, aB_1, *aB*, *ms* um die entsprechenden festen Punkte *f*, *A*, *A*, den unendlich-entfernten Punkt auf *ab*, *f*, *b*, *b*, *a*, *a*, *a*, *m* eben so viele Strahlbüschel, welche wir, um die Figur nicht zu überladen, durch die erzeugenden Geraden selber bezeichnen können.

Nun sind die Strahlbüschel *fB* und *Ak* projektivisch-gleich, und die Strahlbüschel *Ak* und *An* sind ebenfalls projektivisch *). Denn es ist

*) Und zwar bilden sie ein Involutions-System. Setzt man an die Stelle

$$\frac{\sin . BAn}{\sin . B_1An} = \frac{\sin . BAk}{\sin . B_1Ak} \text{ und } \frac{\sin . BAn_1}{\sin . B_1An_1} = \frac{\sin . BAk_1}{\sin . B_1Ak_1},$$

wenn An_1 und Ak_1 zwei ähnliche Gerade, wie An und Ak bezeichnen; also ist auch

$$\frac{\sin . BAn}{\sin . B_1An} : \frac{\sin . BAn_1}{\sin . B_1An_1} = \frac{\sin . BAk}{\sin . B_1Ak} : \frac{\sin . BAk_1}{\sin . B_1Ak_1}.$$

Folglich sind die Strahlbüschel fB und An projektivisch.

Ferner liegt der Strahlbüschel fB sowohl mit bB_1 und B_1q, als mit bB perspektivisch. Folglich sind die Strahlbüschel B_1q und bB projektivisch, und zwar perspektivisch, weil, wenn B_1q mit ab zusammenfällt, dasselbe auch von bB gilt. (§. 14). Desshalb liegen auch die Strahlbüschel B_1q und fp perspektivisch, indem p eine Gerade beschreibt, und da auch die Strahlbüschel fp und aq wegen des perspektivischen Durchschnittes Ad projektivisch sind, so sind der Reihe nach die Strahlbüschel fB, bB_1, B_1q. fp, aq, also auch bB_1 mit aq, und beide mit fB projektivisch. Fällt aber bB_1, so fällt auch aq mit ab zusammen; also beschreibt der Punkt s eine gerade Linie, und nun sind der Reihe nach die Strahlbüschel ms, bB_1, fB, An, also auch ms mit An projektivisch. Also beschreibt, nach Abh. geom. Gest. §. 38. IV., der Durchschnitt M dieser Geraden einen Kegelschnitt, der durch m, A und die Mitte von dc geht.

Satz 13.

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei gegebene Gerade berühren und durch zwei gegebene Punkte gehen, sind auf die Umfänge zweier Kegelschnitte vertheilt, welche mit einander den Durchschnitt der gegebenen Geraden, die Mitte des Abstandes der gegebenen Punkte und die Mitte des Segmentes, das auf dieser Linie durch jene Geraden bestimmt wird, gemein haben; und zwar ist der eine oder der andere dieser zwei Kegelschnitte zu verstehen, je nachdem die jedesmalige Berührungssehne zwischen den gegebenen Punkten hindurchgeht, oder nicht.

---

des Systems zweier Geraden Ac, Ad einen beliebigen Kegelschnitt, so sind auch jetzt noch die Strahlbüschel fB, Ak und An der Reihe nach projektivisch; also beschreibt der Punkt n einen Kegelschnitt, welcher durch den beliebig angenommenen festen Punkt f und durch den Mittelpunkt A des ersteren geht. Soviel als gelegentliche Bemerkung zu Seite 422 des 2ten Theiles des Archivs.

XXVI.

Ueber die höhern Differentiale der Function $y=\sqrt{a^2-b^2x^2}$.

Von

dem Herausgeber.

Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, dass $a^2-b^2x^2$ eine positive Grösse sein soll, so dass y reell ist. Ferner nehmen wir an, dass in der Gleichung

$$y=\sqrt{a^2-b^2x^2}$$

die Quadratwurzel positiv genommen werden und a eine positive Grösse sein soll. Unter dieser Voraussetzung können wir

$$y=a\sqrt{1-\frac{b^2x^2}{a^2}}$$

setzen, und da nun nach dem Vorhergehenden

$$a^2-b^2x^2=a^2(1-\frac{b^2x^2}{a^2}),$$

also auch $1-\frac{b^2x^2}{a^2}$ eine positive Grösse ist, so kann

$$\frac{bx}{a}=\sin\Theta$$

gesetzt und Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen werden, wo dann $\cos\Theta$ stets eine positive Grösse ist. Dies vorausgesetzt, ist nach dem Obigen

$$y=a\cos\Theta.$$

Aus der Gleichung

$$\sin\Theta=\frac{bx}{a}$$

folgt, wenn man nach x differentiirt,

$$\frac{d\sin\Theta}{dx}=\frac{d\sin\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}=\cos\Theta\,\frac{d\Theta}{dx}=\frac{b}{a},$$

und folglich

$$\frac{d\Theta}{dx}=\frac{b}{a}\cos\Theta^{-1}.$$

Aus der Gleichung

$$y = a \cos\Theta$$

erhält man durch Differentiation nach x

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{d\cos\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx} = -a\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{dx},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{dy}{dx} = -b\cos\Theta^{-1}\sin\Theta = -b\,\mathrm{tang}\,\Theta.$$

Differentiirt man von Neuem nach x, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b\cos\Theta^{-1}\,\frac{d\sin\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx} + b\cos\Theta^{-2}\sin\Theta\,\frac{d\cos\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -b\,\frac{d\Theta}{dx} - b\cos\Theta^{-2}\sin\Theta^2\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{b^2}{a}\cos\Theta^{-1} - \frac{b^2}{a}\cos\Theta^{-3}\sin\Theta^2$$

$$= -\frac{b^2}{a}\cos\Theta^{-3}(\cos\Theta^2 + \sin\Theta^2) = -\frac{b^2}{a}\cos\Theta^{-3}.$$

Mittelst neuer Differentiation nach x erhält man

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3b^2}{a}\cos\Theta^{-4}\,\frac{d\cos\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^2}{a}\cos\Theta^{-4}\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^3}{a^2}\cos\Theta^{-5}\sin\Theta.$$

Differentiirt man nun wieder nach x, so ergiebt sich

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{3b^3}{a^2}\cos\Theta^{-5}\,\frac{d\sin\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx} + \frac{15b^3}{a^2}\cos\Theta^{-6}\sin\Theta\,\frac{d\cos\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^3}{a^2}\cos\Theta^{-4}\,\frac{d\Theta}{dx} - \frac{15b^3}{a^2}\cos\Theta^{-6}\sin\Theta^2\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{3b^4}{a^3}\cos\Theta^{-5} - \frac{15b^4}{a^3}\cos\Theta^{-7}\sin\Theta^2$$

$$= -\frac{b^4}{a^3}\cos\Theta^{-7}(3\cos\Theta^2 + 15\sin\Theta^2)$$

$$= -\frac{b^4}{a^3}\cos\Theta^{-7}(3 + 12\sin\Theta^2).$$

Hieraus ergiebt sich durch neue Differentiation nach x

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\frac{24b^4}{a^3}\cos\Theta^{-7}\sin\Theta\,\frac{d\sin\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$

$$+\frac{7b^4}{a^3}\cos\Theta^{-8}(3+12\sin\Theta^2)\,\frac{d\cos\Theta}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{24b^5}{a^4}\cos\Theta^{-7}\sin\Theta$$

$$-\frac{7b^5}{a^4}\cos\Theta^{-9}\sin\Theta(3+12\sin\Theta^2)$$

$$= -\frac{b^5}{a^4}\cos\Theta^{-9}\sin\Theta(24\cos\Theta^2+21+84\sin\Theta^2)$$

$$= -\frac{b^5}{a^4}\cos\Theta^{-9}\sin\Theta(45+60\sin\Theta^2).$$

Durch fernere Differentiation nach x erhält man hieraus

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -\frac{b^5}{a^4}\cos\Theta^{-9}(45\cos\Theta+180\sin\Theta^2\cos\Theta)\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$-\frac{9b^5}{a^4}\cos\Theta^{-10}\sin\Theta^2(45+60\sin\Theta^2)\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-9}(45+180\sin\Theta^2)$$

$$-\frac{9b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}\sin\Theta^2(45+60\sin\Theta^2)$$

$$= -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}(45\cos\Theta^2+180\sin\Theta^2\cos\Theta^2$$

$$+405\sin\Theta^2+540\sin\Theta^4)$$

$$= -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}(45+540\sin\Theta^2+360\sin\Theta^4).$$

Differentiirt man von Neuem nach x, so erhält man

$$\frac{d^7y}{dx^7} = -\frac{b^6}{a^5}\cos\Theta^{-11}(1080\sin\Theta\cos\Theta+1440\sin\Theta^3\cos\Theta)\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$-\frac{11b^6}{a^5}\cos\Theta^{-12}\sin\Theta(45+540\sin\Theta^2+360\sin\Theta^4)\,\frac{d\Theta}{dx}$$

$$= -\frac{b^7}{a^6}\cos\Theta^{-11}(1080\sin\Theta+1440\sin\Theta^3)$$

$$-\frac{11b^7}{a^6}\cos\Theta^{-13}\sin\Theta(45+540\sin\Theta^2+360\sin\Theta^4)$$

$$= -\frac{b^7}{a^6}\cos\Theta^{-13}\sin\Theta(1080\cos\Theta^2+1440\sin\Theta^2\cos\Theta^2$$

$$+495+5940\sin\Theta^2+3960\sin\Theta^4)$$

$$= -\frac{b^7}{a^6}\cos\Theta^{-13}\sin\Theta(1575+6300\sin\Theta^2+2520\sin\Theta^4).$$

Um das Gesetz, welchem die gefundenen Ausdrücke unterworfen sind, besser übersehen zu können, wollen wir dieselben im Folgenden nochmals zusammenstellen:

$$y = a \cos \Theta$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^1}{a^0} \cos \Theta^{-1} \sin \Theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^1} \cos \Theta^{-3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{b^3}{a^2} \cos \Theta^{-5} \sin \Theta \,.\, 3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{b^4}{a^3} \cos \Theta^{-7}(3 + 12 \sin \Theta^2)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\frac{b^5}{a^4} \cos \Theta^{-9} \sin \Theta(45 + 60 \sin \Theta^2)$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -\frac{b^6}{a^5} \cos \Theta^{-11}(45 + 540 \sin \Theta^2 + 360 \sin \Theta^4)$$

$$\frac{d^7y}{dx^7} = -\frac{b^7}{a^6} \cos \Theta^{-13} \sin \Theta(1575 + 6300 \sin \Theta^2 + 2520 \sin \Theta^4).$$

Hieraus schliesst man sogleich durch Induction, dass allgemein

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} \cos \Theta^{-(4n-1)} \left\{ \begin{aligned} &\overset{2n}{A}_0 + \overset{2n}{A}_1 \sin \Theta^2 \\ &+ \overset{2n}{A}_2 \sin \Theta^4 \\ &+ \overset{2n}{A}_3 \sin \Theta^6 \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ \overset{2n}{A}_{n-1} \sin \Theta^{2n-2} \end{aligned} \right\}$$

und

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos \Theta^{-(4n+1)} \sin \Theta \left\{ \begin{aligned} &\overset{2n+1}{A}_0 + \overset{2n+1}{A}_1 \sin \Theta^2 \\ &+ \overset{2n+1}{A}_2 \sin \Theta^4 \\ &+ \overset{2n+1}{A}_3 \sin \Theta^6 \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ \overset{2n+1}{A}_{n-1} \sin \Theta^{2n-2} \end{aligned} \right\}$$

ist.

Um dieses Gesetz allgemein zu beweisen, und zugleich das recurrirende Gesetz der in diesen Formeln vorkommenden numerischen Coefficienten zu finden, wollen wir aus $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ und $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$ respective $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$ und $\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}}$ entwickeln.

Aus dem obigen Ausdrucke von $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}$ erhält man nämlich zuvörderst, wenn man von Neuem nach x differentiirt leicht:

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} \cos\Theta^{-(4n-1)} \left\{ \begin{array}{l} 2\overset{2n}{A}_1 \sin\Theta + 4\overset{2n}{A}_2 \sin\Theta^3 \\ + 6\overset{2n}{A}_3 \sin\Theta^5 \\ \text{u. s. w.} \\ + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-3} \end{array} \right\} \cos\Theta \frac{d\Theta}{dx}$$

$$-(4n-1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} \cos\Theta^{-4n} \sin\Theta \left\{ \begin{array}{l} \overset{2n}{A}_0 + \overset{2n}{A}_1 \sin\Theta^2 \\ + \overset{2n}{A}_2 \sin\Theta^4 \\ + \overset{2n}{A}_3 \sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ + \overset{2n}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-2} \end{array} \right\} \frac{d\Theta}{dx}$$

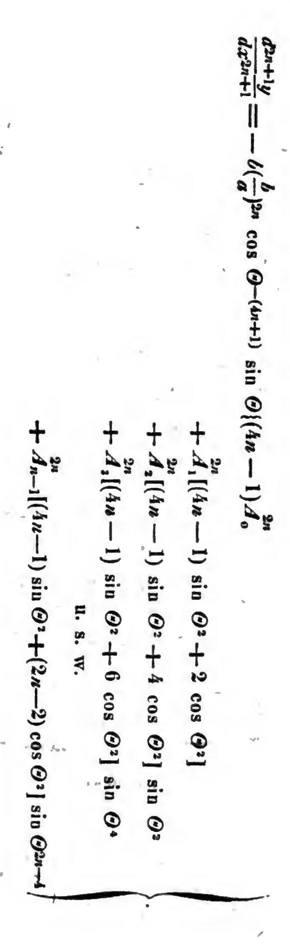
$$= -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n-1)} \left\{ \begin{array}{l} 2\overset{2n}{A}_1 \sin\Theta + 4\overset{2n}{A}_2 \sin\Theta^3 \\ + 6\overset{2n}{A}_3 \sin\Theta^5 \\ \text{u. s. w.} \\ + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-3} \end{array} \right\}$$

$$-(4n-1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n+1)} \sin\Theta \left\{ \begin{array}{l} \overset{2n}{A}_0 + \overset{2n}{A}_1 \sin\Theta^2 \\ + \overset{2n}{A}_2 \sin\Theta^4 \\ + \overset{2n}{A}_3 \sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ + \overset{2n}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-2} \end{array} \right\}$$

$$= -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n+1)} \sin\Theta \left\{ \begin{array}{l} 2\overset{2n}{A}_1 + 4\overset{2n}{A}_2 \sin\Theta^2 \\ + 6\overset{2n}{A}_3 \sin\Theta^4 \\ \text{u. s. w.} \\ + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-4} \end{array} \right\} \cos\Theta^2$$

$$-(4n-1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{\begin{array}{l}\overset{2n}{A}_0+\overset{2n}{A}_1\sin\Theta^2\\ \quad+\overset{2n}{A}_2\sin\Theta^4\\ \quad+\overset{2n}{A}_3\sin\Theta^6\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ \quad+\overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\end{array}\right\}.$$

Also ist



$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\left\{\begin{array}{l}(4n-1)\overset{2n}{A}_0\\ +\overset{2n}{A}_1[(4n-1)\sin\Theta^2+2\cos\Theta^2]\\ +\overset{2n}{A}_2[(4n-1)\sin\Theta^2+4\cos\Theta^2]\sin\Theta^2\\ +\overset{2n}{A}_3[(4n-1)\sin\Theta^2+6\cos\Theta^2]\sin\Theta^4\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ +\overset{2n}{A}_{n-1}[(4n-1)\sin\Theta^2+(2n-2)\cos\Theta^2]\sin\Theta^{2n-4}\end{array}\right\}.$$

Es ist aber allgemein

$$(4n-1)\sin\Theta^2+2k\cos\Theta^2=2k+(4n-2k-1)\sin\Theta^2,$$

und folglich

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\{&(4n-1)\overset{2n}{A}_0\\&+\overset{2n}{A}_1[2+(4n-3)\sin\Theta^2]\\&+\overset{2n}{A}_2[4+(4n-5)\sin\Theta^2]\sin\Theta^2\\&+\overset{2n}{A}_3[6+(4n-7)\sin\Theta^2]\sin\Theta^4\\&\quad\text{u. s. w.}\\&+\overset{2n}{A}_{n-1}[2n-2+(2n+1)\sin\Theta^2]\sin\Theta^{2n-4}\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+1)}\sin\Theta\{&(4n-1)\overset{2n}{A}_0+2\overset{2n}{A}_1\\&+[(4n-3)\overset{2n}{A}_1+4\overset{2n}{A}_2]\sin\Theta^2\\&+[(4n-5)\overset{2n}{A}_2+6\overset{2n}{A}_3]\sin\Theta^4\\&+[(4n-7)\overset{2n}{A}_3+8\overset{2n}{A}_4]\sin\Theta^6\\&\quad\text{u. s. w.}\\&+[(2n+3)\overset{2n}{A}_{n-2}+(2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1}]\sin\Theta^{2n-4}\\&+(2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2}\}\end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit dem Ausdrucke

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n+1)} \sin\Theta \left\{ \begin{aligned} &\overset{2n+1}{A}_0 + \overset{2n+1}{A}_1 \sin\Theta^2 \\ &+ \overset{2n+1}{A}_2 \sin\Theta^4 \\ &+ \overset{2n+1}{A}_3 \sin\Theta^6 \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ \overset{2n+1}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-2} \end{aligned} \right\},$$

so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\overset{2n+1}{A}_0 = (4n-1)\overset{2n}{A}_0 + 2\overset{2n}{A}_1,$$

$$\overset{2n+1}{A}_1 = (4n-3)\overset{2n}{A}_1 + 4\overset{2n}{A}_2,$$

$$\overset{2n+1}{A}_2 = (4n-5)\overset{2n}{A}_2 + 6\overset{2n}{A}_3,$$

$$\overset{2n+1}{A}_3 = (4n-7)\overset{2n}{A}_3 + 8\overset{2n}{A}_4,$$

u. s. w.

$$\overset{2n+1}{A}_{n-2} = (2n+3)\overset{2n}{A}_{n-2} + (2n-2)\overset{2n}{A}_{n-1},$$

$$\overset{2n+1}{A}_{n-1} = (2n+1)\overset{2n}{A}_{n-1};$$

mittelst welcher die numerischen Coefficienten

$$\overset{2n+1}{A}_0,\ \overset{2n+1}{A}_1,\ \overset{2n+1}{A}_2,\ \overset{2n+1}{A}_3, \ldots \overset{2n+1}{A}_{n-1}$$

aus den numerischen Coefficienten

$$\overset{2n}{A}_0,\ \overset{2n}{A}_1,\ \overset{2n}{A}_2,\ \overset{2n}{A}_3, \ldots \overset{2n}{A}_{n-1}$$

berechnet werden können.

Aus dem obigen Ausdrucke von $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$ erhält man ferner durch neue Differentiation nach x:

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos\Theta^{-(4n+1)} \left\{ \begin{aligned} &\overset{2n+1}{A}_0 + 3\overset{2n+1}{A}_1 \sin\Theta^2 \\ &+ 5\overset{2n+1}{A}_2 \sin\Theta^4 \\ &+ 7\overset{2n+1}{A}_3 \sin\Theta^6 \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ (2n-1)\overset{2n+1}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n-2} \end{aligned} \right\} \cos\Theta \frac{d\Theta}{dx}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
-(4n+1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\cos\Theta^{-(4n+2)}\sin\Theta^2\Big\{\overset{2n+1}{A}_0+\overset{2n+1}{A}_1\sin\Theta^2 & \\
+\overset{2n+1}{A}_2\sin\Theta^4 & \\
+\overset{2n+1}{A}_3\sin\Theta^6 & \\
\text{u. s. w.} & \\
+\overset{2n+1}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2} &
\end{aligned}
\right\}\frac{d\theta}{dx}
$$

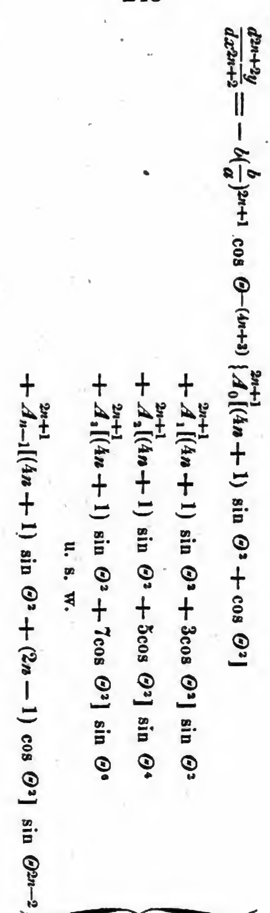
$$
\begin{aligned}
=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta^{-(4n+1)}\Big\{\overset{2n+1}{A}_0+3\overset{2n+1}{A}_1\sin\Theta^2 & \\
+5\overset{2n+1}{A}_2\sin\Theta^4 & \\
+7\overset{2n+1}{A}_3\sin\Theta^6 & \\
\text{u. s. w.} & \\
+(2n-1)\overset{2n+1}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2} & \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(4n+1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta^{-(4n+3)}\sin\Theta^2\Big\{\overset{2n+1}{A}_0+\overset{2n+1}{A}_1\sin\Theta^2 & \\
+\overset{2n+1}{A}_2\sin\Theta^4 & \\
+\overset{2n+1}{A}_3\sin\Theta^6 & \\
\text{u. s. w.} & \\
+\overset{2n+1}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2} & \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=-b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta^{-(4n+3)}\cos\Theta^2\Big\{\overset{2n+1}{A}_0+3\overset{2n+1}{A}_1\sin\Theta^2 & \\
+5\overset{2n+1}{A}_2\sin\Theta^4 & \\
+7\overset{2n+1}{A}_3\sin\Theta^6 & \\
\text{u. s. w.} & \\
+(2n-1)\overset{2n+1}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2} & \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(4n+1)b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}\cos\Theta^{-(4n+3)}\sin\Theta^2\Big\{\overset{2n+1}{A}_0+\overset{2n+1}{A}_1\sin\Theta^2 & \\
+\overset{2n+1}{A}_2\sin\Theta^4 & \\
+\overset{2n+1}{A}_3\sin\Theta^6 & \\
\text{u. s. w.} & \\
+\overset{2n+1}{A}_{n-1}\sin\Theta^{2n-2} & \Big\}
\end{aligned}
$$

und folglich



$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} \cos\Theta^{-(4n+3)} \left\{ \begin{array}{l} \overset{2n+1}{A_0}[(4n+1)\sin\Theta^2 + \cos\Theta^2] \\ + \overset{2n+1}{A_1}[(4n+1)\sin\Theta^2 + 3\cos\Theta^2]\sin\Theta^2 \\ + \overset{2n+1}{A_2}[(4n+1)\sin\Theta^2 + 5\cos\Theta^2]\sin\Theta^4 \\ + \overset{2n+1}{A_3}[(4n+1)\sin\Theta^2 + 7\cos\Theta^2]\sin\Theta^6 \\ \quad\quad \text{u. s. w.} \\ + \overset{2n+1}{A_{n-1}}[(4n+1)\sin\Theta^2 + (2n-1)\cos\Theta^2]\sin\Theta^{2n-2} \end{array} \right\}.$$

Es ist aber allgemein

$$(4n+1)\sin\Theta^2 + (2k+1)\cos\Theta^2 = 2k+1+(4n-2k)\sin\Theta^2;$$

also

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} \cos\Theta^{-(4n+3)} \left\{ \begin{array}{l} \overset{2n+1}{A}_0[1 + 4n \sin\Theta^2] \\ + \overset{2n+1}{A}_1[3 + (4n-2)\sin\Theta^2] \sin\Theta^2 \\ + \overset{2n+1}{A}_2[5 + (4n-4)\sin\Theta^2] \sin\Theta^4 \\ + \overset{2n+1}{A}_3[7 + (4n-6)\sin\Theta^2] \sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ + \overset{2n+1}{A}_{n-1}[(2n-1) + (2n+2)\sin\Theta^2] \sin\Theta^{2n-2} \end{array} \right\}$$

oder

$$\frac{d^{2n+2}y}{dx^{2n+2}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} \cos\Theta^{-(4n+3)} \left\{ \begin{array}{l} \overset{2n+1}{A}_0 \\ + [4n\overset{2n+1}{A}_0 + 3\overset{2n+1}{A}_1] \sin\Theta^2 \\ + [(4n-2)\overset{2n+1}{A}_1 + 5\overset{2n+1}{A}_2] \sin\Theta^4 \\ + [(4n-4)\overset{2n+1}{A}_2 + 7\overset{2n+1}{A}_3] \sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ + [(2n+4)\overset{2n+1}{A}_{n-2} + (2n-1)\overset{2n+1}{A}_{n-1}] \sin\Theta^{2n-2} \\ + (2n+2)\overset{2n+1}{A}_{n-1} \sin\Theta^{2n} \end{array} \right\}.$$

Setzen wir nun analog mit dem Obigen

$$\frac{d^{2(n+1)}y}{dx^{2(n+1)}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1} \cos\Theta^{-(4n+3)} \left\{ \begin{array}{l} \overset{2(n+1)}{A}_0 + \overset{2(n+1)}{A}_1 \sin\Theta^2 \\ + \overset{2(n+1)}{A}_2 \sin\Theta^4 \\ + \overset{2(n+1)}{A}_3 \sin\Theta^6 \\ \text{u. s. w.} \\ + \overset{2(n+1)}{A}_n \sin\Theta^{2n} \end{array} \right\},$$

so erhalten wir durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$\overset{2(n+1)}{A_0} = \overset{2n+1}{A_0},$$

$$\overset{2(n+1)}{A_1} = 4n \overset{2n+1}{A_0} + 3\overset{2n+1}{A_1},$$

$$\overset{2(n+1)}{A_2} = (4n-2)\overset{2n+1}{A_1} + 5\overset{2n+1}{A_2},$$

$$\overset{2(n+1)}{A_3} = (4n-4)\overset{2n+1}{A_2} + 7\overset{2n+1}{A_3},$$

u. s. w.

$$\overset{2(n+1)}{A_{n-1}} = (2n+4)\overset{2n+1}{A_{n-2}} + (2n-1)\overset{2n+1}{A_{n-1}},$$

$$\overset{2(n+1)}{A_n} = (2n+2)\overset{2n+1}{A_{n-1}};$$

mittelst welcher sich die numerischen Coefficienten

$$\overset{2(n+1)}{A_0}, \quad \overset{2(n+1)}{A_1}, \quad \overset{2(n+1)}{A_2}, \quad \overset{2(n+1)}{A_3}, \ldots \overset{2(n+1)}{A_n}$$

oder

$$\overset{2n+2}{A_0}, \quad \overset{2n+2}{A_1}, \quad \overset{2n+2}{A_2}, \quad \overset{2n+2}{A_3}, \ldots \overset{2n+2}{A_n}$$

aus den numerischen Coefficienten

$$\overset{2n+1}{A_0}, \quad \overset{2n+1}{A_1}, \quad \overset{2n+1}{A_2}, \quad \overset{2n+1}{A_3}, \ldots \overset{2n+1}{A_{n-1}}$$

berechnen lassen.

Durch das Vorhergehende ist nicht bloss die allgemeine Gültigkeit des bemerkten Gesetzes, nach welchem die Ausdrücke der Differentialquotienten

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} \text{ und } \frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}$$

fortschreiten, bewiesen, sondern es sind auch zugleich allgemeine Formeln zur recurrirenden Berechnung der in diesen Ausdrücken vorkommenden numerischen Coefficienten gefunden worden, wobei nun noch die Auffindung des independenten Fortschreitungsgesetzes dieser Coefficienten zu wünschen übrig bleibt, eine Untersuchung, zu der wir wohl die Leser des Archivs aufzufordern uns erlauben möchten.

Weil nach dem Obigen

$$\sin\Theta = \frac{bx}{a}$$

ist, und Θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird, so ist für $x=0$ auch $\Theta=0$. Da nun nach dem Obigen

$$\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} \cos \Theta^{-(4n-1)} \left\{ \overset{2n}{A}_0 + \overset{2n}{A}_1 \sin \Theta^2 + \overset{2n}{A}_2 \sin \Theta^4 \text{ u. s. w. } + \overset{2n}{A}_{n-1} \sin \Theta^{2n-2} \right\}$$

und

$$\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \cos \Theta^{-(4n+1)} \sin \Theta \left\{ \overset{2n+1}{A}_0 + \overset{2n+1}{A}_1 \sin \Theta^2 + \overset{2n+1}{A}_2 \sin \Theta^4 \text{ u. s. w. } + \overset{2n+1}{A}_{n-1} \sin \Theta^{2n-2} \right\}$$

ist, so ist, wenn die Werthe der Differentialquotienten für $x=0$ wie gewöhnlich durch Einschliessung in Parenthesen bezeichnet werden,

$$\left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right) = -b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} \overset{2n}{A}_0 = -\frac{b^{2n}}{a^{2n-1}} \overset{2n}{A}_0$$

und

$$\left(\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}\right) = 0.$$

Die Werthe der Differentialquotienten für $x=0$ erhält man übrigens ganz leicht durch Entwickelung von

$$y = a\sqrt{1 - \frac{b^2x^2}{a^2}}$$

in eine Reihe nach dem binomischen Lehrsatze, weshalb wir bei dieser Untersuchung nicht länger verweilen.

XXVII.

Ueber die Wurzelausziehung aus Binomien von der Form $A+\sqrt{B}$.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

---

1. Wenn man den Ausdruck $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c}$, wo a, b und c rational sind, auf die $n$te Potenz erhebt, so erhält man nach gehöriger Sonderung der rationalen und irrationalen Theile einen Ausdruck von der Form $A+\sqrt{B}$, wo A und B wieder rational sind. Es kann daher die $n$te Wurzel mancher Ausdrücke $A+\sqrt{B}$ auf die Form $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c}$ gebracht werden, wie schon Clairaut und Lacroix bemerkt haben. Da aber auch die $n$te Potenz des Ausdrucks $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c\sqrt{b}}$ *) dieselbe Form $A+\sqrt{B}$ annimmt, so kann die $n$te Wurzel von $A+\sqrt{B}$ auch die Form $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c\sqrt{b}}$ haben. Mit Berücksichtigung dieser Form wird also die Ausziehung der $n$ten Wurzel aus manchen Binomien $A+\sqrt{B}$ möglich sein, während sie den Voraussetzungen der genannten Schriftsteller zufolge für unmöglich erklärt werden müsste.

2. Ist nun also

$$A+\sqrt{B}=(a+\sqrt{b})^n\, c\sqrt{b},$$

so folgt aus der beziehlichen Gleichheit der rationalen und irrationalen Theile auch

$$A-\sqrt{B}=-(a-\sqrt{b})^n\, c\sqrt{b},$$

und aus der Multiplication beider Gleichungen

$$A^2-B=-(a^2-b)^n\, c^2 b.$$

Die Zahl A^2-B wird also in zwei Factoren zerlegt werden können, von denen der eine $(a^2-b)^n$ eine $n$te Potenz ist und der andere $-c^2b$ nicht. Sondert man daher aus A^2-B die Factoren

---

*) $(a+\sqrt{b})\sqrt[n]{c\sqrt{bd^2}}$ würde nicht allgemeiner sein.

heraus, aus deren Inbegriff sich die $n$te Wurzel ziehen lässt, so findet sich leicht der übrigbleibende Factor $-c^2b$ und demnächst auch $c\sqrt{b}$. Nachdem dieser gefunden ist, wird man durch $c\sqrt{b}$ dividiren können und

$$\frac{A+\sqrt{B}}{c\sqrt{b}}=(a+\sqrt{b})^n$$

erhalten; woraus folgt, dass $\frac{A+\sqrt{B}}{c\sqrt{b}}$ nach vollführter Division wieder die Form $A_1+\sqrt{B_1}$ annimmt, so dass es sich nur noch darum handelt, die $n$te Wurzel dieses Quotienten $A_1+\sqrt{B_1}$ auf die Form $a+\sqrt{b}$ zu bringen. Das eben angedeutete Verfahren ergiebt nämlich die Reduction

$$\sqrt[n]{A+\sqrt{B}}=\sqrt[n]{\frac{A+\sqrt{B}}{c\sqrt{b}}}\,\sqrt[n]{c\sqrt{b}}=\sqrt[n]{A_1+\sqrt{B_1}}\,\sqrt[n]{c\sqrt{b}}.$$

Es findet sich z. B. für $\sqrt{\frac{5}{27}+\sqrt{\frac{5}{144}}}$ der Ausdruck $(\frac{5}{27})^2-\frac{5}{144}=-\frac{5}{144\,.\,81}$; also $c^nb=\frac{5}{144\,.\,81}$ oder auch $=\frac{5}{16}$; daher

$$\sqrt[3]{\frac{5}{27}+\sqrt{\frac{5}{144}}}=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\,.\,\frac{\sqrt[6]{5}}{3\sqrt[3]{4}}\text{ oder auch }=\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{80}{729}}}\,.\,\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{4}}.$$

3. Wenn in dem Ausdruck $\sqrt[n]{A_1+\sqrt{B_1}}$ die Buchstaben A_1 und B_1 noch Brüche sind, so lassen sich deren Nenner vermittelst der bekannten Regeln ausserhalb der Wurzelzeichen hinausschaffen und man hat dann

$$\sqrt[n]{A_1+\sqrt{B_1}}=\frac{\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}}{N}=a+\sqrt{b},$$

wo P, Q und N ganze Zahlen sind.

Vermittelst dieser Umformung wird z. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{80}{729}}}$ auf $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ zurückgeführt, da sich $\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{80}{729}}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ findet.

Diese Umformung kann auch an dem Ausdrucke $a+\sqrt{b}$ ausgeführt gedacht werden. Bedeutet also von nun an jeder Buchstabe eine ganze Zahl, so wird sein:

$$\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}=\frac{x+\sqrt{y}}{p};$$

wobei offenbar angenommen werden darf, dass x^2, y und p^2 keinen gemeinschaftlichen quadratischen Theiler α^2 haben, weil sonst der Bruch $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ durch α gehoben werden könnte. Es kommt da-

her nur noch darauf an, die $n$te Wurzel des ganzzahligen Ausdrucks $P+\sqrt{Q}$ auf eine Bruchform $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ zurückzuführen.

Hier stellt sich aber die Frage, ob diese $n$te Wurzel auf einen ächten Bruch (wo $p>1$ ist) führen könne, oder ob p nicht vielleicht nothwendig der Einheit gleich sein müsse. Eine desfallsige Untersuchung führt zu dem folgenden Satze.

4. *Lehrsatz.* Wenn die $n$te Potenz des ächten Bruches $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ ganzzahlig $P+\sqrt{Q}$ ist, so ist 1) $p=2$, 2) $y=x^2-4z$, 3) x und z ungerade und 4) n durch 3 theilbar.

Beweis. Da $P+\sqrt{Q}=\frac{(x+\sqrt{y})^n}{p^n}$ und $P-\sqrt{Q}=\frac{(x-\sqrt{y})^n}{p^n}$, so folgt durch Multiplication

$$P^2-Q=\left(\frac{x^2-y}{p^2}\right)^n.$$

Es ist also $\frac{x^2-y}{p^2}$ gleich einer ganzen Zahl z, mithin $P^2-Q=z^n$ und $y=x^2-p^2z$. Hieraus geht hervor, dass p und x keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, indem sonst x^2, y und p^2 einen quadratischen Theiler haben würden, was nicht der Fall ist (3). Ferner geht aus $P^2-Q=z^n$ hervor, dass der rationale Theil P der $n$ten Potenz keine ganze Zahl sein kann, ohne dass es auch Q ist.

Aus der Addition jener beiden Gleichungen ergiebt sich

$$P=\frac{(x+\sqrt{y})^n+(x-\sqrt{y})^n}{2p^n}=\frac{(x+\sqrt{x^2-p^2z})^n+(x-\sqrt{x^2-p^2z})^n}{2p^n}$$

und wenn der rationale Theil von $(x+\sqrt{x^2-p^2z})^n$ entwickelt und nach Potenzen von p^2z geordnet wird:

$$P=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-2}p^2z+a_2x^{n-4}p^4z^2+\ldots}{p^n},$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ offenbar ganzzahlige, nur von n abhängige Coeffizienten sind. Da nun alle Glieder des Zählers ausser dem ersten durch p theilbar sind, so wird das erste es gleichfalls sein. Man findet es aber, wenn man in dem Ausdruck für P, $z=0$ setzt; nämlich $a_0x^n=2^{n-1}x^n$. Es wird also $2^{n-1}x^n$ und daher auch 2^{n-1} durch p theilbar sein, weil x und p keinen gemeinschaftlicher Factor haben; folglich muss $p=2q$ gesetzt werden, wo q keine andere Factoren als 2 haben, aber auch der Einheit gleich sein kann. Wird $2q$ für p gesetzt, so ergiebt sich

$$P=\frac{2^{n-1}x^n+4a_1x^{n-2}q^2z+16a_2x^{n-4}q^4z^2+\ldots}{2^n\,.\,q^n}$$

Nun behaupte ich, dass der Zähler dieses Bruches, unabhängig von den Werthen von x und q^2z durch 2^{n-1} theilbar ist. Wird nämlich $(x+\sqrt{x^2-4q^2z})^m=\alpha_m+\beta_m\sqrt{x^2-4q^2z}$ gesetzt und sind α_m und β_m durch 2^{m-1}, dagegen $\alpha_m+\beta_m x$ durch 2^m theilbar, so werden die nämlichen Bedingungen für α_{m+1} und β_{m+1}



stattfinden; d. h. es werden α_{m+1} und β_{m+1} durch 2^m, dagegen $\alpha_{m+1}+\beta_{m+1}x$ durch 2^{m+1} theilbar sein. Denn da

$$\alpha_{m+1}+\beta_{m+1}\sqrt{x^2-4q^2z}=(x+\sqrt{x^2-4q^2z})\,(\alpha_m+\beta_m\sqrt{x^2-4q^2z})$$

ist, so findet sich

$$\alpha_{m+1}=x(\alpha_m+\beta_m x)-4\beta_m q^2 z$$

$$\beta_{m+1}=\alpha_m+\beta_m x$$

$$\alpha_{m+1}+\beta_{m+1}x=2x(\alpha_m+\beta_m x)-4\beta_m q^2 z,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellet. Nun ist aber $\alpha_1=x$, $\beta_1=1$, $\alpha_1+\beta_1 x=2x$; und daher α_1 und β_1 durch 2^0 oder 1, dagegen $\alpha_1+\beta_1 x$ durch 2^1 oder 2 theilbar; folglich ist auch wirklich α_m und β_m durch 2^{m-1}, daher auch α_n und β_n durch 2^{n-1} theilbar.

Nach Aufhebung des Factors 2^{n-1} hat man also

$$P=\frac{x^n+b_1x^{n-2}q^2z+b_2x^{n-4}q^4z^2+\ldots.}{2\cdot q^n}.$$

Hier sind wieder alle Glieder des Zählers ausser dem ersten durch q theilbar; also ist es auch das erste, was nicht anders stattfinden kann, als wenn $q=1$ ist, indem q und x keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es ist folglich

1) $p=2$, weil $p=2q$ gesetzt worden ist
2) $y=x^2-4z$, wegen $y=x^2-p^2z$ *)
3) x ungerade, da es keinen Factor mit $p=2$ gemein hat; und auch z ungerade, weil sonst alle Glieder des Zählers von P

---

*) Das bis hieher Bewiesene lässt sich viel kürzer mittelst der folgenden Schlussfolgerungen herleiten. Aus $(\frac{x\pm\sqrt{y}}{p})^n=$ einem ganzzahligen Ausdrucke $P\pm\sqrt{Q}$ ergeben sich der Reihe nach folgende ganze Zahlen: $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$, $\frac{x-\sqrt{y}}{p}$ (ganze Zahlen allerdings nicht im Sinne des Textes, in welchem sie vielmehr ächte Brüche genannt wurden, sondern ungefähr im Sinn der Congruenzentheorie, in welcher $\sqrt{3}\equiv 4$ (mod. 13) gesetzt oder mit andern Worten $\frac{4-\sqrt{3}}{13}$ als ganze Zahl betrachtet wird); ferner deren Product $\frac{x^2-y}{p^2}=z$, daher $y=x^2-p^2z$; ferner $\frac{x+\sqrt{x^2-p^2z}}{p}$ oder $\frac{x+\sqrt{x^2}}{p}$ oder $\frac{2x}{p}$, insofern $\frac{\sqrt{x^2-p^2z}-\sqrt{x^2}}{p}$ als ganze Zahl anzusehen ist; daher $p=2$; ferner endlich

$$(\frac{x+\sqrt{x^2-4z}}{2})^n+(\frac{x-\sqrt{x^2-4z}}{2})^n \text{ d. h. } \frac{\alpha_n}{2^{n-1}}.$$

Da jedoch die Principien, auf denen diese Folgerungen beruhen, noch nicht als elementar betrachtet werden dürfen, ja vielleicht kaum schon berührt worden sind, so mag es genügen beiläufig darauf hingedeutet zu haben.

durch den Nenner 2 theilbar sein würden, das erste x^n aber nicht; mithin auch der ganze Zähler nicht.

Endlich ist jetzt

$$P = \frac{x^n + b_1 x^{n-2} z + b_1 x^{n-4} z^2 + \ldots}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-4z})^n + (x-\sqrt{x^2-4z})^n}{2^{n+1}}.$$

Da nun x^n, $x^{n-2}z$, $x^{n-4}z^2$, ... beziehlich von der Form $2r+1$, $2r_1+1$, $2r_2+1$, ... sind, so geht dieser Ausdruck dadurch in

$$r + b_1 r_1 + b_2 r_2 + \ldots + \frac{1+b_1+b_2+\ldots}{2}$$

über; desshalb ist $\frac{1+b_1+b_2+\ldots}{2}$ oder der Werth von P für $x=1$, $z=1$ eine ganze Zahl, nämlich

$$\frac{(1+\sqrt{-3})^n + (1-\sqrt{-3})^n}{2^{n+1}} = g.$$

Wäre nun n von der Form $3m \pm 1$, so hätte man wegen $(1 \pm \sqrt{-3})^3 = 8 = 2^3$

$$g = \frac{2^{3m}\{(1+\sqrt{-3})^{\pm 1} + (1-\sqrt{-3})^{\pm 1}\}}{2^{3m \pm 1 + 1}} = \pm \tfrac{1}{2}.$$

In beiden Fällen würde der Ausdruck für P ein Bruch werden; was jedoch nicht der Fall ist, wenn $n = 3m$ ist, denn man hat dann

$$g = \frac{2^{3m} + 2^{3m}}{2^{3m+1}} = 1.$$

Folglich ist 4) n durch 3 theilbar; womit der Lehrsatz vollständig erwiesen ist.

Da allen Bedingungen für die Ganzzahligkeit genügt worden ist, so geht zugleich hervor, dass der Bruch $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ unter den im Lehrsatze angegebenen Umständen in jeder $3m$ten Potenz einen ganzzahligen Ausdruck liefert. Es sei z. B. $x=7$, $z=11$, also $y=5$, so hat man

$$\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^{3m} = (56+19\sqrt{5})^m.$$

5. Dass die $\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}$ keine Bruchform $\frac{x+\sqrt{y}}{p}$ haben kann, wofern nicht n durch 3 theilbar ist, hat soviel ich weiss noch Niemand erwähnt. Dass für $n=3m$ der Nenner p auch gleich 2 sein kann, erwähnt Clairaut für den besondern Fall der Cubikwurzel und beweist es dadurch, dass er die Wurzel $\frac{x}{p}+\frac{\sqrt{y}}{q}$ annimmt, die Ausdrücke für P und $\sqrt{Q}$ ihrer ganzen Länge nach entwickelt und dann vermittelst der bekannten Criterien der Theil-

barkeit erst $p=q$ und demnächst $p=2$ findet. Eben dies Verfahren liesse sich auch für ein allgemeines n anwenden. Indessen dürfte die Entwickelung der Coefficienten in dem Ausdrucke für P (welche bekanntlich mit der Entwickelung von $\cos m\alpha$ nach Potenzen von $\cos\alpha$ identisch ist) vom elementaren Standpunkte aus ihre Schwierigkeiten oder gar Unmöglichkeiten haben. Da es überdies nur darauf ankommt, den Werth von a_0 und die Theilbarkeit der Coefficienten $4a_1$, $16a_2$, ... durch 2^{n-1} nachzuweisen, und da es ferner weit einfacher ist, wegen der Summe $1+b_1+b_2+\ldots$ auf den geschlossenen Ausdruck $\frac{(x+\sqrt{y})^n+(x-\sqrt{y})^n}{2^n}$ zurückzugehen, als die unbegränzte Reihe der ausgewertheten Coefficienten $1, b_1, b_2, \ldots$ zu summiren, so ist dieser Weg zum Beweise des Lehrsatzes (4) nicht gewählt worden.

6. Mit Hülfe dieses Lehrsatzes wird es nun leicht, das bei (3) unterbrochene Verfahren zur Ausziehung der $n$ten Wurzel aus $P+\sqrt{Q}$ zu beendigen, wenn Q positiv ist. Da nämlich ihm zufolge

$$\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}=\frac{x+\sqrt{y}}{2}\ (\text{oder } x+\sqrt{y})$$

$$\sqrt[n]{P-\sqrt{Q}}=\frac{x-\sqrt{y}}{2}\ (\text{oder } x-\sqrt{y})$$

ist, so folgt hieraus durch Addition, dass

$$\sqrt[n]{P+\sqrt{Q}}+\sqrt[n]{P-\sqrt{Q}}=x\ (\text{oder } 2x)$$

jedenfalls eine ganze Zahl ist; wofern die Wurzelausziehung überhaupt im rationalen Ausdrücken möglich ist. Um den rationalen Theil der Wurzel $\frac{x}{2}$ (oder x) zu finden, darf man daher nur jene Summe der $n$ten Wurzeln bis auf die Einer genau berechnen. Hiezu ist aber erforderlich, dass jede einzelne $n$te Wurzel bis auf halbe Einheiten, d. h. bis auf 0,5 oder am besten bis auf die erste Decimale genau berechnet wird, weil sich durch die Addition beider Werthe die Fehler verdoppeln könnten. Wenn die so gefundene Zahl bei $n=3m\pm1$ nicht gerade sein sollte, so braucht man nicht weiter zu gehen, indem dann die Unmöglichkeit der Wurzelausziehung in der angenommenen Form einleuchtet. In allen andern Fällen hat man das gefundene Resultat durch 2 zu theilen, um den rationalen Theil $\frac{x}{2}$ (oder x) der Wurzel zu haben. Den irrationalen Theil findet man dann aus der Gleichung

$$y=x^2-4z\ (\text{oder } x^2-z).$$

Ob der so gefundene Ausdruck wirklich die $n$te Wurzel aus $P+\sqrt{Q}$ ist, muss unmittelbar durch Erhebung zur $n$ten Potenz entschieden werden, da das angegebene Verfahren nur auf der Voraussetzung beruht, dass die Wurzelausziehung überhaupt möglich ist.

Beispiele.

I. $\sqrt[5]{10+\sqrt{68}}+\sqrt[5]{10-\sqrt{68}}=\sqrt[5]{18,..}+\sqrt[5]{2,..}=1,7+1,1=3=2x.$

Die Wurzelausziehung ist also unmöglich.

II. $\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}+\sqrt[5]{41-29\sqrt{2}}=\sqrt[5]{82,0}+\sqrt[5]{-0,0}=2=2x.$

Ferner $\sqrt[5]{41^2-29^2.2}=-1=z;\ y=x^2-z=2.$

Dass nun $1+\sqrt{2}$ wirklich die $\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}$ ist, zeigt sich erst durch Erhebung zur 5ten Potenz.

III. $\sqrt[5]{231+\sqrt{53329}}+\sqrt[5]{231-\sqrt{53329}}=\sqrt[5]{461,9}+\sqrt[5]{0,1}$

$=3,4+0,6=4=2x.$

Dann $\sqrt[5]{231^2-53329}=2=z,\ y=x^2-z=2.$ Aber $(2+\sqrt{2})^5$ ist gleich $232+\sqrt{53792}$ und nicht gleich $231+\sqrt{53329}$. Aus diesem letzteren Binomium lässt sich also keine 5te Wurzel ziehen.

IV. $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{18..}+\sqrt[3]{0,..}=2,6+0=3=x.$

Ferner $\sqrt[3]{9^2-4^2.5}=1=z,\ y=x^2-4z=5,$ und es findet sich wirklich $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3=9+4\sqrt{5}.$

V. $\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}=\sqrt[3]{11,9}+\sqrt[3]{0,1}=2,3+0,4=3=x.$

Ferner $\sqrt[3]{6^2-35}=1=z,\ y=x^2-4z=5.$ Es findet sich aber $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3=9+4\sqrt{5}$ und nicht $=6+\sqrt{35}$. Dieser Ausdruck hat also keine Cubikwurzel von der gegebenen Form.

XXVIII.

Novi alicujus theorematis arithmetici commentatio analytica.

Auctore

Friederico Arndt

muneris schol. Cand. Gryph.

Neminem fugit, permultis ad coefficientes binomiales spectantibus propositionibus similia respondere theoremata, quae ad quantitatem hujus formae

$$\frac{n(n+k)(n+2k)\ldots(n+(p-1)k)}{1.2.3\ldots p}$$

pertinent, ita ut illas ex his tanquam ex altiori fonte deducere liceat, quo loco n, k sunt quanta quaelibet, p vero numerus integer positivus.

Quum igitur his rebus studerem quumque intellexissem, demonstrationem theorematis Lagrangiani ad summam quadratorum coefficientium binomialium pertinentis non peti a geometris ex illa forma consideranda. tale theorema ex quo illud ipsum manaret, statim in mentem venit quaerere. Quod quidem nunc in promptu est itaque enunciari debet:

Designante $\overset{k}{n}_p$ quantitatem supra commemoratam, demonstrandam nobis proponimus aequationem hanc

$$\overset{k}{n}_p = \overset{k}{(n+mk)}_p - m_1 k \overset{k}{(n+mk)}_{p-1} + m_2 k^2 \overset{k}{(n+mk)}_{p-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m m_m k^m \overset{k}{(n+mk)}_{p-m},$$

ubi denotat m numerum integrum positivum ipso p non majorem atque m_1, m_2, m_3, ... coefficientes binomiales primum, secundum, tertium, etc. pro exponente m.

Primum facile patebit esse

$$\overset{k}{(n+k)}_p = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{n+pk}{n}, \quad \overset{k}{(n+k)}_{p-1} = \overset{k}{n}_p \cdot \frac{p}{n},$$

unde manat

$$1. \quad \overset{k}{n}_p = \overset{k}{(n+k)}_p - k\overset{k}{(n+k)}_{p-1}.$$

Deinde habetur simili modo



$$(n \overset{k}{+} k)_p = (n \overset{k}{+} 2k)_p - k(n \overset{k}{+} 2k)_{p-1}$$

$$(n \overset{k}{+} k)_{p-1} = (n \overset{k}{+} 2k)_{p-1} - k(n \overset{k}{+} 2k)_{p-2},$$

quibus aequationibus cum prima collatis prodit

$$2. \quad \overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} 2k)_p - 2k(n \overset{k}{+} 2k)_{p-1} + k^2(n \overset{k}{+} 2k)_{p-2}.$$

Porro simili modo habetur

$$(n \overset{k}{+} 2k)_p = (n \overset{k}{+} 3k)_p - k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-1}$$

$$(n \overset{k}{+} 2k)_{p-1} = (n \overset{k}{+} 3k)_{p-1} - k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-2}$$

$$(n \overset{k}{+} 2k)_{p-2} = (n \overset{k}{+} 3k)_{p-2} - k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-3},$$

quibus aequationibus cum secunda collatis prodit

$$3. \quad \overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} 3k)_p - 3k(n \overset{k}{+} 3k)_{p-1} + 3k^2(n \overset{k}{+} 3k)_{p-2} - k^3(n \overset{k}{+} 3k)_{p-3}.$$

Jam ex his lex patebit, ex qua termini sint conformati; ut vero theorema in genere probetur, assumamus verum id esse usque ad limitem quendam. Sit igitur

$$\overset{k}{n}_p = \{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_p - (m-1)_1 k\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-1}$$
$$+ (m-1)_2 k^2\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-2} - \ldots + (-1)^{m-1} k^{m-1}\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-m+1}$$

eritque simili modo ut antea

$$\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_p = (n \overset{k}{+} mk)_p - k(n \overset{k}{+} mk)_{p-1}$$

$$\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-1} = (n \overset{k}{+} mk)_{p-1} - k(n \overset{k}{+} mk)_{p-2}$$

$$\{n \overset{k}{+} (m-1)k\}_{p-2} = (n \overset{k}{+} mk)_{p-2} - k(n \overset{k}{+} mk)_{p-3}$$

etc. etc.

unde per substitutionem

$$\overset{k}{n}_p = (n \overset{k}{+} mk)_p - \{(m-1)_1 + 1\}k(n \overset{k}{+} mk)_{p-1}$$
$$+ \{(m-1)_2 + (m-1)_1\}k^2(n \overset{k}{+} mk)_{p-2}$$
$$- \{(m-1)_3 + (m-1)_2\}k^3(n \overset{k}{+} mk)_{p-3}$$
$$+ \{(m-1)_4 + (m-1)_3\}k^4(n \overset{k}{+} mk)_{p-4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jam vero est

$$(m-1)_1 + 1 = m_1$$
$$(m-1)_2 + (m-1)_1 = m_2$$
$$(m-1)_3 + (m-1)_2 = m_3$$
etc.

quod facile perspicietur, ergo erit

$$\overset{k}{n}_p = \overset{k}{(n+mk)}_p - m_1 k \overset{k}{(n+mk)}_{p-1}$$
$$+ m_2 k^2 \overset{k}{(n+mk)}_{p-2} - m_3 k^3 \overset{k}{(n+mk)}_{p-3} + \ldots\ldots$$

Quando igitur propositio valet, si factorem ipsius k accipias $m-1$, etiam valebit, si m quantitatis $m-1$ loco ponas. Valet autem pro k, $2k$, $3k$, idcoque in universum vera erit.

Habemus igitur

$$4. \quad \overset{k}{n}_p = \overset{k}{(n+mk)}_p - m_1 k \overset{k}{(n+mk)}_{p-1} + m_2 k^2 \overset{k}{(n+mk)}_{p-2} - \ldots$$

ex quo sequitur ponendo $n + mk = q$:

$$5. \quad \overset{k}{(q-mk)}_p = \overset{k}{q}_p - m_1 k \overset{k}{q}_{p-1} + m_2 k^2 \overset{k}{q}_{p-2} - \ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^m k^m \overset{k}{q}_{p-m}$$

vel si $-k$ scribas pro k

$$6. \quad \overset{-k}{(q+mk)}_p = \overset{-k}{q}_p + m_1 k \overset{-k}{q}_{p-1} + m_2 k^2 \overset{-k}{q}_{p-2} - \ldots$$
$$\ldots\ldots + k^m \overset{-k}{q}_{p-m}$$

et pro $k = 1$

$$7. \quad \overset{-1}{(q+m)}_p = \overset{-1}{q}_p + m_1 \overset{-1}{q}_{p-1} + m_2 \overset{-1}{q}_{p-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + m_m \overset{-k}{q}_{p-m}.$$

Quo loco ex. gr. $\overset{-1}{q}_p$ designare coefficientem binomialem p^{tum} pro exponente q perspicuum erit; qua re indicem -1 omittamus.

Quando denique accipitur $q = m = p$ prodibit aequatio haec

$$(2p)_p = p_p + p_1 \cdot p_{p-1} + p_2 \cdot p_{p-2} + \ldots\ldots + p_p p_0$$

quumque sit $p_p = p_0 = 1$, $p_{p-1} = p_1$, $p_{p-2} = p_2$, etc. $p_0 = p_p$, manifesto habetur

$$8. \quad (2p)_p = (p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 + \ldots + (p_p)^2$$

qua aequatione exhibetur theorema Lagrangianum, de quo supra sermo erat.

Scrib. Gryphiae d. 5. m. Aug. a. MDCCCXLII.

XXIX.

Ueber eine Eigenschaft des Kreises.

Von

dem Herausgeber.

Die Gleichung des Kreises in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy ist bekanntlich, wenn r den Halbmesser bezeichnet und a, b die Coordinaten des Mittelpunkts sind:

$$1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Wenn also x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 die Coordinaten vier beliebiger Punkte dieses Kreises sind, so haben wir die vier folgenden Gleichungen:

$$2)\ \begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,\\(x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2,\\(x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2,\\(x_4-a)^2+(y_4-b)^2=r^2;\end{cases}$$

welche auch unter der folgenden Form dargestellt werden können:

$$3)\ \begin{cases}x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1=r^2-a^2-b^2,\\x_2^2+y_2^2-2ax_2-2by_2=r^2-a^2-b^2,\\x_3^2+y_3^2-2ax_3-2by_3=r^2-a^2-b^2,\\x_4^2+y_4^2-2ax_4-2by_4=r^2-a^2-b^2.\end{cases}$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$4)\ \begin{cases}f_1=\quad(x_3-x_4)y_2+(x_4-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_4,\\f_2=-\{(x_4-x_1)y_3+(x_1-x_3)y_4+(x_3-x_4)y_1\},\\f_3=\quad(x_1-x_2)y_4+(x_2-x_4)y_1+(x_4-x_1)y_2,\\f_4=-\{(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3\};\end{cases}$$

oder, was dasselbe ist:

$$5)\ \begin{cases}f_1=-\{(y_3-y_4)x_2+(y_4-y_2)x_3+(y_2-y_3)x_4\},\\f_2=\quad(y_4-y_1)x_3+(y_1-y_3)x_4+(y_3-y_4)x_1,\\f_3=-\{(y_1-y_2)x_4+(y_2-y_4)x_1+(y_4-y_1)x_2\},\\f_4=\quad(y_2-y_3)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_1-y_2)x_3;\end{cases}$$

so ist, wovon man sich durch ganz einfache Rechnung leicht überzeugen kann:

$$6)\begin{cases} f_1+f_2+f_3+f_4=0, \\ x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4=0, \\ y_1f_1+y_2f_2+y_3f_3+y_4f_4=0. \end{cases}$$

Multiplicirt man also die vier Gleichungen 3) nach der Reihe mit f_1, f_2, f_3, f_4, und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man wegen der Gleichungen 6) auf der Stelle die Gleichung

$$\begin{aligned} 7)\ 0=&(x_1^2+y_1^2)\ \{(x_3-x_4)y_2+(x_4-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_4\} \\ &-(x_2^2+y_2^2)\ \{(x_4-x_1)y_3+(x_1-x_3)y_4+(x_3-x_4)y_1\} \\ &+(x_3^2+y_3^2)\ \{(x_1-x_2)y_4+(x_2-x_4)y_1+(x_4-x_1)y_2\} \\ &-(x_4^2+y_4^2)\ \{(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3\} \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} 8)\ 0=&(x_1^2+y_1^2)\ \{(y_3-y_4)x_2+(y_4-y_2)x_3+(y_2-y_3)x_4\} \\ &-(x_2^2+y_2^2)\ \{(y_4-y_1)x_3+(y_1-y_3)x_4+(y_3-y_4)x_1\} \\ &+(x_3^2+y_3^2)\ \{(y_1-y_2)x_4+(y_2-y_4)x_1+(y_4-y_1)x_2\} \\ &-(x_4^2+y_4^2)\ \{(y_2-y_3)x_1+(y_3-y_1)x_2+(y_1-y_2)x_3\}. \end{aligned}$$

Dies ist eine allgemeine Relation zwischen den rechtwinkligen Coordinaten vier in einem Kreise liegender Punkte.

Um nun die geometrische Bedeutung der in dieser Relation vorkommenden Grössen zu erforschen, wollen wir jetzt die vier in dem Kreise liegenden Punkte, deren rechtwinklige Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 sind, respective durch A_1, A_2, A_3, A_4, den Anfang der Coordinaten aber durch O bezeichnen. Dann ist zuvörderst bekanntlich

$$A_1O^2=x_1^2+y_1^2,$$
$$A_2O^2=x_2^2+y_2^2,$$
$$A_3O^2=x_3^2+y_3^2,$$
$$A_4O^2=x_4^2+y_4^2.$$

Ferner wollen wir die übrigens schon oft behandelte Aufgabe: die Fläche eines Dreiecks durch die rechtwinkligen Coordinaten seiner Spitzen auszudrücken, vollständig auflösen, weil wir bei derselben über das Vorzeichen des Ausdrucks, den man für die Fläche des Dreiecks gewöhnlich zu geben pflegt, eine Bemerkung zu machen haben, welche, wie es uns scheint, sehr mit Unrecht nicht immer gehörig hervorgehoben wird.

Die Spitzen des Dreiecks, dessen gesuchten Flächeninhalt wir durch Δ bezeichnen wollen, seien A_1, A_2, A_3, und x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 seien deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Offenbar wird man immer ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x'y'z'$, dessen Anfang O' sein mag, so annehmen könnnen, dass in diesem Systeme die Coordinaten der Spitzen A_1, A_2, A_3, welche durch x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3 bezeichnet werden mögen, sämmtlich positiv sind. Betrachten wir nun, für

jetzt immer dieses letztere Coordinatensystem in's Auge fassend, zuerst den Fall, wenn der Punkt A_3 zwischen den Ordinaten der beiden Punkte A_1 und A_2 liegt, so können in diesem ersten Hauptfalle offenbar bloss die vier verschiedenen, in Taf. IV. Fig. 5. dargestellten Nebenfälle Statt finden. In dem ersten dieser vier Fälle ist, wie sogleich erhellen wird,

$$\begin{aligned}2\Delta = & (x'_1 - x'_2)(y'_1 + y'_2)\\ & + (x'_2 - x'_3)(y'_2 + y'_3)\\ & + (x'_3 - x'_1)(y'_3 + y'_1)\end{aligned}$$

$$2\Delta = -\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\}.$$

In dem zweiten Falle ist, wie eben so leicht erhellet,

$$\begin{aligned}2\Delta = & -(x'_1 - x'_2)(y'_1 + y'_2)\\ & -(x'_2 - x'_3)(y'_2 + y'_3)\\ & -(x'_3 - x'_1)(y'_3 + y'_1)\end{aligned}$$

$$= (x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3.$$

In dem dritten Falle ist auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned}2\Delta = & (x'_1 - x'_2)(y'_1 + y'_2)\\ & + (x'_2 - x'_3)(y'_2 + y'_3)\\ & + (x'_3 - x'_1)(y'_3 + y'_1)\end{aligned}$$

$$= -\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\}.$$

Endlich ist in dem vierten der in der Figur dargestellten Fälle

$$\begin{aligned}2\Delta = & -(x'_1 - x'_2)(y'_1 + y'_2)\\ & -(x'_2 - x'_3)(y'_2 + y'_3)\\ & -(x'_3 - x'_1)(y'_3 + y'_1)\end{aligned}$$

$$= (x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3.$$

Folglich ist überhaupt

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wo im ersten und dritten Falle das obere, im zweiten und vierten Falle das untere Zeichen genommen werden muss; d. h., wie leicht in die Augen fällt, man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Wenn der Punkt A_2 zwischen den Ordinaten der Punkte A_1 und A_3 liegt, so ist nach dem Vorhergehenden, indem man die Coordinaten der Punkte A_2 und A_3 gegeneinander vertauscht,

$$2\Delta = \mp\{(x'_3 - x'_2)y'_1 + (x'_2 - x'_1)y'_3 + (x'_1 - x'_3)y'_2\}$$

oder, was dasselbe ist,

$$2\Delta = \pm\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_3 zu dem Punkte A_2 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Weil nun aber die Richtung von A_1 durch A_2 zu A_3 der Richtung von A_1 durch A_3 zu A_2 offenbar entgegengesetzt ist, so ist augenscheinlich

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wenn man nur das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Wenn endlich der Punkt A_1 zwischen den Ordinaten der Punkte A_2 und A_3 liegt, so ist nach dem ersten der beiden vorhergehenden Fälle, wenn man für x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3 respective x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; x'_1, y'_1 setzt, offenbar

$$2\Delta = \mp\{(x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3 + (x'_2 - x'_3)y'_1\}$$

oder, was dasselbe ist,

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_2 durch den Punkt A_3 zu dem Punkte A_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hinbewegen muss. Weil nun aber die Richtung von A_2 durch A_3 zu A_1 offenbar mit der Richtung von A_1 durch A_2 zu A_3 völlig einerlei ist, so ist

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

und in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen, so ist in völliger Allgemeinheit

$$2\Delta = \mp\{(x'_2 - x'_3)y'_1 + (x'_3 - x'_1)y'_2 + (x'_1 - x'_2)y'_3\},$$

wenn man nur in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven

Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Anfangspunktes des secundären Systems der $x'y'$ in Bezug auf das primitive System der xy durch a, b; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich in völliger Allgemeinheit

$$x = a + x',\ y = b + y'$$

oder

$$x' = x - a,\ y' = y - b,$$

und folglich

$$x'_1 = x_1 - a,\ y'_1 = y_1 - b;$$
$$x'_2 = x_2 - a,\ y'_2 = y_2 - b;$$
$$x'_3 = x_3 - a,\ y'_3 = y_3 - b.$$

Also ist nach der vorher gefundenen Gleichung

$$2\Delta = \mp \left\{ \begin{array}{l} [(x_2 - a) - (x_3 - a)]\ (y_1 - b) \\ + [(x_3 - a) - (x_1 - a)]\ (y_2 - b) \\ + [(x_1 - a) - (x_2 - a)]\ (y_3 - b) \end{array} \right\}$$

oder

$$2\Delta = \mp \{(x_2 - x_3)\ (y_1 - b) + (x_3 - x_1)\ (y_2 - b) + (x_1 - x_2)\ (y_3 - b)\},$$

und folglich, weil

$$(x_2 - x_3) + (x_3 - x_1) + (x_1 - x_2) = 0,$$

also auch

$$b(x_2 - x_3) + b(x_3 - x_1) + b(x_1 - x_2) = 0$$

ist, in völliger Allgemeinheit

$$9)\ 2\Delta = \mp \{(x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3\},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem man sich, um von dem Punkte A_1 durch den Punkt A_2 zu dem Punkte A_3 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss.

Kehren wir nun wieder zu dem oben betrachteten Falle, wenn die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in einem Kreise liegen, zurück, und nehmen an, dass dieselben in dem Kreise nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 auf einander folgen, so sind, weil keiner dieser Punkte innerhalb des durch die drei andern bestimmten Dreiecks liegt, offenbar die Richtungen, nach denen man sich bewegen muss, um von A_1 durch A_2 zu A_3, von A_2 durch A_3 zu A_4, von A_3 durch A_4 zu A_1, von A_4 durch A_1 zu A_2 zu gelangen, nicht von einander verschieden, und nach 9) ist folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander jederzeit

$$2\Delta A_2A_3A_4 = \mp\{(x_3-x_4)y_2+(x_4-x_2)y_3+(x_2-x_3)y_4\},$$
$$2\Delta A_3A_4A_1 = \mp\{(x_4-x_1)y_3+(x_1-x_3)y_4+(x_3-x_4)y_1\},$$
$$2\Delta A_4A_1A_2 = \mp\{(x_1-x_2)y_4+(x_2-x_4)y_1+(x_4-x_1)y_2\},$$
$$2\Delta A_1A_2A_3 = \mp\{(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3\}.$$

Also ist nach 7) jederzeit

$$\begin{aligned}0 = &\mp A_1O^2 . \Delta A_2A_3A_4\\ &\pm A_2O^2 . \Delta A_3A_4A_1\\ &\mp A_3O^2 . \Delta A_4A_1A_2\\ &\pm A_4O^2 . \Delta A_1A_2A_3,\end{aligned}$$

und folglich immer

$$\begin{aligned}0 = &\quad A_1O^2 . \Delta A_2A_3A_4\\ &- A_2O^2 . \Delta A_3A_4A_1\\ &+ A_3O^2 . \Delta A_4A_1A_2\\ &- A_4O^2 . \Delta A_1A_2A_3.\end{aligned}$$

Weil der Anfang O der Coordinaten natürlich ganz willkührlich ist, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar der folgende nicht uninteressante Satz vom Kreise:

Wenn A_1, A_2, A_3, A_4 vier beliebige Punkte eines Kreises sind, die auf dem Kreise nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 auf einander folgen, so ist für jeden Punkt O in der Ebene dieses Kreises

$$\begin{aligned}0 = &\quad A_1O^2 . \Delta A_2A_3A_4\\ &- A_2O^2 . \Delta A_3A_4A_1\\ &+ A_3O^2 . \Delta A_4A_1A_2\\ &- A_4O^2 . \Delta A_1A_2A_3\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&A_1O^2 . \Delta A_2A_3A_4 + A_3O^2 . \Delta A_4A_1A_2\\ = &A_2O^2 . \Delta A_3A_4A_1 + A_4O^2 . \Delta A_1A_2A_3.\end{aligned}$$

Anmerkung. Nachdem dieser Aufsatz ausgearbeitet und zum Druck abgeschickt war, fand ich, dass Herr Dr. Luchterhand denselben Satz vom Kreise gefunden und in Crelle's Journal. B. XXIII. H. 4. mitgetheilt, auch auf die Kugel erweitert hat. Wegen der anderweitigen in diesem Aufsatze enthaltenen Bemerkungen, und weil der vorstehende Satz vom Kreise jedenfalls weiter bekannt zu werden verdient, wollte ich aber diesen Aufsatz nicht unterdrücken, wie ich sonst gethan haben würde. Natürlich gebührt Herrn Dr. Luchterhand die Priorität der Erfindung.

XXX.

Ueber einen Reihenausdruck für den Umfang der Ellipse.

Von

Herrn R. Hoppe

Candidaten des höhern Schulamts zu Greifswald.

Gewöhnlich wird der Umfang einer Ellipse durch folgende unendliche Reihe dargestellt:

$$E=2\pi-2\pi\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1},$$

wo die grosse Halbaxe $=1$, die Excentricität $=\varepsilon$ gesetzt ist. Er lässt sich jedoch in eine weit schneller convergirende Reihe entwickeln.

Ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

die Gleichung der Ellipse, und setzt man

$$\frac{x}{a}=\cos\varphi;$$

so ist $\frac{y}{b}=\sin\varphi$, und man hat

$$\frac{dx}{d\varphi}=-a\sin\varphi;\ \frac{dy}{d\varphi}=b\cos\varphi.$$

Nennt man s den zugehörigen Ellipsenbogen, so ist

$$\frac{ds}{d\varphi}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2(1-\cos 2\varphi)+\tfrac{1}{2}b^2(1+\cos 2\varphi)}$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\cos 2\varphi}$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi}.$$

Nun ist der ganze Umfang der Ellipse

$$E=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi;$$

daher

$$E=2\sqrt{2(a^2+b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi};$$

also, wenn man die letzte Quadratwurzel in eine Reihe entwickelt,

$$E=2\sqrt{2(a^2+b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi[1-\frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi$$

$$-\frac{1}{2.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\cos^2 2\varphi-\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\cos^3 2\varphi$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\cos^4 2\varphi\ldots].$$

Nun ist bekanntlich

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n+1}\varphi d\varphi=0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n}\varphi d\varphi=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

Setzt man hier 2φ statt φ, so hat man

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}2\varphi d\varphi=0,$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}2\varphi d\varphi=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

In unserm Ausdrucke für E können wir demzufolge die Glieder mit ungeraden Potenzen von $\cos 2\varphi$ weglassen, und es bleibt noch

$$E = 2\sqrt{2(a^2+b^2)}\,\left[\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(4n-3)}{2.4\ldots4n} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} 2\varphi d\varphi\right]$$

$$= \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\,\left[1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(4n-3)\,(2n)\,(2n-1)\ldots(n+1)}{2.4\ldots4n.1.2.3\ldots n.2^{2n}} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n}\right].$$

Der Coefficient des allgemeinen Gliedes der Summe lässt sich vereinfachen; man kann ihn schreiben:

$$\frac{1.3\ldots(4n-3)\,(2n)\,(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n(n+1)\,(n+2)\ldots(2n).1.2\ldots n.2^{4n}},$$

das ist

$$\frac{1.3\ldots(4n-3)}{(1.2\ldots n)^2\,2^{4n}} = \frac{1.3\ldots(4n-3)}{(4.8.12\ldots4n)^2}.$$

Hiernach erhält man

$$E = \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}\,\left[1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(4n-3)}{(4.8.12\ldots4n)^2} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2n}\right].$$

Setzen wir noch die grosse Halbaxe $a = 1$ und die Excentricität $\sqrt{a^2-b^2} = \varepsilon$, so ist

$$E = \pi\sqrt{2(2-\varepsilon^2)}\ [1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(4n-3)}{(4.8.12\ldots4n)^2}\ (\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2})^{2n}].$$

Beispiel. Es sei $\varepsilon = \frac{1}{3}$, dann ist

$$\pi\sqrt{2(2-\varepsilon^2)} = \frac{\pi}{3}\sqrt{34},\ (\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2})^2 = \frac{1}{289};$$

daher

$$E = \frac{\pi}{3}\sqrt{34} - \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{289} - \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1.3.5}{4^2.8^2}\,\frac{1}{289^2}$$

$$- \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1.3.5.7.9}{4^2.8^2.12^2}\,\frac{1}{289^3} - \frac{\pi}{3}\sqrt{34}\,.\,\frac{1.3\ldots.13}{4^2.8^2.12^2.16^2}\,\frac{1}{289^4} - \ldots$$

$$= u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - \ldots$$

Nun ist $\frac{\pi}{3}\sqrt{34} = \frac{1}{3}\sqrt{34\pi^2}$

$$\pi^2 = 9{,}8696044010893586\ldots$$

$$\frac{\pi}{3}\sqrt{34} = 6{,}10615854542716 = u_1$$

$$u_2 = \frac{1}{4^2.289}\ u_1 = 0{,}00132053601761$$

$$u_3 = \frac{3.5}{8^2.289}\ u_2 = 0{,}0000001070937$$

$$u_4 = \frac{7.9}{12^2.289}\ u_3 = 0{,}0000000001621$$

$$u_5 = \frac{11.13}{16^2.289}\ u_4 = 0{,}0000000000003$$

$$\text{Summe} = 0{,}0013206432737$$

$$u_1 = 6{,}1061585454272$$

$$E = 6{,}1048379021535$$

XXXI.

Ueber die Methode der unbestimmten Coeffizienten und verwandte Gegenstände.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Zur Verwandlung der Funktionen in Reihen bedient man sich immer noch so häufig der Methode der unbestimmten Coeffizienten, dass es wohl nicht überflüssig sein dürfte, auf die Mängel solcher Entwickelungsweisen genauer hinzuweisen und das Gebiet ihrer Anwendbarkeit näher zu bestimmen.

1) Das Verfahren besteht bekanntlich darin, dass man die zu entwickelnde Funktion

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots$$

und die noch unbestimmten Coeffizienten $a, b, c, \ldots$ mittelst irgend einer Eigenschaft der Funktion $f(x)$ bestimmt. Das ist aber bei weitem nicht genug. Es müsste nun auch noch gezeigt werden, dass jene Eigenschaft die Funktion $f(x)$ vollkommen charakterisirt, d. h. dass es keine andere Funktion $\varphi(x)$ giebt, welche die nämliche Eigenschaft besitzt, ohne mit $f(x)$ identisch zu sein *). Geschieht diess nicht, so kann man, wenn umgekehrt $a, b, c \ldots$ gegeben sind, von der Summe der Reihe

$$a + bx + cx^2 + \ldots$$

nichts Anderes sagen, als: es ist dieselbe eine gewisse Funktion von x, welche die und die Eigenschaft hat, dass u. s. w. Als Beispiel will ich nach der gewöhnlichen Weise zeigen, wie sich diejenige Funktion von x in eine Reihe verwandeln lässt, welcher die Eigenschaften zukommen:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), \quad \text{Lim}\,\frac{f(\delta)}{\delta} = 1 \text{ für abnehmende } \delta.$$

---

*) So haben die Funktionen $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ und $\cos ax$ die Eigenschaft gemein, dass $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).f(y)$ ist, und die Funktionen $\frac{1}{2}a(b^{\frac{x}{a}} + b^{-\frac{x}{a}}$ und $ax + b$ die, dass $\frac{f(x+h) + f(x-h)}{f(x)}$ nicht mehr von n abhängt, u. s. w.

Aus der ersten Gleichung folgt für $y=x$, $0=f(0)$, also darf die fragliche Reihe kein von x freies Glied besitzen; ferner für $x=0$ giebt die Benutzung des eben Gefundenen $-f(y)=f(-y)$, so dass mithin nur ungerade Potenzen von x vorkommen können. Wir setzen daher

$$f(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots\ldots$$

woraus folgt

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=a_1\frac{x-y}{x-y}+a_3\frac{x^3-y^3}{x-y}+a_5\frac{x^5-y^5}{x-y}+\ldots\ldots \quad (1)$$

Vermöge der ersten für $f(x)$ angegebenen Eigenschaft muss aber auch sein

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=a_1\frac{1}{1+xy}+a_3\frac{(x-y)^2}{(1+xy)^3}+\ldots\ldots \quad (2)$$

Bekanntlich hat man aber für jedes positive ganze $n>0$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

folglich für $y=x$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=nx^{n-1}.$$

Nehmen wir auch in (1) und (2) $y=x$, so ist vermöge dieses Satzes

$$a_1+3a_3x^2+5a_5x^4+\ldots\ldots$$

$$=\frac{a_1}{1+x^2}=a_1-\ a_1x^2+\ a_1x^4-\ldots\ldots$$

Durch Vergleichung der Coeffizienten gleicher Potenzen von x erhalten a_1, a_3, a_5, ... ihre Bestimmung und es wird dadurch

$$f(x)=a_1(x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots.).$$

Der Coeffizient a_1 findet sich vermöge der Eigenschaft $\operatorname{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta}=1$. Derselbe ist $=1$, und somit sind wir zu folgendem Theorem gelangt:

Die Summe der Reihe

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots$$

ist diejenige Funktion von x, welche die Eigenschaften besitzt:

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ \operatorname{Lim}\frac{f(\delta)}{\delta}=1,\ \text{für abnehmende } \delta.$$

Welche nun diese Funktion sei lässt sich auf elementarem Wege nicht gut entdecken. Weiss man umgekehrt aus anderen Betrachtungen, dass die Summe der vorliegenden Reihe Arctan x ist, so kann allenfalls jene Rechnung als ein elementarer Beweis dienen, dass die genannten Eigenschaften für den Arctan. charakteristisch sind.

Jene nothwendige Vervollständigung lässt sich aber nur bei wenigen Funktionen geben, nämlich dann wenn $f(x)$ der Quotient zweier Reihen von der Form $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots$ oder wenn

$f(x) = a^x$ und $= \log(1+x)$ ist. (Cauchy, Cours d'Analyse, I. partie, Chap. V.)

2) Ein zweiter Vorwurf, welcher die Methode der unbestimmten Coeffizienten trifft, wie sie bisher angewendet wurde, ist die Nichtbeachtung des Restes der entspringenden Reihe, wodurch die natürlichste Bestimmung der Convergenz oder Divergenz derselben verloren geht. Wie man vielmehr jene Methode anzuwenden habe, will ich hier an einem Beispiele zeigen, welchem ich jedoch einen Satz von den bestimmten Integralen vorausschicken muss.

Wenn M und N das Maximum und Minimum der Funktion $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sind und $\psi(x)$ eine Funktion bedeutet, welche während des nämlichen Intervalles positiv bleibt so ist jederzeit

$$M\int_\alpha^\beta \psi(x)dx > \int_\alpha^\beta \varphi(x)\ \psi(x)dx > N\int_\alpha^\beta \psi(x)dx. \quad (3)$$

Denn vermöge der Bedeutung von M und N ist für das ganze Intervall

$$M - \varphi(x) \text{ positiv, } N - \varphi(x) \text{ negativ,}$$

folglich, weil $\psi(x)$ und dx positiv sind, auch

$$[M - \varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ positiv, } [N - \varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ negativ}$$

und ebenso

$$\int_\alpha^\beta [M - \varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ positiv, } \int_\alpha^\beta [N - \varphi(x)]\ \psi(x)dx \text{ negativ.}$$

Durch Integration der einzelnen Glieder folgt daraus sogleich das ausgesprochene Theorem.

Ich will nun setzen

$$(1+x)^\mu = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. + a_n x^n + R_n$$

eine Annahme, die sich für ganze positive Exponenten durch gemeine Multiplikation und für andere μ durch die Analogie rechtfertigt. Nun beweist die Differenzialrechnung unabhängig vom Binomialtheorem, dass für jedes beliebige reelle μ, $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$ ist. Vermöge dieses Satzes haben wir

$$\mu(1+x)^{\mu-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \frac{dR_n}{dx}$$

und durch Multiplikation mit $(1+x)$,

$$\mu(1+x)^\mu = a_1 + (2a_2 + a_1)x + \ldots\ldots (na_n + \overline{n-1}a_{n-1})x^{n-1}$$
$$+ na_n x^n + (1+x)\frac{dR_n}{dx}.$$

Aus der für $(1+x)^\mu$ angenommenen Reihe folgt aber

$$\mu(1+x)^\mu = \mu + \mu a_1 x + \ldots\ldots + \mu a_{n-1} x^{n-1}$$
$$+ \mu a_n x^n + \mu R_n.$$

Durch Vergleichung der Coeffizienten von $x^0, x^1, \ldots. x^{n-1}$ erhalten wir

$$a_1 = \frac{\mu}{1},\ a_2 = \frac{\mu-1}{2}a_1, \ldots\ldots a_n = \frac{\mu - \overline{n-1}}{n} a_{n-1}$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}, \qquad = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

Durch diesen Werth von a_n werden aber die mit x^n multiplizirten Glieder nicht identisch; es muss daher im Uebrigen sein

$$na_n x^n + (1+x)\frac{dR_n}{dx} = \mu a_n x^n + \mu R_n$$

oder

$$(1+x)\frac{dR_n}{dx} - \mu R_n = (\mu - n)a_n x^n.$$

Um aus dieser Differenzialgleichung R_n zu finden, sei

$$R_n = (\mu - n)a_n(1+x)^\mu y$$

wo y eine noch zu bestimmende Funktion von x ist. Die Differenzialgleichung wird jetzt folgende.

$$(\mu-n)a_n[(1+x)^{\mu+1}\frac{dy}{dx} + \mu(1+x)^\mu y - \mu(1+x)^\mu y]$$
$$= (\mu - n)a_n x^n$$

d. i. sehr einfach

$$(1+x)^{\mu+1}\frac{dy}{dx} = x^n$$

woraus

$$y = \int\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} + \text{Const.}$$

und

$$R_n = (\mu-n)a_n(1+x)^\mu\left[\int\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} + \text{Const}\right] \quad (4)$$

folgt. Dieser Rest ist es nun, welcher die gefundene Reihe

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}x^n \quad (5)$$

ergänzt. Für ein positives ganzes $\mu = n$ bricht die Reihe bei dem Gliede x^n ab, weil das nächste den Faktor $n - n = 0$ enthält. An dieses wäre dann noch der obige Rest anzuhängen, der aber ebenfalls den Faktor $\mu - n = 0$ enthält und daher sich annullirt. Für jedes andere μ dagegen wird keins der Glieder unserer Reihe $= 0$ und es liegt daher sehr nahe, sie ins Unendliche fortgehen zu lassen. Dabei fragt es sich aber noch, was aus dem Reste werden wird. Würde derselbe über alle Gränze hinaus wachsen, so wäre durch die unendliche Verlängerung der Reihe Nichts gewonnen, weil sich dann der ganze Ausdruck auf das vieldeutige Resultat $(1+x)^\mu = \infty - \infty$ reduziren würde; wir müssen desshalb den

Rest so einzurichten suchen, dass sich derselbe bei wachsendem n entweder einer endlichen bestimmten Gränze oder der Null nähert.

Um zuvörderst die Constante der Integration in (4) zu bestimmen, setzen wir in (5) $x=0$, wodurch sich die Reihe auf die identische Gleichung $1=1$ reduzirt. Es muss also dann der Rest $=0$ oder

$$\text{Const} = -\int\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} \text{ (für } x=0)$$

sein. Es ist aber sehr leicht einzusehen, dass dieses Integral für $x=0$ verschwindet, also Const $=0$ wird. Geben wir ferner x den grössten absoluten Werth c, so können wir schreiben

$$R_n = (\mu-n)a_n(1+c)^\mu\left[\int^{x=c}\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}} - \int_{x=0}\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}}\right]$$

$$= (\mu-n)a_n(1+c)^\mu\int_0^c\frac{x^n dx}{(1+x)^{\mu+1}}.$$

Ohne diese Integration auszuführen, können wir leicht mittelst des früher bewiesenen Lemma von den bestimmten Integralen den Rest in zwei Gränzen einschliessen. Bezeichnen wir das Integral mit J und setzen $\alpha=0$, $\beta=c$, $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x)^{\mu+1}}$, $\psi(x)=x^n$, so ist $M=1$, $N=\frac{1}{(1+x)^{\mu+1}}$, und mithin

$$\int_0^c x^n dx > J > \frac{1}{(1+c)^{\mu+1}}\int_0^c x^n dx$$

oder

$$\frac{c^{n+1}}{n+1} > J > \frac{1}{(1+c)^{\mu+1}}\cdot\frac{c^{n+1}}{n+1}$$

und daher:

$$(\mu-n)a_n(1+c)^\mu\frac{c^{n+1}}{n+1} > R_n > (\mu-n)a_n(1+c)^{-1}\cdot\frac{c^{n+1}}{n+1}$$

oder, weil $a_{n+1}=\frac{\mu-n}{n+1}a_n$ ist,

$$(1+c)^\mu a_{n+1}c^{n+1} > R_n > (1+c)^{-1}a_{n+1}c^{n+1}.$$

Daraus geht hervor, dass der Rest in den nämlichen Fällen wachsen oder abnehmen wird, in welchen diess mit den Gliedern der Reihe

$$(1+x)^\mu = 1+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n \text{ (für } x=c)$$

geschieht. Bezeichnen wir a_nc^n mit p_n, so ist

$$p_{n+1} = p_n\cdot\frac{\mu-n}{n+1}c = -p_n\left(1-\frac{\mu+1}{n+1}\right)c$$

$$p_{n+2} = +p_n\left(1-\frac{\mu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{n+2}\right)c^2$$

$$p_{n+3} = -p_n\left(1-\frac{\mu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{n+2}\right)\left(1-\frac{\mu+1}{n+3}\right)c^3$$

u. s. f.

Soll nun abgesehen vom Zeichen $\ldots p_{n+3} < p_{n+2} < p_{n+1} < p_n$ sein, d. h. die Grösse p_n bei wachsenden n beständig abnehmen, so folgt daraus

$$(1-\frac{\mu+1}{n+3})\,c<1,\ (1-\frac{\mu+1}{n+2})\,c<1,\ (1-\frac{\mu+1}{n+1})\,c<1,$$

was bei dem wachsenden n auf das gemeinsame Resultat

$$c<1$$

hinausgeht. In jedem anderen Falle nehmen die Glieder p_n, $p_{n+1}\ldots$ nicht ins Unendliche ab, sondern werden entweder am Ende constant oder unendlich gross, und das Nämliche gilt dann von dem Rest der Reihe. Schliessen wir diese Fälle aus, so bleibt

$$(1+x)^\mu = 1+\frac{\mu}{1}\,x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,x^2+\ldots\ldots\ \text{in inf.},$$

$$+1>x>-1$$

eine Reihe, deren Glieder immer kleiner werden und deren Rest verschwindet, d. h. eine convergente.

In dieser Weise muss die Methode der unbestimmten Coeffizienten angewendet werden, wenn man auf Strenge Anspruch machen will. Hätte man früher diesen an und für sich so natürlichen Weg verfolgt, so würde der leidige Streit über Convergenz und Divergenz der Reihen gar nicht entstanden sein. Statt dessen liess man gleich die Reihe ins Unbestimmte fortgehen und bemühte sich später den offenbar widersinnigen Resultaten (sobald eine Divergenz eintrat) eine irgend plausible Bedeutung zu vindiciren. Wie es scheint hat man sich immer daran gehalten, dass durch eine richtige Rechnung auch etwas Richtiges zum Vorschein kommen müsse. Dazu gehört auch Richtigkeit der Voraussetzung. Wenn man aber eine Funktion einer unendlichen Reihe gleich setzt, so will man damit sehr oft der ersteren eine Form aufzwingen, die sie gar nicht annehmen kann.

Dergleichen Fälle giebt es mehr. Setzt man z. B.

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx + \ldots$$

multiplizirt beiderseits mit $\frac{2}{\pi}\sin nx\,dx$ und integrirt zwischen 0 und π, so findet man

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = a_n.$$

Man nehme z. E. $f(x)=1$, so hat man darnach

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Aber für $x=0$ oder $x=\pi$ kommt der Widerspruch $\frac{\pi}{4}=0$ zum Vorschein. Darüber braucht sich Niemand zu wundern, denn es liegt diess lediglich in der Form der Reihe, die für $f(x)$ angenommen wurde. Hier kann man die Unrichtigkeit der Voraussetzung für $x=0$ und $x=\pi$ gleich a priori erkennen, bei den nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen dagegen erst a posteriori

durch die Betrachtung des Restes; aber gerade diese letztere hat man gewöhnlich vernachlässigt und daher der ganze Streit.

Zu welchen entsetzlichen Resultaten man durch dergleichen Nachlässigkeiten gelangen kann, will ich hier an einer Rechnung zeigen, die ich parallel einer von Euler herrührenden fortführen will *). Nach der Formel

$$\cos(n+1)x = 2\cos nx \cos x - \cos(n-1)x$$

ist

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = \cos x \\ \cos 2x = 2\cos x \cos x - 1 \\ \cos 3x = 2\cos 2x \cos x - \cos x \\ \cos 4x = 2\cos 3x \cos x - \cos 2x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (6)$$

u. s. w. in inf.

Also, wenn man das Aggregat der Grössen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen $= S$ setzt,

$$S = \cos x + 2S\cos x - 1 - S,$$

woraus man sogleich erhält

$$S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots \text{ in inf. } = -\tfrac{1}{2}.$$

Entwickelt man jeden Cosinus in eine Reihe, so ist

$$\begin{aligned} S = -\tfrac{1}{2} = \;& 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ & - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots) \frac{x^2}{1\,.\,2} \\ & + (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots) \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

woraus augenblicklich folgt

$$\begin{aligned} & 1 + 1 + 1 + 1 + . \text{ in inf. } = -\tfrac{1}{2} \\ & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots = 0 \\ & 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots = 0 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Dazu werden sich schwerlich Gläubige finden!

Untersuchen wir nun, worin der Fehler liegt. Nehmen wir die Reihe erst als endliche bis zum $n$ten Gliede, setzen

$$S_n = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

---

*) Supplemente zu Klügels Wörterbuch S. 536.

und denken uns zu der obigen Darstellung (6) noch das letzte Glied

$$\cos nx = 2\cos(n-1)\cos x - \cos(n-2)x$$

hinzugeschrieben, so ist jetzt

$$S_n = \cos x + 2S_{n-1} \cdot \cos x - 1 - S_{n-2}$$

und weil $S_{n-1} = S_n - \cos nx$, $S_{n-2} = S_n - (\cos nx + \cos(n-1)x)$ ist, so findet sich leicht nach einiger Reduktion

$$S_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Für wachsende n nähert sich aber der Sinusquotient (der Rest der Reihe) keineswegs der Null, sondern oszillirt beständig zwischen $+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}$ und $-\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}$, so dass also jene Reihe ins Unendliche fortgesetzt gar keine bestimmte Summe hat. Entwickelt man dagegen auf der linken Seite die Cosinus und auf der rechten den Sinusquotienten nach Potenzen von x, so erhält man durch Vergleichung

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$$

u. s. w.

die ohnehin schon bekannten Formeln. Auf gleiche Weise kann man die übrigen Reihen der Art prüfen und wird immer den alten Fehler finden, dass ein Rest (der Quotient zweier trigonometrischen Funktionen) weggelassen worden ist, ohne dass er für wachsende n sich der Null nähert. (Die Frage des Herrn Dr. Hellerung, Archiv Theil I. Heft 3. S. 321. erledigt sich dadurch von selbst.)

Vielleicht ist es nicht überflüssig, zur Ergötzlichkeit der Leser noch einige Folgerungen aus den gewöhnlichen Resultaten zu ziehen.

Wir fanden

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} \quad (7)$$

und wenn wir $\pi - x$ für x schreiben

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x + \ldots \ldots \pm \cos nx = \tfrac{1}{2} \mp \frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{1}{2}x},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Nun soll aber auctore Eulero sein

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots \text{ in inf.} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \text{ in inf.} = +\tfrac{1}{2}$$

also müsste, wenn wir in unseren Formeln $n=\infty$ nehmen, auch sein

$$\sin \infty x = 0, \mp \cos \infty x = 0$$

folglich

$$\sin^2 \infty x + \cos^2 \infty x = 0. \quad (!)$$

Man multiplizire ferner die erste Reihe mit $f(x)dx$ und integrire zwischen zwei Gränzen 0 und a so kommt

$$\int_0^a f(x)dx + 2\Big[\int_0^a f(x) \cos x \, dx$$

$$+ \int_0^a f(x) \cos 2x \, dx + \ldots \text{ in inf.}\Big] = 0 \quad (8)$$

während dagegen die Summe derselben nach (7)

$$= \mathrm{Lim} \int_0^a \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2}x} f(x)dx, \text{ für wachsende } n$$

ist, worüber man einen früheren Aufsatz von mir (Archiv Theil I. S. 417) nachsehen kann. So würde aus jener Reihe (8) für $f(x) = e^{-x}$, $a = \infty$ folgen

$$1 + \frac{2}{1^2+1} + \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{3^2+1} + \ldots \text{ in inf.} = 0 \; . \; (!)$$

Doch genug von diesen Verkehrtheiten, deren Zahl sich leicht vermehren liesse. Schliesslich noch ein Paar Worte über die Methode der unbestimmten Coeffizienten. Wirft man einen Blick auf die oben gegebene Darstellung, so ergiebt sich von selbst, wo die fragliche Methode ihren Platz finden kann. In der allgemeinen Arithmetik wird man sie ausser zur Entwickelung von Reihenquotienten nicht benutzen können, weil die zu strenger Untersuchung nöthigen Vervollständigungen die Kräfte der niederen Analysis übersteigen. Es ist daher besser nicht von der Entwickelung in Reihen, sondern von der Summirung derselben auszugehen und dabei mit der Binomialformel anzufangen, aus welcher sich die übrigen Reihen für die wichtigsten Funktionen ableiten lassen. Das Bedürfniss der Convergenz stellt sich hier von selbst dar, weil man nicht eher die Bestimmung einer Reihensumme unternehmen wird, als bis man weiss, dass eine solche in endlicher Form existirt. Dieser Weg, den unter Andern Cauchy in seinem Cours d'Analyse eingeschlagen hat, bleibt daher jedenfalls der strengste.

XXXII.

Ueber die Integration unendlicher Reihen.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Der Missbrauch, den man mit unendlichen Reihen, welche nicht jederzeit convergiren, getrieben hat, führte unter Andern auch dazu, dass man Reihen der Art zwischen Gränzen integrirte, innerhalb deren sie nicht beständig convergiren. Dass diess im Allgemeinen nicht erlaubt sei, ist leicht einzusehen. Denn ein bestimmtes Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

ist bekanntlich die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\delta\{f(\alpha)+f(\alpha+\delta)+f(\alpha+2\delta)+\ldots\ldots\ldots+f(\alpha+\overline{n-1}\delta)\}$$

$$\delta=\frac{\beta-\alpha}{n}, \text{ (} n \text{ eine positive ganze Zahl)}$$

für wachsende n, also abnehmende δ nähert. Will man nun für $f(x)$ unter dem Integralzeichen eine unendliche Reihe setzen, so wird man erst den vorliegenden Ausdruck um die Befugniss dazu befragen müssen. In demselben durchläuft x stetig die Werthe

$$\alpha,\ \alpha+\delta,\ \alpha+2\delta, \ldots\ldots\ldots \beta-\delta,$$

und mithin wird jene Reihenverwandlung dann erlaubt sein, wenn die Reihe für $f(x)$ für alle diese Werthe von x richtig ist, d. h. convergirt.

Wie leicht man bei der Nichtbeachtung dieser Regel auf Irrthümer stossen kann, zeigt u. A. folgendes Beispiel. Es ist bekanntlich

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n\tan\dfrac{m\pi}{n}},$$

folglich für $m=1$, $n=2$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}=0.$$

Wollte man unter dem Integralzeichen statt $\frac{1}{1-x^2}$ die Reihe

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\ldots$$

setzen, so würde man dagegen erhalten

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2} = \infty + \tfrac{1}{3}\infty^3 + \tfrac{1}{5}\infty^5 + \ldots$$

also überhaupt das Integral $= \infty$, ein ganz falsches Resultat.

Indessen fehlt es auch nicht an Beispielen, dass trotz der Vernachlässigung jener Regel richtige Resultate zum Vorschein gekommen sind. Dies liegt dann an einer besonderen Beschaffenheit des Restes der Reihe. Vorausgesetzt dass

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + R_n$$

eine Reihe sei, welche für $x = \beta$ divergirt, d. h. in welcher für wachsende n sowohl der Rest, als die vorhergehende Summe unbegränzt wachsen, so trifft es sich doch häufig, dass in dem Ausdrucke

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = a_0(\beta - \alpha) + a_1 \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1} + \int_\alpha^\beta R_n dx$$

das letzte Glied für wachsende n abnimmt und folglich das Nämliche herauskommt, als wenn man den Rest gar nicht berücksichtigt hätte.

Der Sicherheit wegen ist es daher immer nöthig den Rest mit zu nehmen, sobald die Integrationsgränzen die Werthe von x für welche allein die Reihe convergirt, übersteigen. Natürlich ist diess in manchen Fällen eine blosse Vervollständigung, durch die man nichts Neues erfährt, die aber von einer strengen Begründung wohl verlangt wird.

So hat man z. B. die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}, \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}, \quad (1)$$

mit deren Entwickelung sich ein Theil des Aufsatzes vom Herrn Herausgeber, Archiv Theil II. Heft 3. S. 283—301 beschäftigt, auch auf einem sehr kurzen Wege entwickelt, welcher aber gerade jene Vervollständigung nöthig hat *). Es sollen desshalb jene Integrale hier besonders betrachtet werden.

1) Theilen wir in dem ersten derselben, welches kurz J heissen möge, das Intervall 0 bis ∞ in zwei andere von 0 bis 1 und 1 bis ∞, so ist

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}.$$

*) Supplemente zum mathem. Wörterb. 1ste Abth. S. 154. Wahrscheinlich hat auch der Herr Herausgeber das Ungenügende jenes Beweises gefühlt, und daher in seinem Aufsatze einen zwar längeren aber gründlicheren Beweis gegeben.

Nehmen wir in dem Integral von 1 bis ∞, $x = \frac{1}{z}$, so wird $x^{a-1}dx = -z^{-a-1}.dz$ und $\frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{-z^{-a}dz}{z+1}$. Die Integrationsgränzen für z müssen $=0$ und $=1$ genommen werden, damit sie mit denen für x identisch werden. Also ist nun

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1+x} - \int_1^0 \frac{z^{-a}dz}{z+1}$$

oder, wenn wir im zweiten Integrale die Integrationsgränzen vertauschen und x für z schreiben:

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{x^{-a}dx}{1+x}.$$

Bekanntlich ist nun identisch

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Wollen wir diese Reihe unter das Integralzeichen substituiren, so dürfen wir sie nicht ins Unendliche fortsetzen, weil sie für $x=1$, der oberen Integrationsgränze, nicht convergirt. Wir haben dann folgende Entwickelung

$$\begin{aligned}
J = &\int_0^1 [x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}x^{a+n-2}]\,dx \\
&\qquad + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1+x} \\
&+ \int_0^1 [x^{-a} - x^{-a+1} + x^{-a+2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}x^{-a+n-1}]\,dx \\
&\qquad + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1+x} \\
= &\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{a+n-1} \\
&+ \frac{1}{-a+1} - \frac{1}{-a+2} + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{-a+n-1} \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\frac{1}{-a+n} \\
&+ (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1+x}.
\end{aligned}$$

Damit nun keines der Glieder jener beiden Reihen unendlich gross werde ist nöthig, dass a ein positiver ächter Bruch sei. Ziehen wir ferner beide Reihen durch Vereinigung der unter einander stehenden Glieder in eine zusammen, so ist noch

$$\left.\begin{aligned}
J = &\frac{1}{a} + \frac{2a}{1^2 - a^2} - \frac{2a}{2^2 - a^2} + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{2a}{(n-1)^2 - a^2} \\
&\qquad + (-1)^{n-1}\frac{1}{n-a} \\
&+ (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1+x}
\end{aligned}\right\}(3).$$

Lassen wir nun das beliebige n ins Unendliche wachsen, so wird die obenstehende Reihe eine unendliche convergente, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann. Es fragt sich nur noch, was in diesem Falle aus den angehängten Integralen wird.

Jedes derselben lässt sich nach dem Theorem (3) in dem vorhergehenden Aufsatze über die Methode der unbestimmten Coefficienten in zwei Gränzen einschliessen, wenn man das dortige $\alpha=0$, $\beta=1$, $\varphi(x)=\frac{1}{1+x}$, $\psi(x)=x^{a+n-1}$ oder $=x^{-a+n}$ setzt. Vermöge der Bedeutung von M und N a. a. O. ist

$$M=\frac{1}{1+0},\ N=\frac{1}{1+1},$$

folglich wenn wir $a+n-1$ und $-a+n$ mit m bezeichnen, welches gleichzeitig mit n wächst:

$$\int_0^1 x^m dx > \int_0^1 \frac{x^m dx}{1+x} > \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^m dx$$

oder

$$\frac{1}{m+1} > \int_0^1 \frac{x^m dx}{1+x} > \frac{1}{2(m+1)}.$$

Für wachsende m nähern sich aber beide Gränzwerthe der Null und mithin verschwindet auch das Integral selbst für $n=m=\infty$. Lassen wir daher in (3) die beiden Integrale weg und setzen die Reihe ins Unendliche fort, so ist

$$J=\frac{1}{a}+\frac{2a}{1^2-a^2}-\frac{2a}{2^2-a^2}+\frac{2a}{3^2-a^2}-\ldots \text{ in inf. } (4)$$

Die Summe dieser Reihe ist aber bekanntlich $=\frac{\pi}{\sin a\pi}$, und also haben wir, uns an die Bedeutung von J erinnernd,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi},\ +1>a>0\ .\ (5)$$

Für $a=\frac{m}{n}$, wo also $n>m$ sein muss, und $x=z^n$ ergiebt sich noch

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},\ n>m.\ (6).$$

Man findet auch leicht durch unmittelbare Integration, dass diese Formeln noch für $a=1$, $m=n$, richtig sind, was aber wegen des Unendlichwerdens derselben keinen Nutzen gewährt.

2) Der bisher verfolgte Weg führt auch unter einigen Modifikationen zur Kenntniss des ähnlichen Integrales

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}.$$

Nimmt man mit demselben die Reduktionen vor, welche früher den Ausdruck (1) in (2) verwandelten, so findet sich

$$J = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{1-x} - \int_0^1 \frac{x^{-a}dx}{1-x}$$

und, weil

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots\ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

ist, auch

$$J = \int_0^1 [x^{a-1} + x^a + x^{a+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{a+n-2}]dx$$
$$+ \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1-x}$$
$$- \int_0^1 [x^{-a} + x^{-a+1} + x^{-a+2} + \ldots\ldots + x^{-a+n-1}]dx$$
$$- \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1-x}$$
$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{a+n-1}$$
$$- \frac{1}{-a+1} - \frac{1}{-a+2} - \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{-a+n-1} - \frac{1}{-a+n}$$
$$+ \int_0^1 \frac{x^{a+n-1}dx}{1-x} - \int_0^1 \frac{x^{-a+n}dx}{1-x}$$
$$\left. \begin{array}{l} = \frac{1}{a} - 2a\left[\frac{1}{1^2-a^2} + \frac{1}{2^2-a^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)^2-a^2}\right] \\ \qquad - \frac{1}{n-a} \\ + \int_0^1 \frac{x^{a+n-1} - x^{n-a}}{1-x} dx. \end{array} \right\} (8).$$

Wollte man die früher, auf die in (3) angehängten Integrale angewendeten Schlüsse hier wieder für die beiden Integrale in der vorletzten Reihe benutzen, so würde man für jedes das Unendliche als Gränzwerth finden. Desshalb wurden sie in der letzten Reihe in ein Integral zusammengezogen, was wegen der gleichen Integrationsgränzen leicht geschehen konnte. Dasselbe lässt sich aber auch so schreiben

$$\int_0^1 \frac{1-x^{1-2a}}{1-x} x^{n+a-1}dx$$

worin wir $1-2a$ mit b, $n+a-1$ mit m bezeichnen wollen. Um nun für dieses Integral zwei Gränzwerthe angeben zu können, nehmen wir in dem früher citirten Satze von den bestimmten Integralen $\varphi(x) = \frac{1-x^b}{1-x}$, $\psi(x) = x^m$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Es wären nun für das Intervall $x=0$ bis $x=1$ das Maximum und Minimum (M und N) der Funktion $\varphi(x)$ zu bestimmen. Diess könnte nach der gewöhnlichen Weise geschehen wenn b in Zahlen gegeben ist, für unseren Zweck reicht es aber hin zu bemerken, dass dieselben endliche Grössen sind. Denn während des Intervalles 0 bis 1 kann

die Funktion $\frac{1-x^b}{1-x}$ nicht unendlich werden. Dazu würde nöthig sein, dass der Nenner $=0$, also $x=1$ wäre; dann wird aber auch der Zähler $=0$ und der wahre Werth des Symboles $\frac{0}{0}$ findet sich nach den gewöhnlichen Regeln $=b$. Eben so wenig kann jene Funktion $=0$ werden, weil dann der Zähler $=0$ sein müsste, in welchem Falle auch der Nenner sich annullirt und wieder das Vorige eintritt. Also sind M und N zwei endliche Grössen, und wir haben in Folge des früher citirten Theorems

$$M\int_0^1 x^m dx > \int_0^1 \frac{1-x^b}{1-x}\, x^m dx > N\int_0^1 x^m dx$$

oder, wenn wir die Integrationen ausführen und die Werthe von m und b wieder einführen

$$\frac{M}{n+a} > \int_0^1 \frac{1-x^{1-2a}}{1-x}\, x^{a+n-1} dx > \frac{N}{n+a}$$

woraus sich ergiebt, dass für wachsende n das Integral sich unbegränzt der Null nähert. Lassen wir dasselbe in (8) weg und setzen die vorhergehende Reihe ins Unendliche fort, so ist nun

$$J=\frac{1}{a}-2a\left\{\frac{1}{1^2-a^2}+\frac{1}{2^2-a^2}+\frac{1}{3^2-a^2}+\ldots\ldots \text{in inf.}\right\}$$

Vorausgesetzt dass a ein positiver ächter Bruch ist, haben wir $\pi \cot a\pi$ als Summe dieser Reihe, und mithin

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x}=\frac{\pi}{\tan a\pi},\ +1>a>0, \quad (9)$$

woraus für $a=\frac{m}{n}$, $x=z^n$ sich noch ergiebt

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1}dz}{1-z^n}=\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}},\ n>m. \quad (10)$$

Die bisher befolgte Methode ist noch vieler Anwendungen fähig. So findet man z. B. leicht die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}},\ +1 \geqq a \geqq 0.$$

$$\int_0^1 \frac{x^a-x^{-a}}{1-x^2}\,dx=-\frac{\pi}{2}\tan\frac{a\pi}{2},\ 1>a>0$$

die viel Analogie zu den oben entwickelten besitzen.

XXXIII.

Die Algebra in Italien seit Fibonacci *).

Von dem

Herrn Doctor Gerhardt

Lehrer am Gymnasium zu Salzwedel.

Die Algebra, namentlich die Auflösung der Gleichungen, hat seit den denkwürdigen Arbeiten der italienischen Mathematiker des 16ten Jahrhunderts wenig Fortschritte gemacht und die Hemmnisse, die sie nicht zu beseitigen vermochten, sind im Allgemeinen noch jetzt vorhanden. Es scheint der Mühe werth zu sein, den Weg zu verfolgen, welchen die Wissenschaft seit dem Auftreten Fibonacci's zu Anfang des 13ten Jahrhunderts einschlug, bis sie zu jenem Höhepunkte gelangte.

Jahrhunderte vergingen, ehe jemand auftrat, der den hohen Verdiensten Fibonacci's sich hätte würdig zur Seite stellen können. Dieses Factum, so wie dass die Arbeiten dieses Mannes Jahrhunderte hindurch fortwährend benutzt und die Gränzen der Wissenschaft, wie er sie gesteckt, erst nach langer Zeit erweitert wurden, veranlassen uns zu behaupten, dass Fibonacci unter die bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters gerechnet werden muss. Zwar haben wir gesehen, dass er theilweise nach arabischen Vorbildern arbeitete; dies thut jedoch seinen Verdiensten wenig Eintrag, denn er hat gezeigt, dass er allein in jenen Zeiten der tiefsten Unwissenheit dem Fluge der Wissenschaft, den sie bei den Arabern genommen, zu folgen und sie in sich aufzunehmen vermochte.

Nach ihm finden wir im 13ten Jahrhundert kaum die Namen einiger Mathematiker erwähnt; von ihren Werken ist wenig bis auf uns gekommen. So schrieb ein Dominikaner Leonardo von Pistoja um 1280 über Geometrie und Arithmetik, dessen Werke wir aber gegenwärtig nicht mehr haben, und um dieselbe Zeit ein von Ximenes erwähnter Anonymus einen Abbaco. Auch beschäftigte man sich mit Uebersetzungen aus dem Arabischen; so übersetzte Guglielmo di Lunis eine Schrift: die Regel über die Algebra (Regola dell' Arcibra) aus dem Arabischen ins Italienische. Man hat dieses Werk für eine Uebersetzung der Algebra des Mohammed ben Musa gehalten; dieser Annahme jedoch widerstreitet das, was

---

*) Grösstentheils nach Libri histoire des mathématiques en Italie; dabei benutzt sind die Werke von Montucla, Chasles und Kästner.

Ghaligai daraus mittheilt. Späterhin schrieben Franzesco di Donati Michelozzi, Paolo Gherardi, Pietro Strozzi und Antonio Biliotti, genannt dall' Abbaco, sämmtlich aus Toskana, wo Fibonacci's Einfluss nicht ohne Wirkung gewesen war, über Arithmetik und wahrscheinlich auch über Algebra; der berühmteste aber unter den Florentinischen Mathematikern der damaligen Zeit war Paolo Dagomari, genannt auch Paolo dall' Abbaco oder Paul der Geometer († 1365). Er besass ein ausserordentliches Talent und gleichzeitige Schriftsteller haben ihn neben Dante und Petrarca gestellt. Von seinen Schriften existiren noch handschriftlich Bücher über den Abbaco, worin zuerst das Komma gebraucht wird, um grosse Zahlen in Gruppen zu 3 Ziffern zu theilen; ferner eine Schrift über Arithmetik und Algebra, welche für Kaufleute bestimmt, die Auflösung der Gleichungen der beiden ersten Grade, die der zweitheiligen cubischen Gleichungen und mehrere schwierige Probleme aus der unbestimmten Analysis enthält. Dagomari gab auch zuerst in Italien einen Almanach heraus, den man damals Taccuino nannte. Um dieselbe Zeit schrieb Giovanni Danti von Arezzo eine Abhandlung über den Algorismus nach den Werken des Boetius, und eine Geometrie, wobei er arabische Schriftsteller benutzte. Ein anderer Florentiner, Raphael Canacci, verfasste im 14ten Jahrhundert in italienischer Sprache eine Abhandlung über die Algebra, die für die Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit ist und eine nähere Berücksichtigung verdiente. Sie findet sich noch handschriftlich in der Palatinischen Bibliothek zu Florenz.

Prosdocimo Beldomando von Padua verfasste gegen das Ende des 14ten Jahrhunderts ausser andern mathematischen Schriften eine Abhandlung über den Algorismus, die 1483 zu Padua gedruckt wurde, und unter seinen noch handschriftlich vorhandenen Werken giebt es eines, das nach indischen Vorbildern gearbeitet ist.

Dies sind die bekanntesten Männer, die nach Fibonacci im 13ten und 14ten Jahrhundert über Arithmetik und Algebra geschrieben haben. Ausser ihnen liessen sich noch viele Namen mathematischer Schriftsteller anführen, die zwar nicht unmittelbar die Wissenschaft weiter förderten, aber doch zu ihrer Verbreitung beitrugen und das Jahrhundert des Ferro und Tartaglia vorbereiteten.

Die noch handschriftlich vorhandenen Werke über die Algebra aus dieser Zeit enthalten gewöhnlich die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades und allgemeine Regeln, öfters jedoch ohne Beweis, für die Lösung der quadratischen. Einige Schriftsteller haben Gleichungen des 3ten und höherer Grade behandelt, die zur Lösung derselben gegebenen Regeln sind aber falsch; für den Fall nämlich, dass diese Gleichungen dreitheilig sind, haben sie mittelst Induction Formeln gemacht, die denen ähnlich sind, die zur Lösung der quadratischen Gleichungen dienen; für Gleichungen, die aus 4 oder mehr Gliedern bestehen, gaben sie sehr bizarre Regeln, die auf falsche Principien gegründet waren *). — In diesen Manu-

*) Libri ist im Besitz eines Manuscripts aus dem 14ten Jahrhundert, wo eine Regel zur Auflösung der Gleichung von der Form $px^3 = ax + b$ gegeben wird; nach derselben soll $x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{(\frac{a}{2p})^2 + b}$ sein. —

scripten findet man auch Probleme der beiden ersten Grade aus der unbestimmten Analysis und einige Bemerkungen über Wurzelausdrücke. Die Zeichen der Addition und Subtraction finden sich noch nicht: die Addition wird dadurch angezeigt, dass die beiden zu addirenden Ausdrücke neben einander gestellt werden, und die andern Operationen werden durch Umschreibung ausgedrückt. Das Wort Binom findet sich schon, nicht aber das Wort Gleichung; das Wort Algebra wird sehr häufig getroffen, Almucabala weit seltener. Einige Anwendungen der Algebra auf Geometrie, die im Allgemeinen keinen andern Zweck zu haben scheinen, als die Probleme aus der unbestimmten Analysis zu construiren, und einige leichte Untersuchungen über Maxima vervollständigen öfters die wissenschaftlichsten dieser Werke. So kommen z. B. in dem oben erwähnten Manuscript über Algebra, die für Kaufleute geschrieben war, wie ausdrücklich am Eingange bemerkt ist, folgende Aufgaben vor: 1) Es sollen in einem Kreise, in einem Dreiecke oder in einem Quadrate eine gegebene Anzahl Kreise, gleichschenkliger Dreiecke oder Quadrate beziehungsweise eingeschrieben werden, so dass die Summe der Flächen der eingeschriebenen Figuren ein Maximum ist; 2) in einem Kubus eine dreiseitige Pyramide einzuschreiben, so dass der Inhalt derselben ein Maximum ist; 3) es sollen die Gleichungen

$$4yx^4 - x^2 = y^2,$$

$$x^2 = \frac{py^2}{z^2 - py^2},$$

$$x^4 - yx^2 = y^2$$

in ganzen Zahlen gelöst werden; u. s. w.: sämmtlich Probleme, die beweisen, dass es dem unbekannten Verfasser nicht an Sagacität gefehlt hat.

In der ersten Hälfte des 15ten Jahrhunderts widmete man sich vorzugsweise dem Studium der classischen Werke des Alterthums; daher begegnen wir in dieser Zeit keinem Namen, der in den Wissenschaften etwas geleistet hätte. Damals wurden die Untersuchungen über die Algebra unterbrochen. In der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts beschäftigten sich einige Gelehrte mit den Schriften der Mathematiker des Alterthums; sie wurden übersetzt und erläutert, oder auch vervollständigt und angefangene Untersuchungen weiter fortgeführt; besonders mit der Geometrie war dies der Fall, während andere sich ausschliesslich mit der Algebra befassten und ihr einen Grad von Allgemeinheit gaben, der von den Alten nicht geahndet wurde und den zum Theil die Mathematiker der neueren Zeit nicht haben übersteigen können.

Maurolykus (geb. 1494 zu Messina, gest. 1575) gehört zwar zu denen, die ihre ganze Thätigkeit auf das Studium der griechischen Geometer verwandten; er hat sich jedoch auch mit Algebra beschäftigt, wiewohl er sie für eine barbarische Wissenschaft hielt. Seine Schrift über die Algebra ist zwar verloren gegangen, indes-

---

Uebrigens ist zu bemerken, dass wenn hier von Gleichungen die Rede ist, stets numerische zu verstehen sind.

sen beschränkte sie sich nach dem, was wir davon wissen, auf die ersten Elemente. Die Arithmetik des Maurolykus enthält interessante Untersuchungen über die Theorie der Zahlen; unter andern sind darin die Eigenschaften der Polygonalzahlen weit vollständiger behandelt, als es von Diophantus geschehen ist.

Die Reihe der Algebraisten Italiens im 16ten Jahrhundert eröffnet Lucas Pacioli *), von seinem Geburtsorte Borgo San Sepolcro in Toskana Lucas di Borgo S. Sepulchri genannt. Er wurde daselbst gegen die Mitte des 15ten Jahrhunderts geboren und trat in den Orden der Minoriten. Von seinem Leben ist wenig bekannt; aus den Vorreden seiner Schriften und aus den Registern der Universitäten, wo er lehrte, geht hervor, dass er nach und nach zu Perugia, Neapel, Pisa und Venedig Professor war. Später begab er sich nach Mailand an den Hof des Ludwig Moro, wo er mit Leonardo da Vinci zusammentraf, mit dem er auch bei der Ankunft der Franzosen die Lombardei verliess. Die letzten Jahre seines Lebens scheint er zu Florenz und Venedig zugebracht zu haben. Er starb wahrscheinlich bald nach 1509.

Das Hauptwerk Pacioli's ist: Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita; es wurde zum ersten Mal 1494 zu Venedig gedruckt und 1523 nochmals aufgelegt. Da dieses Werk vorzugsweise den Mathematikern des 16ten Jahrhunderts als Basis ihrer Forschungen gedient hat, so mag hier eine ausführliche Darstellung seines Inhalts folgen. Es besteht aus 2 Haupttheilen, von denen der erste Arithmetik und Algebra, der zweite Geometrie enthält. Die Unterabtheilungen heissen distinctiones. In der ersten ist zum Theil die Arbeit Fibonacci's über die Quadratzahlen, die in neuerer Zeit verloren gegangen ist, enthalten. Aus derselben reproducirt hier Pacioli die Auflösung mehrerer unbestimmter Gleichungen des 2ten und 4ten Grades nach einer Methode, die ohne allgemein zu sein, dennoch bemerkt zu werden verdient **). Der Beweis fehlt; Leonardo von Pisa hatte sie durch geometrische Betrachtungen und an Figuren bewiesen. Diese Auflösungen, besonders die der Gleichung $x^2 + y^2 = H$, sind von denen Diophant's verschieden, und man hielt früher Euler für den ersten Erfinder derselben; eine nähere Bekanntschaft jedoch mit den algebraischen Schriften der Indier hat gelehrt, dass sie sich schon in der Algebra des Brahmegupta finden, aus der sie die Araber entlehnten, denen

---

*) Nicht Paciolo; er selbst nennt sich Frater Lucas de Borgo Sancti Sepulchri, oder Frater Lucas Patiolus Burgensis, oder Pacioli.

**) Nach derselben setzt man, um die Gleichung $x^4 - b^2 = z^2$ in rationalen Zahlen aufzulösen,

$$\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = u^2,$$

dann wird

$$x = \frac{2n^2 + 2n + 1}{u}$$

sein. Sind z. B. die Gleichungen

$$x^2 + 6 = y^2$$
$$x^2 - 6 = v^2$$

ja Fibonacci seine Kenntnisse verdankte *). Ausserdem finden sich noch in dieser ersten Distinction die Summen einiger numerischen Reihen und eine Tafel der vollkommenen Zahlen. Die zweite enthält die 4 Species mit allen damals gebräuchlichen Arten der Multiplication und Division, mit den Rechnungsvortheilen, die sich beim Gebrauch von 7 und 9 ergeben; ferner die Rechnung mit den einfachsten Wurzelgrössen, Regeln zur Bestimmung der Summe der Reihen der Quadrate und Cubikzahlen, die ebenfalls von Fibonacci entlehnt sind und den jetzt gebräuchlichen Formeln vollkommen entsprechen, und die Auflösung einiger sehr interessanten arithmetischen Probleme. In den beiden folgenden Distinctionen wird die Buchstabenrechnung vorgetragen; die fünfte enthält die Regel de tri und schliesst mit einer Darstellung der von Pacioli gebrauchten algebraischen Bezeichnungen. Die sechste behandelt die Progressionen im Allgemeinen. Die Regel Helcataym oder die regula falsi findet sich in der siebenten, zugleich mit einer grossen Anzahl Vorschriften für die Lösung der Probleme des ersten Grades. Die achte Distinction enthält die Algebra e Almucabala, auch Arte Cosa oder Arte maggiore genannt. Pacioli vervollständigt hier die Rechnung mit Wurzelgrössen; er lehrt wie man bei der Multiplication und Division mit ihnen verfährt, und wie in gewissen Fällen die Wurzel aus einem Binom gezogen wird; er lehrt ferner die arithmetischen Operationen mit irrationalen Grössen und beweist den grössten Theil der Sätze aus dem 10ten Buche der Elemente Euklids. Sodann geht er zu den Gleichungen des 2ten Grades über, die er ähnlich, wie es in der Algebra des Muhammed ben Musa und bei Fibonacci geschieht, in einfache d. h. reine quadratische und zusammengesetzte eintheilt; von den letzteren unterscheidet Pacioli 3 Fälle, die sich durch Gleichungen von der Form

$$x^2 + mx = a,\quad x^2 = mx + a,\quad x^2 + a = mx$$

ausdrücken lassen. Die Auflösungen derselben sind in Verse gebracht, welche Kästner in seiner Geschichte der Mathematik Bd. I. p. 70. ff. mitgetheilt hat. Wir werden weiter unten sehen, dass auch Tartaglia die Regeln für die Auflösung der cubischen Gleichungen in Verse fasste. Es folgen nun die Gleichungen höherer Grade, die sich auf quadratische zurückführen lassen; hierbei unterscheidet Pacioli 8 Fälle, die sich auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$\begin{array}{ll} x^4 = a & x^4 + ax = bx^2 \\ x^4 = ax & x^4 + a = bx^2 \\ x^4 = ax^2 & x^4 + ax^2 = b \\ x^4 + ax^2 = bx, & x^4 = a + bx. \end{array}$$

Die Auflösungen der drei ersten und der drei letzten werden mit-

---

gegeben, so setzt man $n = 1$ und erhält $u^2 = 4$, folglich $x = \frac{5}{2}$, $x^2 - 6 = v^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + 6 = y^2 = \frac{49}{4}$, mithin $y = \frac{7}{2}$, $v = \frac{1}{2}$.

*) Eine sehr interessante Darstellung hierüber bei Chasles p. 494. 495.

getheilt; die der vierten und fünften hält er für unmöglich, was beweist, dass da diese beiden Gleichungen sich nicht auf quadratische zurückführen lassen, die Auflösung der Gleichungen des 3ten Grades damals noch nicht gefunden war. Ueberhaupt hat sich Pacioli mit der Lösung aller Arten von Gleichungen, die sich auf quadratische zurückbringen lassen, beschäftigt; unter andern giebt er auch die Auflösung einer vollständigen Gleichung des 4ten Grades nach einer Methode, die sich auch in andern Fällen anwenden lässt, so wie die Auflösung gewisser Exponentialgleichungen durch Näherung. In der neunten Distinction endlich, welche den ersten Haupttheil beschliesst, finden sich die Regel der Gesellschaftsrechnung und eine Menge von Aufgaben, die sich auf Handelsoperationen beziehen, bei deren Lösung zuerst Spuren der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen. Auch ist dieser Distinction eine Abhandlung über den Handel, die von einem gewissen Chiarini herrührt, vollständig einverleibt, wo zum ersten Mal von der doppelten Buchhaltung gesprochen wird.

Der zweite Haupttheil der Summa umfasst in 8 Distinctionen eine vollständige Abhandlung der theoretischen und praktischen Geometrie. Die Ueberschrift eines Capitels der 3ten Distinction: Modus solvendi varios casus figurarum quadrilaterarum rectangularum per viam algebre, zeigt, dass hier schon Anwendung der Algebra auf Geometrie vorkommt, die überhaupt viel älter ist, als man gewöhnlich annimmt.

Dieses grosse, inhaltreiche Werk Pacioli's ist nur eine Compilation aus den damals vorhandenen Schriften über Arithmetik, Algebra und Geometrie; namentlich sind die Fibonacci's benutzt, ja der Verfasser sagt sogar, dass wenn er einen Schriftsteller citire, ohne seinen Namen zu nennen, er aus Leonardo von Pisa entlehne. Die Wissenschaft selbst hat weder an Umfang noch in der Behandlung gewonnen; die Gleichungen werden noch immer durch Worte ausgedrückt; nur zur Abkürzung bedient sich Pacioli hier und da der Buchstaben *p* (più d. h. plus) und *m* (meno d. h. minus). Das Zeichen $=$ kommt nicht vor, dafür gebraucht er das Wort eguale. Für das Wurzelzeichen steht der Buchstabe *R*, und die Unbekannte x wird durch co. (cosa), x^2 durch ce. (censo), x^3 durch cu. (cubo), x^4 durch ce. ce. (censo censo) u. s. w. ausgedrückt. Auch der Charakter dieses Werkes ist von dem der früheren nicht verschieden; es beruht auf einer beständigen Vereinigung der Algebra mit der Geometrie: eine Eigenthümlichkeit, die demnächst beinahe in allen mathematischen Schriften des 16ten Jahrhunderts gefunden wird.

Pacioli ist noch der Verfasser eines zweiten Werkes, das jedoch nicht dieselbe Wichtigkeit hat, als das eben besprochene; der Titel desselben ist: Lucae Pacioli divina proportione, opera a tutti gliingegni perspicaci e curiosi necessaria: ove ciacun studioso di philosophia, prospettiva, pictura, sculptura, architectura, musica e altre matematiche, soavissima, sottile e admirabile dottrina consequira e delectarassi con varie questione di secretissima scientia. Venetiis 1509. in fol. *). Unter proportio divina versteht der Ver-

*) Eine vollständige Darstellung seines Inhaltes bei Kästner, Gesch. der Math. Bd. I. p. 417. sqq.

fasser die Theilung einer geraden Linie in das mittlere und äussere Verhältniss, die auch sonst sectio aurea oder der goldene Schnitt genannt wird; er will sie zur Grundlage aller der im Titel des Werkes erwähnten Wissenschaften und Künste machen. Gegenwärtig ist dasselbe nur insofern noch von Interesse, dass Leonardo da Vinci mit eigener Hand die Figuren dazu gravirt und vielleicht selbst Antheil an der Redaction gehabt hat *).

Kurz nach der Divina proportione erschien im Jahre 1521 zu Florenz ein für die Geschichte der Mathematik höchst wichtiges Werk: Die Summa de arithmetica des Franzesco Ghaligai, das wir schon häufig citirt haben. Es besteht aus 13 Büchern, und enthält die Lösung der Gleichungen der beiden ersten Grade, die mehrerer sehr schwierigen Probleme aus der unbestimmten Analysis (im 8ten Buche, das wiederum nach Fibonacci gearbeitet ist) und die Rechnung mit den einfachsten Wurzelgrössen. Aber namentlich dadurch gewährt dieses Werk ein eigenthümliches Interesse, dass es gewissermassen ein historisches Repertorium ist, denn man findet darin bedeutende Fragmente aus den Schriften Fibonacci's, Auszüge aus einer Algebra, die von dem oben erwähnten Guglielmo di Lunis aus dem Arabischen übersetzt wurde, einige Untersuchungen aus den Schriften des Giovanni del Sodo, welcher der Lehrer des Ghaligai war, und wiederholte Anführungen eines Benedetto, dessen Werke wir gegenwärtig nicht mehr kennen.

Diese Schrift Ghaligai's ist weniger weitschweifig, als die Pacioli's, und desshalb musste sie auch zu ihrer Zeit mehr Einfluss auf das Studium der Mathematik haben. Sie enthält ein sehr gutes Résumé von dem, was man damals wusste, und zeichnet sich in dieser Hinsicht vor allen früheren Schriften ähnlicher Art aus.

Ausser diesen beiden, die ganze Wissenschaft der damaligen Zeit umfassenden Werken erschienen nun noch zu Anfange des 16ten Jahrhunderts einige Abbachi, die zwar nur die ersten Elemente enthalten, die aber ihres Alterthums wegen hier eine Stelle finden mögen. Sie sind:

Pellos, compendion de abacho, Thaurino 1492. 4. (im Dialekt von Nizza geschrieben);

Pietro di Borgo, libro de abacho, Venetia 1561. 4.;

Sfortunati von Siena, nuovo lume di arithmetica, Venet. 1561. 4.;

Uberti, thesoro universale de abacho, Vinegia 1548. 8.;

Feliciano, libro di arithmetica e geometria, intitulato scala grimaldelli, Vinegia 1550. 4.;

Verini, spechio del mercatante, Milano 1542. 8..

Catani von Siena, practica delle due prime matematiche, Venetia 1546. 4.;

---

*) Montucla (Hist. des math. Tom. I. p. 552.) und Chasles (Geschichte der Geomet. d. Uebers. p. 637) führen noch ein drittes Werk von Pacioli an: Libellus in tres partiales tractatus divisus quorumcunque corporum regularium et dependentium active perscrutationis, Venedig 1508. in 4.; aus Kästner's Gesch. der Math. Bd. I. p. 438 geht jedoch hervor, dass dasselbe nur eine besondere Abtheilung der Divina proportione ist. Hiermit scheint Libri übereinzustimmen, der es nicht erwähnt hat.

Ortega, summa de arithmetica, Roma 1515. fol. (Juan de Ortega war ein Spanier, der dieses Werk in Italien verfasste) *).

Alle diese Werke, die Hauptwerke Pacioli's und Ghaligai's mit eingeschlossen, behandeln nur Gleichungen der beiden ersten und solche höherer Grade, die sich auf den zweiten zurückführen lassen, und auch diese nicht einmal vollständig, denn man zog, wie es auch die Araber und nach ihnen Fibonacci gethan hatten, weder die negativen noch die imaginären Wurzeln in Betracht, und hielt die Gleichungen für unlöslich, bei denen man auf solche Wurzeln kam. Kaum hatte man in einzelnen Fällen die Mehrheit der Wurzeln erkannt. Vergleichen wir hiermit den Zustand der Algebra, wie er sich aus den um dieselbe Zeit in Deutschland erschienenen Werken ergiebt, so bietet sich ein in der That erfreulicher Unterschied dar; die Arithmetica integra von Michael Stifel, die 1544 zu Nürnberg erschien, legt eine tiefere Kenntniss und eine ältere Ausbildung der Wissenschaft dar, als wir in den bisher betrachteten italienischen Werken sahen. Besonders bemerkt man in derselben eine Annäherung an die abstrakte Form, welche die Algebra seitdem angenommen hat. Ausser den Zeichen + und — **), den jetzt gebräuchlichen Wurzelzeichen, der Bezeichnung der Unbekannten durch Symbole u. s. w. findet sich darin das Princip der Mehrheit der Wurzeln einer höhern Gleichung ausdrücklich erwähnt und bewiesen. Dieses Werk von Stifel ist aber nur eine Bearbeitung einer im Jahre 1524 erschienenen Schrift des Christoph Rudolph von Jauer ***), mithin muss jene glückliche Ausbildung der Algebra in Deutschland wenigstens zu dieser Zeit, oder auch noch früher statt gefunden haben, und in der That hat Drobisch in der neuesten Zeit in einem alten Rechenbuche des Joh. Widemann von Eger vom Jahre 1489 die Zeichen + und — schon gefunden †). — Vielleicht wird einmal, wenn die Bibliotheken des südlichen Deutschlands durchforscht, und aus den noch vorhandenen Manuscripten über den Zustand der Mathematik im 15ten und 16ten Jahrhundert neue Aufschlüsse gewonnen sein werden, diese bisher räthselhafte Erscheinung sich aufklären.

Wir kehren nach Italien zurück. Wir sahen, dass daselbst die Algebra zu Anfange des 16ten Jahrhunderts noch nicht über die ersten Elemente hinaus vorgeschritten war; aus diesem Zustande

---

*) Eine spanische, zu Sevilla gedruckte Schrift desselben Verfassers über Arithmetik und Geometrie führt Kästner Gesch. der Math. Bd. I. p. 96—99 an.

**) Libri sagt zwar, dass diese Zeichen zuerst in den Manuscripten des Leonardo da Vinci sich fänden; derselbe muss sie jedoch nicht mitgetheilt haben, denn Pacioli, der zugleich mit ihm am Hofe des Ludwig Moro lebte, gebraucht sie nicht.

***) Diese Schrift ist höchst selten und schon Stifel klagt, dass zu seiner Zeit, also ohngefähr 20 Jahr nach ihrem Erscheinen, kein Exemplar um den drei- oder vierfachen Preis zu haben sei. Sie muss sehr bald eine grosse Verbreitung erlangt haben, denn es existirt von ihr eine in Italien angefertigte lateinische Uebersetzung, die noch unter den Manuscripten der Königl. Bibliothek zu Paris vorhanden ist. Siehe Chasles p. 638.

†) Drobisch, de Joan. Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum etc. Lips. 1840.

aber wurde sie gegen die Mitte dieses Jahrhunderts durch die vereinten Anstrengungen eines Ferro, Tartaglia und Cardan bis zur Lösung der **allgemeinen** Gleichungen des 3ten und 4ten Grades erhoben, und die Rechnung mit imaginären Grössen wurde erfunden.

Die Auflösung der cubischen Gleichungen gelang nicht auf einmal; Libri theilt Auszüge aus zwei alten Manuscripten des 14ten und 15ten Jahrhunderts mit, die sich in seinem Besitz befinden, in welchen mehrfache Versuche zur Lösung solcher Gleichungen gemacht sind. Die grösste Schwierigkeit hierbei war die, dass man nicht auf analogem Wege, wie bei den Gleichungen des 2ten Grades, dahin gelangen konnte, sondern dass neue Methoden geschaffen werden mussten. Der Name des ersten Erfinders einer solchen ist nur durch Zufall auf uns gekommen; kein gleichzeitiger Schriftsteller gedenkt seiner und sein Verfahren ist unbekannt geblieben. Scipione Ferro, von 1496 bis 1525 Professor zu Bologna, löste zuerst die Gleichung, die man damals „capitulum cubi et rerum numero aequalium“ (d. h. $x^3 + mx = a$) nannte, allgemein auf; er starb aber, ohne seine Entdeckung bekannt gemacht zu haben. Die gefundene Formel hatte er jedoch dem Antonio Fiore anvertraut, der unterschiedenen Geometern, so auch 1535 dem Tartaglia, Probleme zur Lösung vorlegte, die nur mit Hülfe der Formel, in deren Besitz er war, erhalten werden konnte. Da Fiore nur ein gewöhnlicher Rechner war, so glaubte anfangs Tartaglia, dass er selbst nicht im Besitz der Lösung seiner Probleme sei; als aber Fiore versicherte, dass ihm die Methode dazu vor 30 Jahren von einem grossen Mathematiker mitgetheilt worden sei, so beschäftigte Tartaglia sich ernstlich damit und fand die Lösung *). So findet sich die Erzählung in Tartaglia's Schrift: Quesiti et inventioni diverse (Venet. 1554.); Ferro's Name wird jedoch nicht genannt, Cardan indessen kommt auf denselben Gegenstand in dem ersten Capitel seiner Ars magna zu sprechen und citirt den Scipione Ferro als den, welcher dem Fiore seine Entdeckung mitgetheilt habe. So war demnach das erste Hinderniss beseitigt, das Pacioli und alle andere nach ihm für unübersteiglich gehalten hatten, und die Bahn zu weiteren Fortschritten war eröffnet. — Mit welcher Freude die Entdeckung Ferro's und Tartaglia's von ihren Zeitgenossen aufgenommen wurde, davon giebt nicht allein Cardan Zeugniss **), sie verursachte eine allgemeine Bewegung in Italien. Es wurden öffentliche Wettkämpfe veranstaltet, woran alle Classen der Bevölkerung Theil nahmen. Von allen Seiten wurden Probleme vorgelegt; Fürsten, Mönche, Gelehrte, Gesandte, Professoren, Architekten wetteiferten in der Lösung derselben. Die oben erwähnten Quesiti

*) Auch sie ist unbekannt geblieben; Tartaglia sagt nur, dass er mit Hülfe einer geometrischen Construction, die den Cubus der Summe zweier Geraden giebt, dahin gekommen sei.

**) Temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit, rem sane pulchram et admirabilem. Quum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem ars haec superet, donum profecto coeleste, experimentum autem virtutis animorum, atque adeo illustre, ut qui haec attigerit, nihil non intelligere posse se credat. Cardan. Ar. mag. cap. 1.

etc. des Tartaglia enthalten eine Sammlung von Antworten, die er auf die ihm vorgelegten Probleme gab. Ohngeachtet dieses allgemeinen Enthusiasmus wurde jedoch der Name des ersten Erfinders kaum genannt.

Der bemerkenswertheste Incidenzpunkt dieser langen Discussionen war der Streit, der zwischen Cardan und Tartaglia sich erhob. Der letztere war nämlich nicht bloss bei der Lösung des erwähnten Falles stehen geblieben, er hatte sich indessen in Besitz der Lösung aller übrigen Arten der cubischen Gleichungen gesetzt. Diese Entdeckung, die er sorgfältig geheim hielt, machte Aufsehen. Hieronymus Cardan zu Mailand, der, obgleich Arzt, sich dennoch vielfältig mit Algebra beschäftigte, interessirte sich lebhaft dafür. Zu verschiedenen Malen bat er nicht nur selbst, sondern liess auch durch andere den Tartaglia um Mittheilung seiner Methode bitten. Nachdem dieser es mehrmals verweigert hatte, erhielt Cardan endlich im Jahre 1539 einige Verse, in welchen die Art und Weise beschrieben war, wie man die Wurzel einer jeden cubischen Gleichung erhalten könnte. Cardan fand dazu den Beweis, der ihm nicht mitgetheilt worden war. Er stimulirte nun seine Schüler, unter welchen Ferrari der bedeutendste war, die Entdeckung des Tartaglia durch andere zu überbieten. Ferrari fand die Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades; man legte sich wiederum gegenseitig Probleme vor, es erfolgten Herausforderungen und öffentliche Wettkämpfe zu Mailand im Jahre 1547. Das aber reizte den Tartaglia am meisten, dass Cardan ohngeachtet des feierlichsten Versprechens von seiner Seite in seiner Ars magna die Auflösung der cubischen Gleichungen bekannt machte. Zwar hatte er die Priorität des Geometers von Brescia gebührend anerkannt; diesem war es jedoch höchst unangenehm, seine Entdeckung zum ersten Male in einem fremden Werke veröffentlicht zu sehen. Er beklagte sich schmerzlich darüber; dazu hatte er auch alle Ursache, denn die Formel Tartaglia's zur Lösung der cubischen Gleichungen trägt den Namen Cardan's.

Nachdem wir so den Gang der Wissenschaft im Zusammenhange dargestellt haben, dürfte es nicht ohne Interesse sein, die dabei auftretenden Personen etwas näher kennen zu lernen. Scipione Ferro, den ersten Erfinder der Auflösung der cubischen Gleichungen, kennen wir nur dem Namen nach; umständlichere Nachrichten besitzen wir von dem zweiten, Nicolo Tartaglia. Geboren zu Brescia im Anfange des 16ten Jahrhunderts war er kaum 6 Jahr alt, als er seinen Vater verlor, der ein Postillon war. Da derselbe kein Vermögen hinterliess, so befand sich die Mutter mit ihren drei Kindern — Tartaglia hatte noch zwei Brüder — in traurigen Umständen. Unser Nicolo war noch ein Kind, als Gaston de Foix jene furchtbare Metzelei zu Brescia anrichtete, vor welcher sich die Familie in die Cathedrale flüchtete. Wiewohl sie sich daselbst vollkommen sicher glaubte, so wurde Nicolo dennoch von einem Soldaten verwundet und schrecklich verstümmelt. Seine Hirnschale war an drei Stellen durchlöchert uud das Gehirn lag offen da. Er erhielt quer über das Gesicht einen Schlag, der seine beiden Kinnbacken spaltete und den Gaumen bloss legte. So konnte er weder sprechen noch essen. Da auch das Haus der armen Familie von den Franzosen verwüstet worden war, so litt die Mutter mit ihren 3 Söhnen die grösste Noth; um ihr verunstal-

tetes Kind zu pflegen, leckte sie nach Art der Hunde die Wunden desselben. Sie heilten, aber Nicolo stotterte noch lange nachher, wesshalb man ihn Tartaglia nannte. Diesen Spitznamen behielt er bei, da er den Namen seines Vaters nicht mehr wusste. Tartaglia bildete sich selbst: im fünften Jahre lernte er lesen, im 14ten nahm er Schreibunterricht, der jedoch schon beim Buchstaben *K* wieder aufhörte, weil er seinen Lehrer nicht bezahlen konnte; er sah sich desshalb genöthigt, die übrigen Buchstaben des Alphabeths allein nachzubilden. Seitdem hatte er niemals einen Lehrer wieder, aber unermüdlich fleissig studirte er eifrig die Schriften der grossen Männer früherer Zeiten. So hatte es Tartaglia in seinem 30sten Jahre so weit gebracht, dass er das Geheimniss des Ferro entschleierte und die allgemeine Lösung der cubischen Gleichungen fand, um welche sich die Mathematiker schon so lange vergeblich bemüht hatten. Durch diese Entdeckung gewann erst die neuere Zeit ein Uebergewicht über die Zeiten der Griechen und Araber, denn bisher war in den mathematischen Wissenschaften noch kein wesentlicher Schritt vorwärts geschehen.

Tartaglia überliess dem Cardan seine Entdeckung und dieser erndtete die Frucht davon; wer würde sich nicht ebenso bitter, wie er, darüber beklagt haben? Ein unglückliches Loos verfolgte ihn überall; man rief ihn nach Mailand, nach Venedig, aber bald gerieth er in Vergessenheit; seine Vaterstadt wünschte ihn wieder in ihren Mauern zu sehen, jedoch auch hier kümmerte man sich wenig um ihn und behandelte ihn mit Geringschätzung. Tartaglia kehrte nach Venedig zurück, wo er im Jahre 1559 starb. Das ist das Leben eines der grössten Männer des 16ten Jahrhunderts. Man hat gesagt und wiederholt es noch fortwährend, dass Tartaglia einen sehr reizbaren Charakter gehabt habe; es mag sein — wer aber dürfte unter so bewandten Umständen wohl mehr unsere Nachsicht in Anspruch nehmen?

Tartaglia hat viele Werke geschrieben, aber das, worin er die Auflösung der cubischen Gleichungen und seine algebraischen Untersuchungen überhaupt niederzulegen gedachte, ist nicht erschienen. Sein grosses Werk: General trattato di numeri e misure (Vinegia, 1556. 6 part. in fol.) enthält einen vollständigen Cursus der reinen Mathematik. Man findet darin Arithmetik, Algebra, Geometrie und Kegelschnitte nach einander abgehandelt. Unter andern bemerkenswerthen Sachen enthält dieses Werk die Entwickelung eines Binoms für ganze positive Exponenten nach einer Regel, aus der sich eine allgemeine Formel ableiten lässt; ferner Probleme aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren richtige Lösung aber von Pacioli bereits gesucht, von Tartaglia ebenfalls nicht getroffen wurde. Die Rechnung mit Wurzelgrössen wird vollständiger abgehandelt, geometrische Probleme mittelst einer einzigen Cirkelöffnung gelöst und algebraische Gleichungen construirt. Ferner finden sich in diesem umfassenden Werke Probleme über Maxima und Minima algebraischer Funktionen, die rein algebraisch behandelt werden; unter anderen ein Problem, das Tartaglia von Cardan vorgelegt wurde: die Zahl 8 in zwei Theile so zu theilen, dass das Produkt, welches entsteht, wenn der eine mit dem andern und mit der Differenz beider multiplicirt wird, ein Maximum ist. Dieses Werk ist übrigens nicht vollendet; dem Verfasser fehlte es wahrscheinlich an Zeit die Redaction selbst zu verbessern, und

mehrere Abschnitte sind erst nach seinem Tode erschienen. Indessen alle darin abgehandelten Gegenstände sind für die Geschichte der Wissenschaft von Interesse: der grosse Streit des Verfassers mit Cardan und Ferrari wird vollständig erzählt, und die von den verschiedenen Theilnehmern am Streite vorgelegten Fragen sind beinahe sämmtlich erwähnt. Sie beziehen sich vorzugsweise auf die Lösung cubischer Gleichungen und geometrischer Probleme.

Tartaglia hat auch der Ballistik die erste wissenschaftliche Grundlage gegeben. In der Schrift: Scientia nova (Venetia 1550. 4.) findet sich das merkwürdige Resultat, dass man die grösste Wirkung erhält, wenn unter einem Winkel von 45° gerichtet wird. Tartaglia war schon im Jahre 1532 darauf gekommen. Ohngeachtet aller Anstrengungen gelang es ihm aber dennoch nicht, die Wurflinie zu bestimmen und die Wahrheit dieses richtigen Satzes zu beweisen. Eben so wenig vermochte er die Mechanik wissenschaftlich zu begründen, denn er verstand nicht, die hergebrachten Definitionen und Eintheilungen zu verlassen und an ihre Stelle neue zu schaffen. Indessen sieht man dennoch aus seinen Irrthümern einige richtige Grundgesetze der Mechanik hervorschimmern, und man muss es ihm Dank wissen, dass er zuerst die Geometrie auf die Bestimmung der krummlinigen Bewegung und auf den Fall der Körper anwandte. Auch diese Schrift, die aus fünf Büchern bestehen sollte, ist unvollendet geblieben, denn die beiden letzten fehlen. Das fünfte, das nach des Verfassers Ankündigung eine Art Handbuch über Chemie in ihrer Anwendung auf Verfertigung des Pulvers und der Kunstfeuer im Allgemeinen werden sollte, würde gegenwärtig interessante Beiträge zur Geschichte der Pyrologie darbieten.

Das schon oben erwähnte Werk Tartaglia's: Quesiti et inventioni diverse, enthält eine grosse Anzahl Probleme, die dem Verfasser von vielen, namentlich erwähnten Personen vorgelegt wurden, zugleich mit den darauf gegebenen Antworten. In den drei ersten Büchern beschäftigt er sich auch mit der Artillerie und Ballistik; man findet unter andern darin die Dimensionen der damals gebräuchlichen Stücke, ihr Kaliber und das Verfahren, die innere Weite derselben zu bestimmen, so wie auch verschiedene Recepte zur Anfertigung von Pulver; er spricht daselbst von der allmähligen Entzündung des Pulvers und erklärt aus der Erhitzung des Stücks und aus der daraus entstehenden Verdünnung der Luft die Absorption, welche man zuweilen bemerkt; er berücksichtigt den Widerstand der Luft bei der Bestimmung der Schussweite und zeigt, dass die Wurflinie niemals eine Gerade sein wird. Das fünfte Buch enthält die Feldmesskunst und das Aufnehmen der Ebenen. Die Instrumente, die damals die Feldmesser gebrauchten, werden beschrieben; auch findet sich hier eine Abbildung der damals gebräuchlichen Form der Boussole. In den folgenden Büchern finden sich Untersuchungen über Fortification, Statik und Algebra, und das neunte enthält, wie schon erwähnt, die Streitfragen in Betreff der cubischen Gleichungen, die Tartaglia von Fiore und andern Personen vorgelegt wurden. Hier wird erzählt, durch welche Mittel und durch welche Versprechungen Cardan endlich den Tartaglia zur Mittheilung der allgemeinen Formel zur Lösung der cubischen Gleichungen bewog. Zugleich ergiebt sich auch,

dass letzterer seit dem Jahre 1541 das Princip der Mehrheit der Wurzeln bei cubischen Gleichungen erkannt hatte, falls dieselben mehrere positive Wurzeln haben, denn die negativen lässt Tartaglia, selbst bei den Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen, unberücksichtigt: eine merkwürdige Thatsache, die sich nur aus der hergebrachten Gewohnheit erklären lässt. Er vermochte aber nicht die Anzahl der Wurzeln zu bestimmen, denn er sagt, dass die cubischen Gleichungen immer zwei Auflösungen, und vielleicht auch mehr zulassen.

Tartaglia hat den Euklid ins Italienische übertragen, und auch die erste nach dem griechischen Original gefertigte Uebersetzung der Schriften Archimeds (Archimedis opera. Venet. 1546. 4.) geliefert. Von der Abhandlung Archimeds „über die schwimmenden Körper (de infidentibus)“ kannte er noch das griechische Original, das seitdem verloren gegangen ist, so dass gegenwärtig seine Uebersetzung die Stelle desselben vertritt *). Aus der Bearbeitung dieser Abhandlung ging wahrscheinlich Tartaglia's Schrift: Travagliata inventione, hervor, worin er sich mit den Anstalten beschäftigt, gesunkene Schiffe wieder emporzuheben, und von der das dritte Buch eine kleine Abhandlung über Meteorologie enthält. Er nahm später diesen Gegenstand wieder auf und erweiterte ihn in dem Ragionamenti sopra la travagliata inventione (Venet. 1551. 4.). Unter andern findet man hier eine Tafel der specifischen Schwere einer grossen Anzahl von Körpern, wobei die Schwere des Wassers als Einheit genommen ist. Sie scheint zwar im Allgemeinen sehr ungenau zu sein; man muss jedoch bedenken, dass Tartaglia die Versuche zu Venedig anstellte und wahrscheinlich unmittelbar Seewasser dazu gebrauchte, indem er nur angenäherte Bestimmungen zum Behuf des Emporhebens gesunkener Schiffe haben wollte.

Alle diese Werke Tartaglia's enthalten nur Mathematik und Anwendungen derselben auf verschiedene Wissenschaften. Er kümmerte sich weder um die zu seiner Zeit so hoch geschätzten geheimen Wissenschaften, noch um die verschiedenen philosophischen Systeme, die damals so rasch entstanden, um ebenso bald wieder zu vergehen.

Von ganz verschiedenem Charakter war sein Rival, Hieronymus Cardan, geb. 1501 zu Pavia **). Mit den ausgezeichnetsten Geistesfähigkeiten ausgerüstet, huldigte er dennoch vollständig den Schwachheiten seines Zeitalters. Auf der einen Seite zitterte er vor jeder Vorhersagung und vor jedem Traume, auf der andern verwarf er kühn jede Autorität und folgte nur der Intelligenz als Führerin in das Reich der Wissenschaften, von denen keine seiner Aufmerksamkeit entging. Bald lebte er schwelgerisch, bald ging er in Lumpen einher, und dennoch hat er bei seiner ungeregelten Lebensweise zahlreiche Werke geschrieben, die das ganze Gebiet

---

*) Wahrscheinlich war es diese Uebersetzung Tartaglia's, die Commandin verbesserte. Vergl. Kästner's Gesch. der Math. Bd. II. p. 201.

**) Die Erzählung de Thou's, dass Cardan im 75sten Jahre freiwillig den Hungertod gestorben sei, um seine Vorhersagung in Erfüllung gehen zu lassen, hat Tiraboschi (Storia della litt. ital., Vol. XI. p. 431.) zu widerlegen versucht.

des Wissens umfassen. Die gedruckten allein füllen 10 Bände in fol., aber sie sind nicht die Hälfte von dem, was Cardan geschrieben hat. Uns interessiren hier nur die mathematischen, besonders die algebraischen Schriften, in welchen er sich als ein gewandter und erfindungsreicher Analyst zeigt. In seiner Ars magna spricht er nicht allein von der Mehrheit der Wurzeln, sondern er berücksichtigt daselbst auch zuerst die negativen Wurzeln, die er falsae seu fictae nennt. Ganz besonders ist aber hervorzuheben, dass Cardan zum ersten Male imaginäre Wurzeln erwähnt, deren Duplicität er nachweist. Man verdankt ihm auch eine Methode zur Lösung der Gleichungen durch Näherung; er substituirt nämlich nach einander für die Unbekannte zwei Zahlen, findet hierbei ein Zeichenwechsel statt, so schliesst er, dass zwischen diesen beiden Zahlen die Wurzel enthalten sein muss. Cardan hat unter andern auch die Theoreme gefunden, dass jede cubische Gleichung sich durch die Unbekannte vermindert um die Wurzel dividiren lässt, und dass der Coefficient des zweiten Gliedes der Summe aller Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich ist; ferner hat er die gleichen Wurzeln gekannt und behandelt; er näherte sich sogar dem Theorem des Descartes über Zeichenwechsel und Zeichenfolge, und er würde gewiss noch mehr Entdeckungen gemacht haben, wenn er sämmtliche Glieder der Gleichung auf eine Seite gebracht und $= 0$ gesetzt hätte; aber zu seiner Zeit verfuhr man noch ganz nach der Art und Weise der Araber, welche die Glieder der Gleichungen auf beide Seiten des Gleichheitszeichens vertheilten, um sie sämmtlich positiv zu machen *).

Obgleich Cardan das Vorhandensein der drei Wurzeln einer cubischen Gleichung nicht allgemein bewiesen hat, falls sie sämmtlich imaginär sind, so hat er doch ihre Existenz in sehr vielen Fällen gezeigt, indem er sie überhaupt auf geometrischem Wege durch Kegelschnitte bestimmte. Zwar hatten die Araber schon ähnliche Untersuchungen gemacht, aber Cardan kannte sie nicht, und seine Construction der allgemeinen cubischen Gleichung verdient bemerkt zu werden, weil sie zuerst zeigt, wie ein zwischen zwei Grössen bestehendes Verhältniss durch Abscissen und Ordinaten einer Curve allgemein dargestellt werden kann.

In allen Schriften Cardan's kommen mathematische Untersuchungen vor; er versuchte sogar die Mathematik auf die Medicin anzuwenden, indem er die Frage behandelte, ob die durch die Medicamente hervorgebrachten Wirkungen in arithmetischer oder geometrischer Proportion zu den gegebenen Dosen stehen.

Unter den Schülern Cardan's war der ausgezeichnetste, Luigi Ferrari aus Bologna, der zu Mailand und später in seiner Vaterstadt Professor war. Er entdeckte, wie schon erwähnt, die Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades, die er nach damaliger Sitte geheim hielt. Cardan veröffentlichte sie jedoch in seiner Ars magna, und eine ausführliche Darstellung findet sich in der Algebra des Bombelli. Ersterer entwirft kein besonderes Bild von dem Charakter des Ferrari; so ausgezeichnet er in der Mathematik war, so wenig zeigte er sich mit den Regeln des Anstandes im Leben vertraut.

---

*) Siehe Kästner's Gesch. der Math. Bd. I. p. 150 ff.

Er war sehr reizbar und hatte schon im 17ten Jahre alle Finger der rechten Hand in einem Streite verloren. Er starb 1565 in der Blüthe seines Lebens, 43 Jahr alt, wie man glaubte, von seiner Schwester vergiftet. Von ihm sind nur einige Briefe gedruckt. Seine Abhandlung über den Irrthum, den man bei der Bestimmung des Osterfestes begeht, war noch 1731 als Manuscript vorhanden, und Cardan erwähnt, dass Ferrari auch über Geometrie geschrieben habe.

Zu den Männern, die sich um die Algebra so ausgezeichnete Verdienste erwarben, gesellt sich als der letzte Raphael Bombelli. Von seinem Leben weiss man nur so viel, dass er in der Vaterstadt Ferro's und Ferrari's, zu Bologna — um welche Zeit, ist unbekannt — geboren wurde, und im Dienste des Bischofs von Melfi als Ingenieur stand, der ihn auch veranlasste, sein berühmtes Werk über die Algebra zu schreiben. Es erschien 1572, und ist in 3 Bücher getheilt, von denen das erste die Elemente, die Rechnung mit Wurzeln und imaginären Grössen enthält, das zweite die Gleichungen behandelt, und das dritte eine Sammlung von Problemen ist, unter welchen einige sehr schwierige aus der unbestimmten Analysis sich finden. Die ganze Algebra der damaligen Zeit wird in demselben gründlich dargestellt, und die Beweise sind streng und vollständig. Einiger eigenthümlichen Bezeichnungen bedient sich Bombelli; es ist z. B.

$$\overset{1}{\smile}=x^1,\ \overset{2}{\smile}=x^2,\ \overset{3}{\smile}=x^3 \ldots,$$

also

$$2\overset{2}{\smile}\ m20\overset{1}{\smile}\ p22=2x^2-20x+22;$$

ferner ist

$$R.q=\sqrt[2]{},\ R.c=\sqrt[3]{}\ldots$$

Die Rechnung mit Wurzelgrössen *), so wie auch die allgemeine Theorie der imaginären Grössen, wovon Bombelli eine glückliche Anwendung auf den irreducibeln Fall macht, finden sich hier vollständig aus einander gesetzt. Er hat ferner zuerst allgemein ausgesprochen, dass jede cubische Gleichung drei Wurzeln hat, falls dieselben sich sämmtlich unter imaginärer Form darstellen, und hat seine Behauptung in sehr vielen Fällen durch unmittelbares Ausziehen der Wurzeln aus beiden Binomen dargethan. Bombelli benutzt zwar die Schriften Leonardo's von Pisa und Pacioli's, aber er vervollkommnet die Beweise, so dass seine Algebra zu den Fortschritten der Wissenschaft nicht wenig beigetragen hat.

Seit den Zeiten Bombelli's nahm das Interesse für das Studium der Algebra in Italien ab. Nur Pietro Antonio Cataldi **), Pro-

---

*) Leibnitz und Hutton, nach diesem auch Klügel (Wörterbuch, Theil I. Art. Algebra) haben das Gegentheil behauptet, indem sie Bombelli hierin Unvollständigkeit nachweisen; Plana hat jedoch in einer längeren Note (Libri, histoire des mathém. tom. III. p. 446. sq.) das Urtheil von Leibnitz widerlegt. Derselbe führt auch mehrere Stellen aus Lagrange's Vorlesungen an, die dieser 1795 an der Normalschule gehalten hat, worin ebenfalls zu Gunsten Bombelli's entschieden wird.

**) Von Montucla nicht erwähnt.

fessor an der Universität zu Bologna, legte sich später mit einigem Erfolge auf die Wissenschaft. Unter seinen zahlreichen Werken — er schrieb deren mehr als 30 — verdienen nur die wenigsten unsere Aufmerksamkeit, die meisten enthalten nichts Neues. Besonders ist hier zu erwähnen sein Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri (Bologna 1613. in fol.); es findet sich nämlich hierin nicht allein ein Verfahren, wie man näherungrweise eine Quadratwurzel ausziehen hann, so dass dieselbe unter der Form einer unendlichen Reihe erhalten wird, sondern Cataldi bedient sich auch zu eben dem Zwecke der Kettenbrüche, deren ersten Gebrauch man sonst dem Lord Brouncker zuschrieb. Er setzt z. B.

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \ldots}}}$$

und beweist, dass je nachdem man zum letzten Nenner einen neuen Bruch hinzugefügt oder weglässt, Zahlen erhalten werden, die abwechselnd grösser und kleiner sind als der wahre Werth, und demselben zugleich immer näher kommen. Nachdem er so 15mal den Bruch $\frac{2}{8}$ wiederholt hat, erhält er zuletzt einen Werth von $\sqrt{18}$, bei dem man noch um einen Bruch irrt, dessen Zähler $= 1$ und dessen Nenner eine 23 ziffrige Zahl ist. Auch stellt Cataldi eine Vergleichung dieser beiden Näherungsmethoden an. Es ist überhaupt merkwürdig, dass sich schon in dieser Schrift die ersten Spuren der Entdeckungen finden, die sonst gewöhnlich Wallis zugeschrieben werden.

Unter den algebraischen Schriften Cataldi's sind ferner noch die zu erwähnen, worin er die Ausziehung der Cubikwurzel aus gewissen Binomen und sogar Trinomen lehrt (Nova algebra proportionale, Bologna 1619 in fol. und Elementi delle quantità irrationali, Bolog. 1620 in fol.). Viele Geometer hatten sich schon mit Problemen ähnlicher Art beschäftigt, um namentlich die Schwierigkeiten, welche die Cardanische Formel verursacht, zu beseitigen; Cataldi nimmt in diesen beiden Schriften den Gegenstand von neuem mit Erfolg war.

Besonders hat aber Cataldi in den Anwendungen der Algebra die Schärfe seines Geistes dargelegt. Seine Algebra discorsiva numerale et lineare (Bolog. 1618 3 part. in fol.) enthält analytische Geometrie; er gebraucht hier Linien anstatt der Zahlen und construirt allgemein die Gleichung des zweiten Grades. Auch in der Algebra applicata (Bolog. 1622 in fol.) finden sich viele beachtenswerthe Sachen; es existirt ferner von ihm eine trigonometrische Algebra (Algèbre triangulaire), die, wie alle übrigen Werke Cataldi's, sehr selten zu sein scheint.

Cataldi hat sich auch mit Geometrie beschäftigt. Er commentirte den Euclid und vertheidigte ihn gegen die Angriffe Molina's *); ebenso nahm er sich auch für Archimed gegen die Anmassungen

*) Cataldi, elementi di Euclide, Bolog. 1620. 21. 25. 3 voll. in fol., und Difesa d'Euclide, Bolog. 1626 in fol. (wahrscheinlich seine letzte Schrift).

Scaliger's auf (Difesa d'Archimede, trattato del misurare o trovare la grandezza del cerchio, Bologna 1620, in fol.). Auch hat Cataldi den berüchtigten Satz über den Parallelismus zweier Geraden zu beweisen versucht (Operetta delle linee rette equidistanti, Bolog. 1603. 4.), jedoch der Fehlschluss darin ist sehr leicht zu bemerken.

Cataldi war um 1563 Professor zu Florenz; aber schon 1572 finden wir ihn an der Academie und Universität zu Perugia. 1584 wurde er zum Professor der Mathematik an der Universität zu Bologna ernannt, wo er bis zu seinem Tode blieb, der nach 1626 erfolgte. Schon in seinem 17ten Jahre schrieb er den ersten Theil seiner Pratica aritmetica, der jedoch erst 1602 erschien, worauf dann 1606 der zweite Theil folgte. In Bologna gründete er eine Academie für Mathematik, vielleicht die älteste, die wir kennen; sie wurde jedoch vom Senate, ohne dass man wusste warum, aufgehoben. Die Vorlesungen, die Cataldi daselbst hielt, sind erschienen (Due lettioni date nell' Accademia Erigenda, Bolog. 1613. 4.).

Ohnstreitig verdient Cataldi einen ausgezeichneten Platz unter den Mathematikern seiner Zeit, wenn er sich auch nicht mit den grossen Geistern des 17ten Jahrhunderts vergleichen lässt. Er besass einen erfinderischen Geist und eine ausgebreitete Gelehrsamkeit, und nahm von Allem Notiz, was im Auslande erschien. Die Namen Vieta's, van Ceulen's finden sich in den Vorreden zu seinen Schriften erwähnt. Um die Ausbreitung seiner Wissenschaft war ihm so sehr zu thun, dass er seine Schriften in mehr als 100 Städten Italiens mehrmals an Handwerker und Arme umsonst vertheilen liess.

So sind wir bis zum Zeitalter Galiläi's gekommen, der an demselben Tage (18. Febr. 1564) zu Pisa geboren wurde, an welchem Michel Angelo starb. Durch ihn erhielten die mathematischen Studien in Italien eine andere Richtung. Er ist der Schöpfer der Mechanik und der wissenschaftlichen Physik; in beiden Disciplinen haben die Italiener bis auf die neueste Zeit Bedeutendes geleistet.

XXXIV.

Ueber Reihenentwickelungen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten

Von

Herrn T. Wittstein

Lehrer am Lyceum zu Hannover.

Es ist in diesen Blättern mehrfach von der Unzulässigkeit der Methode der unbestimmten Coefficienten zum Behuf der Entwicke-

lung der Funktionen in Reihen die Rede gewesen, und es möchte desshalb nicht unpassend sein, hier auch die Gründe dieser Unzulässigkeit vollständig zusammengestellt zu sehen. Man trennt sich ungern von einer Methode, die so leicht und einfach ihrem Ziele zuführt, man sucht die Mängel zu verbessern, die Lücken zu ergänzen; und wenn auch das Resultat nicht die gewünschte Befriedigung bringt, so trägt man wenigstens den Gewinn davon, dass man mit Ueberzeugung die Methode fallen lässt.

Als Fundamental-Lehrsatz der Methode der unbestimmten Coefficienten muss ein Satz angesehen werden, den man gewöhnlich in folgender Weise ausspricht:

Wenn zwei auf gleiche Weise nach Potenzen von x geordnete Reihen

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \text{ und } B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots$$

einander gleich sein sollen, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von x in beiden gleich sein.

Dieser Lehrsatz pflegt in den Lehrbüchern entweder gar nicht, oder nur mangelhaft bewiesen zu werden. Im ersten Falle verwechselt man ihn offenbar mit seinem Umgekehrten:

Wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von x in jenen Reihen übereinstimmen, so sind beide Reihen gleich;

welches auf der Stelle klar ist, so lange nur beide Reihen weder unbestimmte noch unendliche Resultate geben, in welchem Falle der Begriff von Gleichheit wegfällt. Im zweiten Falle aber, wo man im Laufe des Beweises wiederholt durch x dividirt und sodann $x = 0$ setzt, begeht man den Fehler, dass man beide Seiten einer Gleichung durch 0 dividirt und die Quotienten wieder gleich setzt, da ja bekanntlich der Satz „Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches" eine Ausnahme erleidet, sobald 0 der Divisor ist. Dieser Beweis lässt sich indessen mit Hülfe von Grenzbetrachtungen in ein völlig strenges Gewand einkleiden, wobei jedoch zugleich der zu beweisende Satz selbst einige Modifikation erleidet, nämlich in folgender Weise.

Lehrsatz. Wenn zwei auf gleiche Weise nach Potenzen von x geordnete Reihen

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \text{ und } B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots$$

für alle Werthe von x zwischen $x = 0$ und $x = \varepsilon$ gleiche Resultate geben sollen, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von x in beiden gleich sein.

Beweis. Da die Gleichung

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots$$

für $x = 0$ bestehen soll, so hat man sofort

$$1)\ A_0 = B_0.$$

Daraus folgt ferner

$$A_1 x + A_2 x^2 + \dots = B_1 x + B_2 x^2 + \dots \text{ innerhalb } \begin{cases} x = 0 \\ x = \varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{A_1 x + A_2 x^2 + \dots}{x} = \frac{B_1 x + B_2 x^2 + \dots}{x} \text{ innerhalb } \begin{cases} x = 0 \text{ excl.} \\ x = \varepsilon \end{cases}$$

folglich wenn man x, von $x=\varepsilon$ anfangend, sich dem Werthe $x=0$ nähern lässt, wo

$$\lim \frac{A_1x+A_2x^2+\ldots.}{x}=\lim \frac{x}{x}\,.\lim\,(A_1+A_2x+\ldots)=A_1$$

$$\lim \frac{B_1x+B_2x^2+\ldots.}{x}=\lim \frac{x}{x}\,.\lim\,(B_1+B_2x+\ldots)=B_1$$

wird,

$$2)\ A_1=B_1.$$

Ferner ist daraus

$$A_2x^2+A_3x^3+\ldots=B_2x^2+B_3x^3+\ldots \text{ innerhalb } \begin{cases} x=0 \\ x=\varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{A_2x^2+A_3x^3+\ldots}{x^2}=\frac{B_2x^2+B_3x^3+\ldots}{x^2} \text{ innerhalb } \begin{cases} x=0 \text{ excl.} \\ x=\varepsilon \end{cases}$$

und durch Uebergang zu den Grenzen, wie vorhin,

$$3)\ A_2=B_2,$$

u. s. w.

Hiermit ist der vorliegende Satz vollständig bewiesen. Aus der Beschaffenheit dieses Beweises zeigt sich sofort, wesshalb in dem Lehrsatze die Forderung aufgestellt werden musste, dass für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=\varepsilon$ (von denen die letztere hier durchaus willkürlich ist) obige Reihen gleiche Resultate geben sollen; es war nämlich zur Auffindung der im Beweise erforderlichen Grenzwerthe für $x=0$ nöthig, dass man von einem von 0 verschiedenen Werthe für x, für welchen die supponirte Gleichung noch gültig blieb, ausgehen konnte, um sich von da aus der 0 zu nähern. Mehr aber bedurfte es nicht, und die frühere Weise den Satz auszusprechen, wo man Gleichheit beider Reihen für alle Werthe von x (natürlich mit Ausschluss derjenigen, für welche der Begriff der Gleichheit keine Bedeutung mehr hat) verlangte, war desshalb fehlerhaft, weil die Bedingung in diesem Umfange in dem Beweise nicht zur Anwendung kommen kann, mithin der Satz mehr behauptete, als der Beweis beweiset.

Es lässt sich hieran noch die Folgerung knüpfen, dass, wenn man eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe hat, die innerhalb bestimmter Grenzen für x (unter denen auch 0 vorkommt) die Entwickelung einer gegebenen Funktion von x liefert, es keine von dieser verschiedenen Reihe mehr geben kann, die innerhalb derselben Grenzen gleichfalls als Entwickelung dieser Funktion könnte angesehen werden. Diese Folgerung auszusprechen kann insofern von Nutzen sein, als es dadurch noch unentschieden bleibt, ob es vielleicht innerhalb anderer in jenen nicht enthaltenen Grenzen eine andere Reihenentwickelung der vorgelegten Funktion geben könne.

Der Gang, den die Methode der bestimmten Coefficienten (um zu dieser selbst jetzt überzugehen) nimmt, um eine gegebene

Funktion $f(x)$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitet, besteht im allgemeinen darin, dass man. die Möglichkeit einer solcher Entwickelung voraussetzend, die Gleichung

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots$$

aufstellt, von welcher ausgehend man durch verschiedene Kunstgriffe — deren Erörterung nicht weiter zur Methode selbst gehört, insofern die eigenthümliche Beschaffenheit der Funktion $f(x)$ sie an die Hand geben muss *) — dahin zu gelangen sucht, dass auf jede Seite des Gleichheitszeichens eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu stehen kommt, worauf sich die Bestimmung der Coefficienten A_0, A_1, A_2, ... unmittelbar durch den vorstehenden Lehrsatz ergibt.

Dieser Gang gibt zu zwei Bemerkungen Veranlassung. Zunächst nämlich ist klar, dass die Voraussetzung, dass irgend eine willkürlich vorgelegte Funktion sich in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe soll entwickeln lassen, im allgemeinen durch gar nichts gerechtfertigt wird; man kann im voraus nicht wissen, ob die gegebene Funktion die Form, die man ihr aufdringen will, wird annehmen können, und in der That gibt es Funktionen, die eine Reihenentwickelung in jener Form nicht gestatten, z. B. $\log x$, $\cot x$. Wenn man daher dennoch jene Voraussetzung macht, und, darauf gestützt, die Coefficienten der supponirten Reihe zu bestimmen sucht, so muss man es sich auch gefallen lassen, wenn man dabei zu unbrauchbaren Resultaten gelangt. So z. B. wenn man setzt

$$\log x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots$$

und nun zu beiden Seiten die derivirten Funktionen nimmt, so hat man

$$\frac{1}{x} = A_1 + 2A_2 x + \ldots.,$$

woraus

$$1 = A_1 x + 2A_2 x^2 + \ldots.,$$

welche Gleichung offenbar für ein veränderliches x ohne Sinn ist. Es leuchtet aber ein, dass, wenn die Rechnung wirklich zu bestimmten Coefficienten führt, die Voraussetzung selbst auch nichts ungereimtes enthalten hat, und mithin kann von dieser Seite die Methode der unbestimmten Coefficienten kein Vorwurf treffen.

Ferner liegt in der Voraussetzung, dass ohne weitere Beschränkung

---

*) In vielen Fällen reicht der Uebergang zu den derivirten Funktionen zu dem beabsichtigten Zwecke aus. Lacroix in seinem Traité élémentaire findet auf diesem Wege vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten die Taylorsche Reihe; er weicht jedoch darin ab, dass er auch die Exponenten der supponirten Reihe als unbestimmt voraussetzt und sie aus der letzten Gleichsetzung bestimmen will, welches begreiflich nicht angeht, da es ja zum Wesen der Methode der unbestimmten Coefficienten gehört, dass sie die Exponenten von x bestimmt vorschreibt.



$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

sein soll, implicite die Bedingung ausgesprochen, dass für jeden besondern Werth des x der Werth der Funktion mit demjenigen, den die Reihe dafür liefert, übereinstimmen soll. Hier ist nun sofort klar, dass diese Bedingung aufhört, ihre Gültigkeit zu behalten, für alle diejenigen Werthe von x, für welche entweder die Funktion oder die Reihe aufhört endlich und bestimmt zu bleiben, weil in diesem Falle der Begriff der Gleichheit seine Anwendung verliert; und es tritt mithin namentlich in Bezug auf die gefundene Reihe hier mit Nothwendigkeit die Forderung auf, die Reihe hinsichtlich ihrer Convergenz zu untersuchen, um die unbrauchbaren Werthe ausschliessen zu können. Aber dieses allein genügt nicht. Der obige Lehrsatz verlangt nämlich zu seiner Anwendbarkeit das Stattfinden der Gleichheit innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = \varepsilon$, wo ε also nicht über derjenigen Grenze hinaus, für welche der Begriff der Gleichheit verschwindet, aber der 0 so nahe liegen darf als man will. Es sei nun α derjenige positive oder derjenige negative Werth von x, der, wenn man von 0 ausgeht, der erste ist, mit welchem entweder die vorgelegte Funktion oder die gefundene Reihe aufhört endlich und bestimmt zu bleiben, so darf jedenfalls ε nicht über α hinaus liegen; ob man aber $\varepsilon = \alpha$ setzen dürfe, das ist nicht ohne weiteres klar, denn es bleibt noch immer die Möglichkeit offen, dass es innerhalb 0 und α Werthe von x geben könne, für welche die Reihe ein Resultat liefert, welches nicht mit dem correspondirenden Werthe der gegebenen Funktion übereinstimmt. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, welches allerdings nicht ganz hieher gehört, so liefert die bekannte Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi} \cos x \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx + \frac{1}{\pi} \cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx + \dots$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sin x \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx + \frac{1}{\pi} \sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2x \, dx + \dots$$

welche als Entwickelung von $f(x)$ gefunden wird und von $-\pi$ bis π convergent bleibt, wenn nur $f(x)$ zwischen diesen Grenzen nicht discontinuirlich wird, für $x = \pm\pi$ das Resultat $\frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi))$, welches mit dem correspondirenden Funktionswerthe $f(\pi)$ nicht zusammenfällt, es sei denn dass man habe $f(\pi) = f(-\pi)$ (vgl. Lejeune Dirichlet in Crelle's Journal B. 4. S. 157. seqq.). — Wenn man nun, wie es gewöhnlich geschieht, in Ermangelung des nöthigen Kriteriums geradezu $\varepsilon = \alpha$ setzt, so spricht man damit eine Behauptung aus, die erst noch des Beweises bedarf, und dies ist die eigentliche schwache Seite der Methode der unbestimmten Coefficienten. Also nicht etwa darin, dass die Methode divergente Reihen liefert, — denn hierauf scheint manche Aeusserung hinzudeuten, — sondern darin ist der Grund für die Unzulässigkeit der Methode der unbestimmten Coefficienten zu suchen, dass sie nicht lehrt, innerhalb welcher Grenzen die gefundene Reihe wirklich als

Entwickelung der gegebenen Funktion gültig ist. Dieser Mangel findet sich bei denjenigen Methoden nicht, welche, nach dem Vorgange von Cauchy und Ampère, bei jeder Entwickelung zugleich den ergänzenden Rest der Reihe mit in Betracht ziehen.

XXXV.

Beitrag zur Lösung des, im II. Bd. des Archivs S. 220 angeregten, Euler-Pfaffschen Theorems über geometrische Progressionen.

Von dem

Herrn Doctor A. R. Luchterhandt

zu Königsberg i. d. N.

Wir beabsichtigen hier zunächst die allgemeine Entwickelung der Gleichung des $n$ten Grades, durch welche bei einer vorgelegten Gleichung des $2n$ten Grades die Hülfsgrösse u bestimmt wird, zu geben.

Zu dem Ende wollen wir die allgemeine Gleichung vom $2n$ten Grade

$$z^{2n}+Az^{2n-1}+Bz^{2n-2}+Cz^{2n-3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+Cz^3+Bz^2+Az+1=0,$$

auf folgende Art schreiben:

$$z^{2n}+[n]_1z^{2n-1}+[n]_2z^{2n-2}+[n]_3z^{2n-3}+\ldots$$
$$\ldots+[n]_3z^3+[n]_2z^2+[n]_1z+1=0,\ldots(1)$$

so dass also die Symbole $[n]_1$, $[n]_2$, ... $[n]_m$ den ersten, zweiten ... $m$ten Coefficienten vom Anfang und Ende in der Gleichung des $2n$ten Grades vorstellen. Solcher Symbole sind der Zahl nach $2n-1$, und das mittelste ist $[n]_{n-1}$.

Wir denken uns die Gleichung (1) auf die Form

$$(z^2+\alpha_1z+1)\,(z^2+\alpha_2z+1)\,(z^2+\alpha_3z+1)\ldots\ldots$$
$$\ldots(z^2+\alpha_{n-1}z+1)\,(z^2+\alpha_nz+1)=0\ldots.(2)$$

gebracht, und wollen nun untersuchen, wie die Coefficienten der Gleichung (1) aus den Grössen α_1, α_2, α_3, ... α_n gebildet sind.

Wir werden das Bildungsgesetz auf dem Wege der Induction suchen, und dann seine allgemeine Gültigkeit darthun. Wir bemerken noch, dass wir mit dem Symbole $\overset{p}{C}_m$ die Combinationen ohne Wiederholungen der $m$ten Klasse der p ersten Elemente α_1, α_2, α_3, ... α_p bezeichnen werden und erinnern an die bekannten Relationen

$$\left.\begin{aligned} \overset{p+1}{C}_m &= \overset{p}{C}_m + \alpha_{p+1} \cdot \overset{p}{C}_{m-1} \\ \text{und} \qquad \alpha_{m+1}\overset{m}{C}_m &= \overset{m+1}{C}_{m+1} \,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Wir haben also zunächst

$$x^2 + [1]_1 x + 1 = x^2 + \alpha_1 x + 1 = x^2 + \overset{1}{C}_1 x + 1,$$

ferner

$$\begin{aligned} x^4 + [2]_1 x^3 + [2]_2 x^2 + [2]_1 x + 1 & \\ &= (x^2 + \overset{1}{C}_1 x + 1)\,(x^2 + \alpha_2 x + 1) \\ = x^4 + (\alpha_2 + \overset{1}{C}_1)x^3 + (2 + \alpha_2 \overset{1}{C}_1)x^2 + (\alpha_2 + \overset{1}{C}_1)x + 1 & \\ = x^4 + \overset{2}{C}_1 x^3 + (2 + \overset{2}{C}_2)x^2 + \overset{2}{C}_1 x + 1; & \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & x^6 + [3]_1 x^5 + [3]_2 x^4 + [3]_3 x^3 + [3]_2 x^2 + [3]_1 x + 1 \\ &= \{x^4 + \overset{2}{C}_1 x^3 + (2 + \overset{2}{C}_2)x^2 + \overset{2}{C}_1 x + 1\}\,(x^2 + \alpha_3 x + 1) \\ &= x^6 + (\alpha_3 + \overset{2}{C}_1)x^5 + (3 + \alpha_3 \overset{2}{C}_1 + \overset{2}{C}_2)x^4 \\ &\qquad + (2\alpha_3 + 2\overset{2}{C}_1 + \alpha_3 \overset{2}{C}_2)x^3 + (3 + \alpha_3 \overset{2}{C}_1 + \overset{2}{C}_2)x^2 \\ &\qquad + (\alpha_3 + \overset{2}{C}_1)x + 1 \\ &= x^6 + \overset{3}{C}_1 x^5 + (3 + \overset{3}{C}_2)x^4 + (2\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_3)x^3 + (3 + \overset{3}{C}_2)x^2 \\ &\qquad + \overset{3}{C}_1 x + 1, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} & x^8 + [4]_1 x^7 + [4]_2 x^6 + [4]_3 x^5 + [4]_4 x^4 + [4]_3 x^3 + [4]_2 x^2 \\ &\qquad + [4]_1 x + 1 \\ &= \{x^6 + \overset{3}{C}_1 x^5 + (3 + \overset{3}{C}_2)x^4 + (2\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_3)x^3 \\ &\qquad + (3 + \overset{3}{C}_2)x^2 + \overset{3}{C}_1 x + 1\}\,(x^2 + \alpha_4 x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^8 + (\alpha_4 + \overset{3}{C}_1)z^7 + (4 + \alpha_4\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_2)z^6 \\
&\quad + (3\alpha_4 + 3\overset{3}{C}_1 + \alpha_4\overset{3}{C}_2 + \overset{3}{C}_3)z^5 + (6 + 2\alpha_4\overset{3}{C}_1 + 2\overset{3}{C}_2 + \alpha_4\overset{3}{C}_3)z^4 \\
&\quad + (3\alpha_4 + 3\overset{3}{C}_1 + \alpha_4\overset{3}{C}_2 + \overset{3}{C}_3)z^3 + (4 + \alpha_4\overset{3}{C}_1 + \overset{3}{C}_2)z^2 \\
&\qquad\qquad + (\alpha_4 + \overset{3}{C}_1)z + 1 \\
&= z^8 + \overset{4}{C}_1 z^7 + (4 + \overset{4}{C}_2)z^6 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)z^5 \\
&\quad + (6 + 2\overset{4}{C}_2 + \overset{4}{C}_4)z^4 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)z^3 + (4 + \overset{4}{C}_2)z^2 \\
&\qquad\qquad + \overset{4}{C}_1 z + 1,
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
&z^{10} + [5]_1 z^9 + [5]_2 z^8 + \ldots\ldots + [5]_2 z^2 + [5]_1 z + 1 \\
&= \{z^8 + \overset{4}{C}_1 z^7 + (4 + \overset{4}{C}_2)z^6 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)z^5 \\
&\quad + (6 + 2\overset{4}{C}_2 + \overset{4}{C}_4)z^4 + (3\overset{4}{C}_1 + \overset{4}{C}_3)z^3 + (4 + \overset{4}{C}_2)z^2 \\
&\qquad\qquad + \overset{4}{C}_1 z + 1\} \\
&\times (z^2 + \alpha_5 z + 1) \\
&= z^{10} + \overset{5}{C}_1 z^9 + (5 + \overset{5}{C}_2)z^8 + (4\overset{5}{C}_1 + \overset{5}{C}_3)z^7 \\
&\quad + (10 + 3\overset{5}{C}_2 + \overset{5}{C}_4)z^6 + (6\overset{5}{C}_1 + 2\overset{5}{C}_3 + \overset{5}{C}_5)z^5 \\
&\quad + (10 + 3\overset{5}{C}_2 + \overset{5}{C}_4)z^4 + (4\overset{5}{C}_1 + \overset{5}{C}_3)z^3 + (5 + \overset{5}{C}_2)z^2 \\
&\qquad\qquad + \overset{5}{C}_1 z + 1;
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
&z^{12} + [6]_1 z^{11} + [6]_2 z^{10} + \ldots\ldots + [6]_2 z^2 + [6]_1 z + 1 \\
&= z^{12} + \overset{6}{C}_1 z^{11} + (6 + \overset{6}{C}_2)z^{10} + (5\overset{6}{C}_1 + \overset{6}{C}_3)z^9 \\
&\quad + (15 + 4\overset{6}{C}_2 + \overset{6}{C}_4)z^8 + (10\overset{6}{C}_1 + 3\overset{6}{C}_3 + \overset{6}{C}_5)z^7 \\
&\quad + (20 + 6\overset{6}{C}_2 + 2\overset{6}{C}_4 + \overset{6}{C}_6)z^6 + (10\overset{6}{C}_1 + 3\overset{6}{C}_3 + \overset{6}{C}_5)z^5 \\
&\quad + (15 + 4\overset{6}{C}_2 + \overset{6}{C}_4)z^4 + (5\overset{6}{C}_1 + \overset{6}{C}_3)z^3 + (6 + \overset{6}{C}_2)z^2 \\
&\qquad\qquad + \overset{6}{C}_1 z + 1,
\end{aligned}$$

erner

$$x^{14}+[7]_1x^{13}+[7]_2x^{12}+\ldots+[7]_2x^2+[7]_1x+1$$

$$=x^{14}+\overset{7}{C}_1x^{13}+(7+\overset{7}{C}_2)x^{12}+(6\overset{7}{C}_1+\overset{7}{C}_3)x^{11}$$

$$+(21+5\overset{7}{C}_2+\overset{7}{C}_4)x^{10}+(15\overset{7}{C}_1+4\overset{7}{C}_3+\overset{7}{C}_5)x^9$$

$$+(35+10\overset{7}{C}_2+3\overset{7}{C}_4+\overset{7}{C}_6)x^8+(20\overset{7}{C}_1+6\overset{7}{C}_3+2\overset{7}{C}_5+\overset{7}{C}_7)x^7+\ldots$$

ferner

$$x^{16}+[8]_1x^{15}+[8]_2x^{14}+\ldots[8]_2x^2+[8]_1x+1$$

$$=x^{16}+\overset{8}{C}_1x^{15}+(8+\overset{8}{C}_2)x^{14}+(7\overset{8}{C}_1+\overset{8}{C}_3)x^{13}$$

$$+(28+6\overset{8}{C}_2+\overset{8}{C}_4)x^{12}+(21\overset{8}{C}_1+5\overset{8}{C}_3+\overset{8}{C}_5)x^{11}$$

$$+(56+15\overset{8}{C}_2+4\overset{8}{C}_4+\overset{8}{C}_6)x^{10}+(35\overset{8}{C}_1+10\overset{8}{C}_3+3\overset{8}{C}_5+\overset{8}{C}_7)x^9$$

$$+(70+20\overset{8}{C}_2+6\overset{8}{C}_4+2\overset{8}{C}_6+\overset{8}{C}_8)x^8+\ldots$$

und endlich

$$x^{18}+[9]_1x^{17}+[9]_2x^{16}+\ldots\ldots+[9]_2x^2+[9]_1x+1$$

$$=x^{18}+\overset{9}{C}_1x^{17}+(9+\overset{9}{C}_1)x^{16}+(8\overset{9}{C}_1+\overset{9}{C}_3)x^{15}$$

$$+(36+7\overset{9}{C}_2+\overset{9}{C}_4)x^{14}+(28\overset{9}{C}_1+6\overset{9}{C}_3+\overset{9}{C}_5)x^{13}$$

$$+(84+21\overset{9}{C}_2+5\overset{9}{C}_4+\overset{9}{C}_6)x^{12}+(56\overset{9}{C}_1+15\overset{9}{C}_3+4\overset{9}{C}_5+\overset{9}{C}_7)x^{11}$$

$$+(126+35\overset{9}{C}_2+10\overset{9}{C}_4+3\overset{9}{C}_6+\overset{9}{C}_8)x^{10}$$

$$+(70\overset{9}{C}_1+20\overset{9}{C}_3+6\overset{9}{C}_5+2\overset{9}{C}_7+\overset{9}{C}_9)x^9+\ldots$$

Hiernach ergeben sich also durch Vergleichung der Coefficienten der gleichen Potenzen in den einzelnen Gleichungen die Relationen:

$$[1]_1=\overset{1}{C}_1,\ [2]_1=\overset{2}{C}_1,\ [3]_1=\overset{3}{C}_1,\ [4]_1=\overset{4}{C}_1,\ [5]_1=\overset{5}{C}_1 \text{ u. s. w.}$$

$$[2]_2=2+\overset{2}{C}_2,\ [3]_2=3+\overset{3}{C}_2,\ [4]_2=4+\overset{4}{C}_2,\ [5]_2=5+\overset{5}{C}_2, \text{ u. s. w.}$$

$$[3]_3=2\overset{3}{C}_1+\overset{3}{C}_3,\ [4]_3=3\overset{4}{C}_1+\overset{4}{C}_3,\ [5]_3=4\overset{5}{C}_1+\overset{5}{C}_3, \text{ u. s. w.}$$

$$[4]_4=6+2\overset{4}{C}_2+\overset{4}{C}_4=\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}+(4-2)\overset{4}{C}_2+\overset{4}{C}_4,$$

$$[5]_4=10+3\overset{5}{C}_2+\overset{5}{C}_4=\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}+(5-2)\overset{5}{C}_2+\overset{5}{C}_4,$$

$$[6]_4=15+4\overset{6}{C}_2+\overset{6}{C}_4=\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}+(6-2)\overset{6}{C}_2+\overset{6}{C}_4,$$

$$[7]_4=21+5\overset{7}{C}_2+\overset{7}{C}_4=\frac{7\,.\,6}{1\,.\,2}+(7-2)\overset{7}{C}_2+\overset{7}{C}_4,$$

. . . .

. . . .

$$[5]_5 = 6\overset{5}{C}_1 + 2\overset{5}{C}_3 + \overset{5}{C}_5 = \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\overset{5}{C}_1 + (5-3)\overset{5}{C}_3 + \overset{5}{C}_5,$$

$$[6]_5 = 10\overset{6}{C}_1 + 3\overset{6}{C}_3 + \overset{6}{C}_5 = \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\overset{6}{C}_1 + (6-3)\overset{6}{C}_3 + \overset{6}{C}_5,$$

$$[7]_5 = 15\overset{7}{C}_1 + 4\overset{7}{C}_3 + \overset{7}{C}_5 = \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}\overset{7}{C}_1 + (7-3)\overset{7}{C}_3 + \overset{7}{C}_5,$$

. . . .

. . . .

$$[6]_6 = 20 + 6\overset{6}{C}_2 + 2\overset{6}{C}_4 + \overset{6}{C}_6 = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\overset{6}{C}_2 + (6-4)\overset{6}{C}_4 + \overset{6}{C}_6,$$

$$[7]_6 = 35 + 10\overset{7}{C}_2 + 3\overset{7}{C}_4 + \overset{7}{C}_6 = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\overset{7}{C}_2 + (7-4)\overset{7}{C}_4 + \overset{7}{C}_6,$$

$$[8]_6 = 56 + 15\overset{8}{C}_2 + 4\overset{8}{C}_4 + \overset{8}{C}_6 = \frac{8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}\overset{8}{C}_2 + (8-4)\overset{8}{C}_4 + \overset{8}{C}_6,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$[7]_7 = 20\overset{7}{C}_1 + 6\overset{7}{C}_3 + 2\overset{7}{C}_5 + \overset{7}{C}_7 = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\overset{7}{C}_1 + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\overset{7}{C}_3 + (7-5)\overset{7}{C}_5 + \overset{7}{C}_7,$$

$$[8]_7 = 35\overset{8}{C}_1 + 10\overset{8}{C}_3 + 3\overset{8}{C}_5 + \overset{8}{C}_7 = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\overset{8}{C}_1 + \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\overset{8}{C}_3 + (8-5)\overset{8}{C}_5 + \overset{8}{C}_7,$$

$$[9]_7 = 56\overset{9}{C}_1 + 15\overset{9}{C}_3 + 4\overset{9}{C}_5 + \overset{9}{C}_7 = \frac{8\,.\,7\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}\overset{9}{C}_1 + \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}\overset{9}{C}_3 + (9-5)\overset{9}{C}_5 + \overset{9}{C}_7,$$

. . . .

. . . .

$$[8]_8 = 70 + 20\overset{8}{C}_2 + 6\overset{8}{C}_4 + 2\overset{8}{C}_6 + \overset{8}{C}_8 = \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}\overset{8}{C}_2 + \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\overset{8}{C}_4 + (8-6)\overset{8}{C}_6 + \overset{8}{C}_8,$$

$$[9]_8 = 126 + 35\overset{9}{C}_2 + 10\overset{9}{C}_4 + 3\overset{9}{C}_6 + \overset{9}{C}_8 = \frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\overset{9}{C}_2 + \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2}\overset{9}{C}_4 + (9-6)\overset{9}{C}_6 + \overset{9}{C}_8,$$

. . . .

. . . .

$$[9]_9 = 70\overset{9}{C}_1 + 20\overset{9}{C}_3 + 6\overset{9}{C}_5 + 2\overset{9}{C}_7 + \overset{9}{C}_9 = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\overset{9}{C}_1 + \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\overset{9}{C}_3 + \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}\overset{9}{C}_5 + (9-7)\overset{9}{C}_7 + \overset{9}{C}_9.$$

Aus dem Entwickelten lässt sich nun schliessen, dass allgemein sein werde:

$$[n]_1 = \overset{n}{C}_1,$$

$$[n]_2 = n + \overset{n}{C}_2,$$

$$[n]_3 = (n-1)\overset{n}{C}_1 + \overset{n}{C}_3,$$

$$[n]_4 = \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} + (n-2)\overset{n}{C}_2 + \overset{n}{C}_4,$$

$$[n]_5 = \frac{(n-1)\,(n-2)}{1 \,.\, 2}\overset{n}{C}_1 + (n-3)\overset{n}{C}_3 + \overset{n}{C}_5,$$

$$[n]_6 = \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1 \,.\, 2}\overset{n}{C}_2 + (n-4)\overset{n}{C}_4 + \overset{n}{C}_6,$$

$$[n]_7 = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\,(n-4)}{1 \,.\, 2}\overset{n}{C}_3 + (n-5)\overset{n}{C}_5 + \overset{n}{C}_7,$$

$$[n]_8 = \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-4)\,(n-5)}{1 \,.\, 2}\overset{n}{C}_4 + (n-6)\overset{n}{C}_6 + \overset{n}{C}_8,$$

$$[n]_9 = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\,(n-6)}{1 \,.\, 2}\overset{n}{C}_5 + (n-7)\overset{n}{C}_7 + \overset{n}{C}_9,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$[n]_{2m} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-(m-1))}{m!} + \frac{(n-2)\ (n-3)\ldots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-4)\ (n-5)\ldots\ldots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4$$

$$+\ldots\ldots+\frac{(n-(2m-2k)).(n-(2m-(2k-1)))\ldots\ldots(n-(2m-(k+1)))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k}+\ldots$$

$$+(n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2}+\overset{n}{C}_{2m},$$

$$[n]_{2m+1} = \frac{(n-1)\ (n-2)\ldots(n-m)}{m!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\ (n-4)\ldots(n-(m+1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\ (n-6)\ldots(n-(m+2))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_5$$

$$+\ldots+\frac{(n-(2m+1-k))\ (n-(2m+1-(k-1)))\ldots\ldots(n-(2m-k))}{k!}\overset{n}{C}_{2m+1-2p}+\ldots$$

$$+(n-(2m-1))\overset{n}{C}_{2m-1}+\overset{n}{C}_{2m+1},$$

wo $p! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)\,.\,p$ gesetzt ist.

Angenommen, dass dieses Bildungsgesetz der Coefficienten für alle Zahlen von 1 bis n gültig sei, so wollen wir zeigen, dass dasselbe auch für $n+1$ stattfinde. — Denkt man sich nun die Gleichung vom $2n$ten Grade in z mit $z^2+a_{n+1}z+1$ multiplicirt, so erhellet leicht, dass, mit Ausnahme des ersten und letzten, jeder Coefficient der neuen Gleichung gebildet wird aus drei auf einander folgenden Coefficienten der vorhergehenden Gleichung und zwar nach folgendem Gesetze:

$$[n+1]_h=[n]_{h-2}+a_{n+1}[n]_{h-1}+[n]_h \;\ldots\ldots\; (4)$$

Für den ersten und letzten Coefficienten hat man

$$[n+1]_1=a_{n+1}+[n]_1,$$

oder man kann sich auch allgemein der Gleichung (4) bedienen, wenn man nur $[n]_0=1$ und $[n]_{-1}=0$ setzt.

Mit steter Berücksichtigung der Gleichung (3) hat man also

$$[n+1]_1=a_{n+1}+\overset{n}{C}_1=\overset{n+1}{C}_1,$$

$$[n+1]_2=1+a_{n+1}[n]_1+[n]_2=1+a_{n+1}\overset{n}{C}_1+n+\overset{n}{C}_2$$

$$=n+1+a_{n+1}\overset{n}{C}_1+\overset{n}{C}_2=n+1+\overset{n+1}{C}_2,$$

$$[n+1]_3=[n]_1+a_{n+1}[n]_2+[n]_3=\overset{n}{C}_1+a_{n+1}n+a_{n+1}\overset{n}{C}_2$$

$$+(n-1)\overset{n}{C}_1+\overset{n}{C}_3=a_{n+1}n+n\overset{n}{C}_1+a_{n+1}\overset{n}{C}_2+\overset{n}{C}_3$$

$$=n(a_{n+1}+\overset{n}{C}_1)+a_{n+1}\overset{n}{C}_2+\overset{n}{C}_3=n\overset{n+1}{C}_1+\overset{n+1}{C}_3,$$

$$[n+1]_4=[n]_2+a_{n+1}[n]_3+[n]_4=n+\overset{n}{C}_2+a_{n+1}\overset{n}{C}_1$$

$$+(n-1)\overset{n}{C}_1+a_{n+1}\overset{n}{C}_3+\frac{n(n-1)}{1.2}+(n-2)\overset{n}{C}_2+\overset{n}{C}_4$$

$$=\frac{(n+1)n}{1.2}+(n-1)\overset{n+1}{C}_2+\overset{n+1}{C}_4.$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$[n+1]_{2m} = [n]_{2m-2} + \alpha_{n+1}[n]_{2m-1} + [n]_{2m} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\dots(n-(m-2))}{(m-1)!} + \frac{(n-2)\ (n-3)\dots\dots(n-(m-1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_2$$

$$+\frac{(n-4)\ (n-5)\dots\dots(n-m)}{(m-3)!}\overset{n}{C}_4 + \dots\dots + \frac{(n-(2m-2k))\ (n-(2m-2k+1))\dots\dots(n-(2m-k-2))}{(k-1)!}\overset{n}{C}_{2m-2k}$$

$$+\dots + (n-(2m-4))\overset{n}{C}_{2m-4} + \overset{n}{C}_{2m-2}$$

$$+\alpha_{n+1}\frac{(n-1)\ (n-2)\dots\dots(n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_1 + \alpha_{n+1}\,.\,\frac{(n-3)\ (n-4)\dots\dots(n-m)}{(m-2)!}\overset{n}{C}_3 + \dots$$

$$+\alpha_{n+1}\,.\,\frac{(n-(2m+1-2k))\ (n-(2m+2-2k))\dots\dots(n-(2m-k-1))}{(k-1)!}\,.\,\overset{n}{C}_{2m+1-2k} + \dots$$

$$+\alpha_{n+1}(n-(2m-3))\overset{n}{C}_{2m-3} + \alpha_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-1}$$

$$+\frac{n(n-1)\dots\dots(n-(m-1))}{m!} + \frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-4)\ (n-5)\dots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4 + \dots$$

$$+\frac{(n-(2m-2k)\ (n-(2m-2k+1))\dots\dots(n-(2m-k-1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k} + \dots(n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2} + \overset{n}{C}_{2m}$$

$$= \frac{(n+1)n\dots(n+1-(m-1))}{m!} + \alpha_{n+1}\frac{(n-1)\ (n-2)\dots(n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-2)\ (n-3)\dots(n-(m-1))}{(m-2)!}\left(1+\frac{n-m}{m-1}\right)\overset{n}{C}_2$$

$$+\alpha_{n+1}\frac{(n-3)\ (n-4)\dots(n-m)}{(m-2)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-4)\ (n-5)\dots\dots(n-m)}{(m-3)!}\left(1+\frac{n-(m+1)}{m-2}\right)\overset{n}{C}_4$$

$$+\alpha_{n+1}\frac{(n-5)\ (n-6)\dots(n-(m+1))}{(m-3)!}\overset{n}{C}_5 + \frac{(n-6)\ (n-7)\dots(n-(m+1))}{(m-4)!}\left(1+\frac{n-(m+2)}{m-3}\right)\overset{n}{C}_6 + \dots$$

. . . .

$$+\alpha_{n+1}\frac{(n-(2m-2k-1))\,(n-(2m-2k))\,..\,(n-(2m-k-2))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k-1}$$

$$+\frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\,....\,(n-(2m-k-2))}{(k-1)!}\left(1+\frac{n-(2m-k-1)}{k!}\right)\overset{n}{C}_{2m-2k}+\,..$$

$$+\alpha_{n+1}(n-(2m-3))\overset{n}{C}_{2m-3}+(1+n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2}+\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-1}+\overset{n}{C}_{2m}$$

$$=\frac{(n+1)n\,....\,(n+1-(m-1))}{m!}+\frac{(n-1)\,(n-2)\,......\,(n-(m-1))}{(m-1)!}(\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_1+\overset{n}{C}_2)$$

$$+\frac{(n-3)\,(n-4)\,...\,(n-m)}{(m-2)!}(\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_3+\overset{n}{C}_4)+\frac{(n-5)\,(n-6)\,....\,(n-(m+1))}{(m-3)!}(\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_5+\overset{n}{C}_6)+\,...$$

$$+\frac{(n-(2m-2k-1))\,(n-(2m-2k))\,.......\,(n-(2m-k-2))}{k!}(\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-2k-1}+\overset{n}{C}_{2m-2k})+\,..$$

$$+(n-(2m-3))\,(\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-3}+\overset{n}{C}_{2m-2})+\alpha_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-1}+\overset{n}{C}_{2m}$$

$$=\frac{(n+1)n\,...\,(n+1-(m-1))}{m!}+\frac{(n-1)\,(n-2)\,...\,(n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n+1}{C}_2+\frac{(n-3)\,(n-4)\,....\,(n-m)}{(m-2)!}\overset{n+1}{C}_4+\,...$$

$$+\frac{(n-(2m-2k-1))\,(n-(2m-2k))\,....\,(n-(2m-k-2))}{k!}\overset{n+1}{C}_{2m-2k}+\,...\,(n-(2m-3))\overset{n+1}{C}_{2m-2}+\overset{n+1}{C}_{2m}.$$

Desgleichen ist

$$
\begin{aligned}
[n+1]_{2m+1} &= [n]_{2m-1} + a_{n+1}[n]_{2m} + [n]_{2m+1} \\
&= \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n-(m-1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\,(n-4)\ldots(n-m)}{(m-2)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\,(n-6)\ldots(n-(m+1))}{(m-3)!}\overset{n}{C}_5 + \ldots \\
&+ \frac{(n-(2m-2k+1))\,(n-(2m-2k+2))\ldots\ldots(n-(2m-k-1))}{(k-1)!}\overset{n}{C}_{2m+1-2k} + \ldots + (n-(2m-3))\overset{n}{C}_{2m-3} + \overset{n}{C}_{2m-1} \\
&+ a_{n+1}\,.\,\frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!} + a_{n+1}\,.\,\frac{(n-2)\,(n-3)\ldots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + a_{n+1}\,.\,\frac{(n-4)\,(n-5)\ldots\ldots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4 + \ldots \\
&+ a_{n+1}\,.\,\frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\ldots(n-(2m-k-1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k} + \ldots + a_{n+1}(n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2} + a_{n+1}\overset{n}{C}_{2m} \\
&+ \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m)}{m!}\overset{n}{C}_1 + \frac{(n-3)\,(n-4)\ldots(n-(m+1))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_3 + \frac{(n-5)\,(n-6)\ldots\ldots(n-(m+2))}{(n-2)!}\overset{n}{C}_5 + \ldots \\
&+ \frac{(n-(2m-2k+1))\,(n-(2m-2k+2))\ldots(n-(2m-k))}{k!}\overset{n}{C}_{2m+1-2k} + \ldots + (n-(2m-1))\overset{n}{C}_{2m-1} + \overset{n}{C}_{2m+1} \\
&= a_{n+1}\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-(m-1))}{m!} + \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-(m-1))}{(m-1)!}\left(1+\frac{n-m}{m}\right)\overset{n}{C}_1 \\
&+ a_{n+1}\frac{(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots(n-m)}{(m-1)!}\overset{n}{C}_2 + \frac{(n-3)\,(n-4)\ldots(n-m)}{(m-2)!}\left(1+\frac{n-(m+1)}{m-1}\right)\overset{n}{C}_3 \\
&+ a_{n+1}\frac{(n-4)\,(n-5)\ldots(n-(m+1))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_4 + \frac{(n-5)\,(n-6)\ldots(n-(m+1))}{(m-3)!}\left(1+\frac{n-(m+2)}{m-2}\right)\overset{n}{C}_5 \\
&+ \quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .
\end{aligned}
$$

$$+ a_{n+1} \cdot \frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\ldots(n-(2m-k-1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m-2k}$$

$$+ \frac{(n-(2m-2k+1))\,(n-(2m-2k+2))\ldots\ldots(n-(2m-k-1))}{(k-1)!}\left(1+\frac{n-(2m-k)}{k}\right)\overset{n}{C}_{2m+1-2k}$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ a_{n+1}(n-(2m-2))\overset{n}{C}_{2m-2} + (1+n-(2m-1))\overset{n}{C}_{2m-1} + a_{n+1}\overset{n}{C}_{2m} + \overset{n}{C}_{2m+1}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!}\left(a_{n+1}+\overset{n}{C}_1\right) + \frac{(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots(n-m)}{(m-1)!}\left(a_{n+1}\overset{n}{C}_2+\overset{n}{C}_3\right)$$

$$+ \frac{(n-4)\,(n-5)\ldots(n-(m+1))}{(m-2)!}\left(a_{n+1}\overset{n}{C}_4+\overset{n}{C}_5\right) + \frac{(n-6)\,(n-7)\ldots\ldots(n-(m+2))}{(m-3)!}\left(a_{n+1}\overset{n}{C}_6+\overset{n}{C}_7\right)$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-2k+1))\ldots(n-(2m-k-1))}{k!}\left(a_{n+1}\overset{n}{C}_{2m-2k}+\overset{n}{C}_{2m+1-2k}\right)$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ (n + 1 - (2m - 1)) \, (\alpha_{n+1} \overset{n}{C}_{2m-2} + \overset{n}{C}_{2m-1}) + \alpha_{n+1} \overset{n}{C}_{2m} + \overset{n}{C}_{2m+1}$$

$$= \frac{n(n-1) \ldots . (n - (m-1))}{m!} \overset{n+1}{C}_1 + \frac{(n-2)\,(n-3) \ldots . (n-m)}{(m-1)!} \overset{n+1}{C}_3 + \frac{(n-4)\,(n-5) \ldots . (n-(m+1))}{(m-2)!} \overset{n+1}{C}_5$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ \frac{(n - (2m - 2k))\,(n - (2m - 2k + 1)) \ldots \ldots (n - (2m - k - 1))}{k!} \overset{n+1}{C}_{2m+1-2k} + \ldots .$$

$$+ (n + 1 - (2m - 1)) \overset{n+1}{C}_{2m-1} + \overset{n+1}{C}_{2m+1}.$$

Hieraus ersieht man nun, dass das oben angenommene Bildungsgesetz der Coefficienten auch für $n+1$ gültig ist; denn wenn man in den für $[n]_{2m}$ und $[n]_{2m+1}$ aufgestellten Ausdrücken $n+1$ statt n setzt, so gehen dieselben in die so eben für $[n+1]_{2m}$ und $[n+1]_{2m+1}$ entwickelten über.

Wir wenden uns jetzt zu dem andern Theile der Untersuchung

nämlich zur Bestimmung der verschiedenen $\overset{n}{C}$ aus den Coefficienten der Gleichung vom $2n$ten Grade; wollen aber fortan diese Coefficienten mit A_1, A_2, A_3, ... A_{n-2}, A_{n-1} und A_n bezeichnen. — Durch successive Elimination erhalten wir aus den oben aufgestellten Gleichungen:

$$\overset{n}{C}_1 = A_1,$$

$$\overset{n}{C}_2 = A_2 - n,$$

$$\overset{n}{C}_3 = A_3 - (n-1)A_1,$$

$$\overset{n}{C}_4 = A_4 - (n-2)C_2 - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} = A_4 - (n-2)A_2 + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2},$$

$$\overset{n}{C}_5 = A_5 - (n-3)C_3 - \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}C_1 = A_5 - (n-3)A_3 + \frac{(n-1)\,(n-4)}{1\,.\,2}A_1,$$

$$\overset{n}{C}_6 = A_6 - (n-4)A_4 + \frac{(n-2)\,(n-5)}{1\,.\,2}A_2 - \frac{n(n-4)\,(n-5)}{3!},$$

$$\overset{n}{C}_7 = A_7 - (n-5)A_5 + \frac{(n-3)\,(n-6)}{1\,.\,2}A_3 - \frac{(n-1)\,(n-5)\,(n-6)}{3!}A_1,$$

$$\overset{n}{C}_8 = A_8 - (n-6)A_6 + \frac{(n-4)\,(n-7)}{1\,.\,2}A_4 - \frac{(n-2)\,(n-6)\,(n-7)}{3!}A_2 + \frac{n(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{4!},$$

$$\overset{n}{C}_9 = A_9 - (n-7)A_7 + \frac{(n-5)\,(n-8)}{2!}A_5 - \frac{(n-3)\,(n-7)\,(n-8)}{3!}A_3 + \frac{(n-1)\,(n-6)\,(n-7)\,(n-8)}{4!}A_1,$$

$$\overset{n}{C}_{10} = A_{10} - (n-8)A_8 + \frac{(n-6)\,(n-9)}{2!}A_6 - \frac{(n-4)\,(n-8)\,(n-9)}{3!}A_4 + \frac{(n-2)\,(n-7)\,(n-8)\,(n-9)}{4!}A_2 - \frac{n(n-6)\,(n-7)\,(n-8)\,(n-9)}{5!}.$$

Das Gesetz, nach welchem man die auf einander folgenden $\overset{n}{C}$ aus den Coefficienten A zu bilden hat, liegt deutlich zu Tage, und man schliesst hieraus, dass allgemein sein werde:

$$\overset{n}{C}_{2m} = A_{2m} - (n-(2m-2))A_{2m-2} + \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-1))}{2!}A_{2m-4}$$
$$- \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{3!}A_{2m-6} + \frac{(n-(2m-8))\,(n-(2m-3))\,(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{4!}A_{2m-8}$$
$$+ \ldots + (-1)^k \frac{(n-(2m-2k))\,(n-(2m-k+1))\,(n-(2m-k+2))\ldots(n-(2m-1))}{k!}A_{2m-2k} + \ldots$$

und

$$\overset{n}{C}_{2m+1} = A_{2m+1} - (n-(2m-1))A_{2m-1} + \frac{(n-(2m-3))\,(n-2m)}{2!}A_{2m-3} - \frac{(n-(2m-5))\,(n-2m+1)\,(n-2m)}{3!}A_{2m-5} + \ldots$$
$$+ (-1)^k \frac{(n-(2m+1-2k))\,(n-(2m-k+2))\,(n-(2m-k+3))\ldots(n-2m+1)\,(n-2m)}{k!}A_{2m+1-2k} + \ldots$$

Wir wollen nun wieder zeigen, dass, wenn diese Relationen für alle $\overset{n}{C}$ von $\overset{n}{C}_1$ bis $\overset{n}{C}_{2m}$ und $\overset{n}{C}_{2m+1}$ gelten, sie auch für C_{2m+2} und C_{2m+3} gültig sind.

Es ist aber nach dem Obigen

$$\begin{aligned}\overset{n}{C}_{2m+2} = A_{2m+2} - (n-2m)\overset{n}{C}_{2m} - \frac{(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{2!}\overset{n}{C}_{2m-2} - \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-3))\,(n-(2m-2))}{3!}\overset{n}{C}_{2m-4} \\ - \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-5))\,(n-(2m-4))\,(n-(2m-3))}{4!}\overset{n}{C}_{2m-6} - \ldots\ldots \\ - \frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+1-2k))\,(n-(2m-2k))\ldots\ldots(n-(2m-k+1))}{k!}\overset{n}{C}_{2m+2-2k} + \ldots \\ - \frac{(n-6)\,(n-7)\ldots\ldots(n-(m+3))}{(m-2)!}\overset{n}{C}_6 - \frac{(n-4)\,(n-5)\ldots\ldots(n-(m+2))}{(m-1)!}\overset{n}{C}_4 \\ - \frac{(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots(n-(m+1))}{m!}\overset{n}{C}_2 - \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{(m+1)!}.\end{aligned}$$

Substituirt man hierin für die verschiedenen $\overset{n}{C}$ ihre Werthe, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\overset{n}{C}_{2m+2} = A_{2m+2} - (n-2m)\,\Big[& A_{2m} - (n-(2m-2))A_{2m-2} + \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-1))}{2!}A_{2m-4} \\
& - \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{3!}A_{2m-6} + \ldots\ldots \\
& + (-1)^{k-1}\frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+2-k))\,(n-(2m+3-k))\ldots(n-(2m-1))}{(k-1)!}A_{2m+2-2k} \\
& + \ldots\ldots - \Big] \\
- \frac{(n-(2m-2))\,(n-(2m-1))}{2!}\Big[& A_{2m-2} - (n-(2m-4))A_{2m-4} + \frac{(n-(2m-6))\,(n-(2m-3))}{2!}A_{2m-6} + \ldots \\
& + (-1)^{k-2}\frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+2-(k+1)))\,(n-(2m+2-k))\ldots(n-(2m-3))}{(k-2)!}A_{2m+2-2k} \\
& + \ldots \Big] \\
- \frac{(n-(2m-4))\,(n-(2m-3))\,(n-(2m-2))}{3!}\Big[& A_{2m-4} - (n-(2m-6))A_{2m-6} + \frac{(n-(2m-8))\,(n-(2m-5))}{2!}A_{2m-8} + \ldots \\
& + (-1)^{k-3}\frac{(n-(2m+2-2k))\,(n-(2m+2-(k+2)))\,(n-(2m+2-(k+1)))\ldots(n-(2m-5))}{(k-3)!}A_{2m+2-2k} \\
& + \ldots \Big]
\end{aligned}$$

u. s. w.

Setzt man nun der Kürze wegen $n-2(m+1)=p$, so erhält man für das allgemeine Glied in $\overset{n}{C}_{2m+2}$ den Ausdruck:

$$(-1)^k A_{2(m+1)-2k}(p+2k)\Big[\frac{(p+k)(p+k-1)\ldots.(p+3)}{(k-1)!}\cdot\frac{p+2}{1}-\frac{(p+k+1)(p+k)\ldots.(p+5)}{(k-2)!}\cdot\frac{(p+4)(p+3)}{2!}$$

$$+\frac{(p+k+2)(p+k+1)\ldots.(p+7)}{(k-3)!}\cdot\frac{(p+6)(p+5)(p+4)}{3!}+\ldots.$$

$$+(-1)^{k-4}\frac{(p+2k-4)(p+2k-5)}{3!}\cdot\frac{(p+2k-6)(p+2k-7)\ldots\ldots(p+k-2)}{(k-3)!}$$

$$+(-1)^{k-3}\frac{(p+2k-3)}{2!}\cdot\frac{(p+2k-4)(p+2k-5)\ldots\ldots.(p+k-1)}{(k-2)!}$$

$$+(-1)^{k-2}\frac{(p+2k-2)(p+2k-3)\ldots\ldots\ldots(p+k)}{(k-1)!}$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{(p+2k-1)(p+2k-2)\ldots\ldots..(p+k+1)}{k!}\Big].$$

Zieht man die beiden letzten Glieder in der Klammer zusammen, so erhält man für deren Summe den Ausdruck

$$(-1)^{k-2}\frac{(p+2k-2)\,(p+2k-3)\ldots(p+k+2)\,(p+k+1)}{(k-2)!}\cdot\frac{p+k-1}{k};$$

fügt man dazu den drittletzten, so wird die Summe

$$(-1)^{k-3}\frac{(p+2k-3)\,(p+2k-4)\ldots\ldots(p+k+2)\,(p+k+1)}{(k-2)!}$$

$$\times\,(p+k-1)\left(\frac{p+k}{2}-\frac{p+2k-2}{k}\right)$$

$$=(-1)^{k-3}\frac{(p+2k-3)\,(p+2k-4)\ldots(p+k+2)\,(p+k+1)}{2!\,(k-2)!}$$

$$\times\frac{(p+k-1)\,(p+k-2)}{k};$$

hierzu das vierte Glied addirt, giebt:

$$(-1)^{k-4}\frac{(p+2k-4)\,(p+2k-5)\ldots\ldots(p+k+1)}{2!\,(k-3)!}$$

$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\left(\frac{p+k}{3}-\frac{p+2k-3}{k}\right)$$

$$=(-1)^{k-4}\frac{(p+2k-4)\,(p+2k-5)\ldots(p+k+1)}{3!\,(k-3)!}$$

$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(p+k-3);$$

und mit Hinzunahme des fünften Gliedes bekommt man

$$(-1)^{k-5}\frac{(p+2k-5)\,(p+2k-6)\ldots\ldots(p+k+1)}{3!\,(k-4)!}$$

$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(p+k-3)\left(\frac{p+k}{3}-\frac{p+2k-4}{k}\right)$$

$$=(-1)^{k-5}\frac{(p+2k-5)\,(p+2k-6)\ldots(p+k+1)}{4!\,(k-5)!}$$

$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\,(p+k-3)\,(p+k-4).$$

Man schliesst aus diesen Ergebnissen, dass man für die Summe der g letzten Glieder den Ausdruck

$$(-1)^{k-g}\frac{(p+2k-g)\,(p+2k-(g+1))\ldots\ldots(p+k+1)}{(g-1)!\,(k-g)!}$$

$$\times(p+k-1)\,(p+k-2)\ldots\ldots(p+k-(g-1))$$

erhalten werde. Nimmt man hiezu das vorhergehende, das $(g+1)$te Glied vom Ende, nämlich das Glied



$$(-1)^{k-(g+1)} \frac{(p+2k-(g+1))\,(p+2k-(g+2))\ldots(p+k-(g-2))\,(p+k-(g-1))}{g!\,(k-g)!},$$

so ergiebt sich für die Summe der $g+1$ letzten Glieder

$$(-1)^{k-(g+1)} \frac{(p+2k-(g+1))\,(p+2k-(g+2))\ldots\ldots(p+k+1)}{(g-1)!\,(k-g)!}$$

$$\times (p+k-1)\,(p+k-2)\ldots(p+k-(g-1))\,\left(\frac{p+k}{g}-\frac{p+2k-g}{k}\right)$$

$$=(-1)^{k-(g+1)} \frac{(p+2k-(g+1))\,(p+2k-(g+2))\ldots(p+k+1)}{g!\,(k-(g+1))!}$$

$$\times p+k-1)\,(p+k-2)\ldots\ldots(p+k-g)$$

und dieser Ausdruck geht aus dem vorhergehenden hervor, wenn

man darin $g+1$ statt g setzt. Der fragliche Ausdruck gilt also auch für $g+1$, wenn er für g gilt; nun gilt aber derselbe für 1, 2, 3, 4, 5, also auch für 6, und daher nach einer bekannten Schlussfolge allgemein.

Das zweite Glied vom Anfange ist offenbar das $(k-1)$te vom Ende, und wenn man also $g=k-1$ setzt, so erhält man für die Summe aller Glieder, mit Ausschluss des ersten, den Werth

$$(-1)^1 \frac{p+k+1}{(k-2)!} \cdot \frac{(p+k-1)(p+k-2)\ldots(p+3)(p+2)}{k}.$$

Nimmt man dazu das erste Glied, so ergiebt sich für die Gesammtsumme der Glieder in der Klammer der Ausdruck

$$\frac{(p+k-1)(p+k-2)\ldots\ldots(p+2)}{(k-2)!}\left(\frac{p+k}{k-1}-\frac{p+k+1}{k}\right)$$

$$=\frac{(p+k-1)(p+k-2)\ldots(p+2)(p+1)}{k!},$$

und hiernach, wenn man wieder für p seinen Werth $p=n-2(m+1)$ setzt, für das allgemeine Glied in $\overset{n}{C}_{2m+2}$ der Werth

$$(-1)^k A_{2m+2-2k} \frac{(n-(2m+2-2k)).(n-(2m+2-(k-1)))(n-(2m+2-(k-2)))\ldots(n-(2m+2-1))}{k!}.$$

Dieser Ausdruck ist aber in $m+1$ eben so gebildet, wie das allgemeine Glied des Ausdruckes für $\overset{n}{C}_{2m}$ in m gebildet ist, und somit ist also das für $\overset{n}{C}_{2m}$ als gültig angenommene Bildungsgesetz auch für $\overset{n}{C}_{2m+2}$ nachgewiesen. Ganz ebenso zeigt sich, dass das für $\overset{n}{C}_{2m+1}$ angenommene Gesetz auch für $\overset{n}{C}_{2m+3}$ gilt. Wir bemerken noch,

dass man die Ausdrücke für $\overset{n}{C}_{2m}$ und $\overset{n}{C}_{2m+1}$ in folgenden zusammenfassen kann:

$$\overset{n}{C}_m = A_m - (n-(m-2))A_{m-2} + (n-(m-4))\frac{(n-(m-1))}{2!}A_{m-4}$$

$$-(n-(m-6)).\frac{(n-(m-1))\,(n-(m-2))}{3!}A_{m-6} + \ldots$$

$$+(-1)^k(n-(m-2k))$$

$$\times\frac{(n-(m-1))\,(n-(m-2))\ldots.(n-(m-(k-1)))}{k!}A_{m-2k} + \ldots,$$

wobei man nur zu beachten hat, dass $A_0 = 1$ und jedes A mit negativem Index $= 0$ zu setzen ist.

Setzt man hierin nach einander $m = 1, 2, 3 \ldots 9$, so erhält man die von Euler gegebenen, im Archiv. B. II. S. 224 mitgetheilten, Werthe der Coefficienten der neun ersten Glieder der Gleichung für die Hülfsgrösse u.

Nach der Theorie der Gleichungen hat man nun zur Bestimmung der Hülfsgrösse u die Gleichung:

$$u^n - \overset{n}{C}_1 u^{n-1} + \overset{n}{C}_2 u^{n-2} - \overset{n}{C}_3 u^{n-3} + \ldots + (-1)^k \overset{n}{C}_k u^{n-k} \pm \ldots\ldots$$

$$\ldots. + (-1)^{n-1}\overset{n}{C}_{n-1}u + (-1)^n \overset{n}{C}_n = 0.$$

XXXVI.

Ueber die Entwickelung von $e = \lim\,(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Von

Herrn T. Wittstein

Lehrer am Lyceum zu Hannover.

In dem ersten Theile (2. Heft S. 204. ff.) dieses Archivs ist von dem Herrn Professor Grunert einer Einwendung Erwähnung geschehen, welche Liouville gegen den von Cauchy gegebenen Beweis des Satzes, dass

$$\lim\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

sei, während x gegen 0 convergirt, gemacht hat. Es wird dort dieselbe Einwendung auf den von Moigno gegebenen Beweis desselben Satzes ausgedehnt; indessen so sehr wir auch bereit sind, die von dem Herrn Herausgeber des Archivs bei dieser Gelegenheit gemachte Bemerkung: „Auf jeden Fall müsste doch bewiesen werden, dass $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ sich wirklich einer bestimmten Grenze nähert, wenn x sich der Null nähert, ... auch fürs Erste ganz abgesehen von der Grösse dieses Werths," aus voller Ueberzeugung zu unterschreiben, so scheint es uns dennoch, es lasse sich die von Moigno gegebene Darstellung — dagegen nicht die von Cauchy in seinen Leçons vorgetragene — noch in einer Weise auffassen, in welcher sie von allem Tadel freizusprechen ist. Wir wollen versuchen unsere Meinung hier aus einander zu setzen.

Moigno beweist nämlich, nach unserem Dafürhalten, auf S. 3 bis 5 seiner Leçons nichts weiter, als dass der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für $x=0$ sich einer bestimmten Grenze nähert, welche zwischen den ganzen Zahlen 2 und 3 liegt. Der Gang dieses Beweises, den wir hier etwas ausführlicher darstellen wollen, ist folgender.

Es sei $\frac{1}{x}=m$, und m zunächst eine positive ganze Zahl, so hat man nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{m})^m=1+\frac{1}{1}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{1}{m^2}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\,\frac{1}{m^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\ldots\frac{m-(m-1)}{m}\,\frac{1}{m^m},$$

oder indem man die Divisionen ausführt

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m})+\frac{1}{1.2.3}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots m}(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{m-1}{m})\ldots (1)$$

Wenn x sehr klein oder m sehr gross wird, so sind alle Glieder dieser Reihe positiv, folglich hat man für $x=0$, indem nur die beiden ersten Glieder der Reihe beibehalten werden,

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}}>2.$$

Vergleicht man aber jene Reihe (1) mit der folgenden

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\frac{1}{2^m}\ldots (2)$$

so findet sich für sehr kleine Werthe von x oder sehr grosse Werthe von m, dass die successiven Glieder von (1), von dem dritten Gliede beginnend, sämmtlich kleiner sind als die correspondirenden Glieder der Reihe (2); die letztere aber liefert für $m=\infty$ die Summe 3, folglich hat man

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}}<3.$$



Ist m eine gebrochene oder negative Zahl, so wird der Beweis auf bekannte Weise auf den vorigen zurückgeführt, was hier, als unwesentlich für den gegenwärtigen Zweck, übergangen werden mag.

Hiemit ist also dargethan, dass der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für $x=0$ sich wirklich einer bestimmten Grenze nähert, welche zwischen den ganzen Zahlen 2 und 3 liegt, und zu deren angenäherter Berechnung man nun sofort den Ausdruck selbst gebrauchen kann. Diese Grenze wird mit e bezeichnet, und es ist wichtig zu bemerken, dass hienach e durch die Gleichung

$$e=\lim\,(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

für $x=0$, oder durch die Gleichung

$$e=\lim\,\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}(1-\frac{1}{m})+\ldots\frac{1}{1.2\ldots m}(1-\frac{1}{m})\ldots(1-\frac{m-1}{m})\}$$

für $m=\infty$, definirt wird.

Um nun aber e durch eine von dem Zeichen „lim" freie Formel darzustellen, bedarf es noch eines Schrittes, der sich in der That in dem Werke von Moigno gar nicht findet; eine solche Formel ist aber auch unwesentlich und mindestens zur Entwickelung der Lehren der Differentialrechnung, wie sich bei Moigno zeigt, unnöthig. Verlangt man sie indessen dennoch, so lässt sie sich leicht aus den Leçons von Moigno herauslesen. Es wird dort nämlich durch den Taylorschen Lehrsatz die Entwickelung von e^x gegeben; es wird bewiesen, dass dieselbe für alle Werthe von x convergent bleibt; setzt man also in ihr $x=1$, so hat man die gewünschte Formel.

XXXVII.

Ueber den Satz vom Parallelogramme der Kräfte.

Von

Herrn Doctor Dippe

Oberlehrer am Gymn. Frider. zu Schwerin.

In dem Beweise, welchen Poisson (Traité de Mécan. I. p. 43—51) von dem Parallelogramme der Kräfte giebt, kommt die Behauptung vor, dass

$$\varphi(x) = 2\cos\, ax$$

die einzige Function sei, welche der Bedingung

$$\varphi(x)\ \varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z)$$

Genüge leiste. Da jedoch

$$2\cos\, ax = e^{ax\sqrt{-1}} + e^{-ax\sqrt{-1}}$$

ist, so liegt der Schluss nahe, dass auch die reelle Function

$$\varphi(x) = e^{ax} + e^{-ax}$$

jene Gleichung befriedigen müsse, was in der That der Fall ist.

Dieser Umstand macht eine Abänderung des von Poisson geführten Beweises nöthig. Vielleicht findet der folgende Versuch Beistimmung.

§. 1.

Von den Kräften, die in einer Ebene auf einen Punkt wirken, wird Folgendes angenommen:

1) Wenn auf einen Punkt zwei gleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, so ist ihre Resultirende Null.

2) Wenn zwei Kräfte P, Q nach derselben Richtung wirken, so ist ihre Resultirende $P+Q$, und wirkt nach derselben Richtung.

3) Wenn zwei Kräfte P, Q nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und $P > Q$ ist, so ist ihre Resultirende $P-Q$, und wirkt nach der Richtung von P.

4) Wenn zwei gleiche Kräfte P, P beliebig gerichtet sind, so ist ihre Resultirende nicht grösser als $P+P$, und nicht kleiner als $P-P$.

5) Wenn die Richtungen von zwei gleichen Kräften mit einander einen Winkel $2x < 180°$ bilden, so halbirt die Richtung der Resultirenden diesen Winkel.

6) Wenn die Richtungen von drei gleichen Kräften Winkel von 120° mit einander bilden, so ist die Resultirende Null; auch ist jede Kraft der Resultirenden der beiden andern gleich, hat aber die entgegengesetzte Richtung.

§. 2.

Wenn zwei gleiche Kräfte einen Winkel von 120° mit einander bilden, so stellt die Diagonale ihres Parallelogrammes die Resultirende nach Grösse und Richtung dar.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus §. 1. Nr. 6.

§. 3.

Wenn zwei gleiche Kräfte P, P einen beliebigen Winkel $2x < 180°$ bilden, so stellt die Diagonale ihres Parallelogrammes die Resultirende nach Grösse und Richtung dar.

Beweis. Die Richtung der Resultirenden R bildet mit der Richtung jeder Kraft P den Winkel x (§. 1. Nr. 5.), und ihre Intensität kann nur abhängig sein von P und x; folglich ist

$$R = F(P, x).$$

Aendert man die Einheit, welche den Grössen P, R zu Grunde liegt, und sind die neuen Werthe derselben Kräfte P_1, R_1, so muss

$$P : P_1 = R : R_1$$

und zugleich

$$R_1 = F(P_1, x)$$

sein, woraus sich ergiebt

$$P : P_1 = F(P, x) : F(P_1, x)$$

für jeden Werth von x. Diess fordert, dass $F(P, x) = P \,.\, f(x)$ sei, oder wenn man $f(x) = 2\varphi(x)$ setzt,

$$R = 2P \,.\, \varphi(x).$$

Denkt man sich nun jedes P als Resultirende von zwei gleichen Kräften Q, Q, deren Richtungen mit der Richtung von P den Winkel z bilden, so dass $P = 2Q\varphi(z)$, mithin

$$R = 4Q\varphi(x)\ \varphi(z)$$

wird: dann kann man die vier Kräfte Q paarweise zusammen nehmen. In dem äussern Paare bildet jede Kraft mit der Richtung von R den Winkel $x + z$, und seine Resultirende ist

$$R_1 = 2Q\varphi(x + z).$$

In dem innern Paare bildet jede Kraft mit der Richtung von R den Winkel $x - z$, und seine Resultirende ist

$$R_2 = 2Q\varphi(x - z).$$

Endlich ist die Resultirende der vier Kräfte Q der Resultirenden der zwei Kräfte P gleich, also $R = R_1 + R_2$, mithin

$$4Q\varphi(x)\ \varphi(z) = 2Q\varphi(x + z) + 2Q\varphi(x - z).$$

Daher muss $\varphi(x)$ für jeden Werth $x < 90°$ die folgende Gleichung befriedigen:

$$(1) \ldots 2\varphi(x)\ \varphi(z) = \varphi(x + z) + \varphi(x - z).$$

Nun kann R nicht grösser sein als $P + P = 2P$, und nicht kleiner als $P - P = 0$, und zugleich ist

$$R = 2P\varphi(x),$$

folglich muss $\varphi(x)$ immer zwischen Null und Eins liegen. Daher

giebt es für x einen zwischen Null und 90° liegenden Winkel w, dessen Cosinus dem $\varphi(x)$ gleich ist, also

$$\varphi(x) = \cos\, w.$$

Nun giebt die Gleichung (1) für $z = 0$

$$2\varphi(x)\ \varphi(0) = 2\varphi(x), \text{ also } \varphi(0) = 1 = \cos\, 0.$$

Mithin ist $w = x$ für $x = 0$.

Ferner ist für $2x = 120°$ nach §. 3.

$$R = P, \text{ und auch } R = 2P\ \varphi(60°),$$

folglich $\varphi(60°) = \frac{1}{2} = \cos\, 60°$, also $w = x$ auch für $x = 60°$.

Setzt man ferner $x + z = \alpha$, $x - z = 0$, so giebt die Gleichung (1)

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2}$$

und

$$(2) \ldots \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\varphi(0) + \varphi(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \varphi(\alpha)}{2}},$$

wo nur das positive Vorzeichen zu nehmen ist, weil $\varphi(x)$ immer positiv ist. Wenn nun $\varphi(\alpha) = \cos\, \alpha$ ist, so ist auch nach (2)

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\, \frac{\alpha}{2},$$

und

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \cos\, \frac{\alpha}{4},$$

wie auch

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\, \frac{\alpha}{2^n}.$$

Aus Gleichung (1) erhält man $\varphi(x + z) = 2\varphi(x)\ \varphi(z) - \varphi(x - z)$; wäre daher für die drei Werthe x, z, $x - z$

$$\varphi(x) = \cos\, x,\ \varphi(z) = \cos\, z,\ \varphi(x - z) = \cos\, (x - z);$$

so würde auch $\varphi(x + z) = 2\cos\, x\, \cos\, z - \cos\, (x - z) = \cos\, (x + z)$ sein. Man setze nun $\frac{\alpha}{2^n} = \beta$, mithin $\frac{\alpha}{2^{n-1}} = 2\beta$, und

$$x = 2\beta,\ z = \beta,\ x - z = \beta, \text{ also } x + z = 3\beta,$$

ferner

$$x = 3\beta,\ z = \beta,\ x - z = 2\beta, \text{ also } x + z = 4\beta,$$

so wie

$$x = 4\beta,\ z = \beta,\ x - z = 3\beta, \text{ also } x + z = 5\beta,$$

und allgemein

$x = (m-1)\beta,\ z = \beta,\ x - z = (m-2)\beta,$ also $x + z = m\beta.$

Dann schliesst man, dass $\varphi(m\beta) = \cos m\beta$, oder

$$\varphi(\frac{m}{2^n}\alpha) = \cos(\frac{m}{2^n}\alpha)$$

ist, sobald $\varphi(\beta) = \cos\beta$, $\varphi(2\beta) = \cos 2\beta$ ist. Da letzteres gilt, sobald für einen einzigen Werth $\varphi(\alpha) = \cos\alpha$ ist, und da bewiesen ist, dass

$$\varphi(60^\circ) = \cos 60^\circ$$

ist, so gilt allgemein

$$\varphi(\frac{m}{2^n}60^\circ) = \cos(\frac{m}{2^n}60^\circ).$$

Der Ausdruck $\frac{m}{2^n}60^\circ$ kann jedem beliebigen Winkel x gleich werden, folglich ist $\varphi(x) = \cos x$, und

$$R = 2P\cos x.$$

Aber $2P\cos x$ ist Diagonale in dem Parallelogramme, dessen Seiten P, P den Winkel $2x$ einschliessen, mithin der Satz erwiesen.

§. 4.

Wenn zwei beliebige Kräfte einen beliebigen Winkel einschliessen, so stellt die Diagonale ihres Parallelogrammes die Resultirende nach Grösse und Richtung dar.

Der Beweis ganz wie bei Poisson, indem erst ein rechter Winkel angenommen wird, dann ein beliebiger. Der erste Fall wird auf §. 3., der zweite Fall auf den ersten zurückführt.

XXXVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

---

1. In einen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht und einer gegebenen geraden Linie gleich ist.

2. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt geht und einer gegebenen ge-

raden Linie gleich ist, und von welchem eine andere Seite einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel ist.

3. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, dessen Spitzen auf drei gegebenen concentrischen Kreislinien liegen.

4. Eine gerade Linie *AB* von bestimmter Länge sei in dem Punkte *C* auf beliebige Weise in zwei Theile *AC* und *BC* getheilt, und durch den Punkt *B* sei auf *AB* ein Perpendikel von unbestimmter Länge errichtet. Man soll in diesem Perpendikel einen Punkt *D* so bestimmen, dass, wenn man die Linie *AD* zieht, diese Linie der Summe der beiden Linien *BC* und *BD* gleich ist.

5. Wenn in einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck *ABC* beschrieben ist, und von der Spitze *A* aus eine beliebige die Seite *BC* in *D*, die Kreislinie zum zweiten Male in *E* schneidende gerade Linie *AE* gezogen ist, so ist immer die Summe der Linien *BE* und *CE* der Linie *AE* gleich.

6. In der Ebene eines Vierecks *ABCD* einen Punkt *O* von solcher Lage anzugeben, dass die vier Produkte *OA . BC . CD*, *OB . AD . CD*, *OC . AB . AD*, *OD . AB . BC* einander gleich sind.

7. Die Seite des in einen Kreis, dessen Halbmesser als Einheit angenommen wird, beschriebenen regulären Zehnecks in einen Kettenbruch entwickelt darzustellen.

8. Wenn in einer Ebene zwei Linien *AB* und *CD* der Lage und Grösse nach gegeben sind, und eine Linie *MN* der Lage nach gegeben ist: in dieser Ebene einen Punkt *O* so zu bestimmen, dass, wenn man die Linien *AO*, *BO* und *CO*, *DO* zieht, welche die Linie *MN* in den Punkten *A'*, *B'* und *C'*, *D'* schneiden, die Linien *A'B'* und *C'D'* auf der Linie *MN* in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

9. Wenn *AB*, *A'B'*, *A''B''* drei einander parallele gerade Linien in derselben Ebene sind, so liegen der Durchschnittspunkt der Linien *AA'* und *BB'*, der Durchschnittspunkt der Linien *AA''* und *BB''*, der Durchschnittspunkt der Linien *A'A''* und *B'B''* jederzeit in derselben geraden Linie.

10. Eine gerade Linie schneide die Seiten *AB*, *AC* eines Dreiecks *ABC* in *D*, *E*, die Verlängerung der dritten Seite *BC* über *C* hinaus in *F*. Man soll eine Formel entwickeln, mittelst welcher aus den drei gegebenen Seiten *AB*, *AC*, *BC* des Dreiecks *ABC*, aus den Linien *CE* und *CF* die Linie *BD* berechnet werden kann.

11. Durch gerade Linien, welche den vier Seiten eines gegebenen Vierecks *ABCD* parallel und von denselben sämmtlich gleich

weit entfernt sind, soll man ein innerhalb des gegebenen Vierecks $ABCD$ liegendes Viereck $A'B'C'D'$ bestimmen, dessen Flächeninhalt zu dem Flächeninhalte des gegebenen Vierecks in einem gegebenen Verhältnisse steht.

12. Wenn man aus einem Punkte A in dem Umfange eines Kreises als Mittelpunkt eine zweit den Umfang des ersten Keises in den Punkten B, C schneidende Kreislinie beschreibt, und dann einen beliebigen Durchmesser dieser letzteren Kreislinie zieht, welcher die gemeinschaftliche Sehne BC beider Kreise in D, die zweite Kreislinie in E, die erste Kreislinie in F schneidet, so ist immmer $AD : AE = AE : AF$.

13. Eine abgestumpfte Pyramide mit zwei einander parallelen Grundflächen durch eine diesen beiden Grundflächen parallele Ebene so zu theilen, dass die beiden Theile in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

XXXIX.

Miscellen.

In Nr. 442. der astronomischen Nachrichten hat Herr Th. Clausen das Integral

$$\int \frac{y\,dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}},$$

zu welchem Legendre in dem Traité des fonctions elliptiques. Chap. XXVI. Nr. 136. auf einem ziemlich weitläufigen Wege gelangt, auf folgende einfache Weise entwickelt.

Setzt man

$$x = \frac{y-1}{\sqrt{y^3-1}}, \quad x' = \sqrt{y^3-1}, \quad x'' = \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^3-1}};$$

so wird

$$dx = -\frac{y^3-3y^2+2}{2(y^3-1)^{\frac{3}{2}}}\,dy,$$

$$dx' = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{y^2dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$dz'' = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{y^4 + 2y^3 - 3y^2 - 4y + 4}{(y^3 - 1)^{\frac{3}{2}}}\, dy;$$

und

$$\frac{dz}{1 - 3z^2} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{y^2 - 2y - 2}{y^2 - 2y + 4} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}},$$

$$\frac{dz'}{z'^2 + 9} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{y^3 + 8} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}},$$

$$\frac{dz''}{z''^2 + 9} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{y - 1}{y + 2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}}.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so findet man:

$$\frac{dz}{1 - 3z^2} + \frac{dz'}{z''^2 + 9} + \frac{dz}{z''^2 + 9} = \frac{6y dy}{(y^3 + 8)\sqrt{y^3 - 1}};$$

folglich ist:

$$\int \frac{y dy}{(y^3 + 8)\sqrt{y^3 - 1}}$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}} \ \text{logn} \ \frac{1 + z\sqrt{3}}{1 - z\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \ \text{Arctang} \ \frac{1}{3} z' + \frac{1}{18} \ \text{Arctang} \ \frac{1}{3} z'',$$

oder, wenn man für z, z', z'' ihre Werthe substituirt und die Bögen summirt:

$$\int \frac{y dy}{(y^3 + 8)\sqrt{y^3 - 1}}$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}} \ \text{logn} \ \frac{\sqrt{y^2 + y + 1} + \sqrt{y - 1} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{y^2 + y + 1} - \sqrt{y - 1} \cdot \sqrt{3}}$$

$$+ \frac{1}{18} \ \text{Arctang} \ \frac{3y(y - 1)}{(4 - y)\sqrt{y^3 - 1}}.$$

Druckfehler.

Auf der letzten Seite des 16ten Bogens muss die Pagina 256 statt 356 heissen.

XL.

Ueber die Berechnung der Parallaxen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die Formeln zur Berechnung der Parallaxen sind in jeder Beziehung, natürlich aber vorzüglich für die Astronomie, von so grosser Wichtigkeit, dass es sich wohl der Mühe lohnt, dieselben in dieser Zeitschrift einmal vollständig im Zusammenhange zu entwickeln, wobei ich zugleich beabsichtige, bei dieser Gelegenheit einige, so viel ich weiss, noch nicht bekannte Formeln zur Sprache zu bringen. Auch hoffe ich, dass die Entwickelung sich insbesondere durch ihre Allgemeinheit zu empfehlen geeignet sein wird.

§. 2.

Durch den Mittelpunkt C der Erde, welche wir hier als ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenes Sphäroid betrachten, und einen beliebigen Punkt O auf ihrer Oberfläche denke man sich zwei beliebige einander parallele rechtwinklige Coordinatensysteme gelegt, und nehme in diesen beiden Systemen, wie man in der analytischen Geometrie bei parallelen Coordinatensystemen bekanntlich immer zu thun pflegt, die positiven Theile jeder zwei gleichnamigen Axen von den entsprechenden Anfangspunkten an nach denselben Seiten hin. Sind x, y, z die Coordinaten eines Weltkörpers in Bezug auf das System, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt C der Erde ist, und x', y', z' die Coordinaten dieses Weltkörpers in Bezug auf das System, dessen Anfangspunkt der Punkt O auf der Oberfläche der Erde ist, in demselben Zeitmomente, so heissen jederzeit x, y, z die wahren, dagegen x', y', z' die scheinbaren Coordinaten dieses Weltkörpers in dem in Rede stehenden Zeitmomente. Sind nun a, b, c die Coordinaten des Punktes O auf der Oberfläche der Erde in Bezug auf das System, dessen Anfangspunkt der Mittel- C der Erde ist, so hat man nach der aus der analytischen Geome-

trie bekannten Theorie der Coordinatenverwandlung zwischen den Grössen a, b, c; x, y, z; x', y', z' die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z'.$$

Jetzt wollen wir uns durch den Mittelpunkt C der Erde noch ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der XYZ gelegt denken, und wollen zugleich, was offenbar verstattet ist, Folgendes annehmen. Die positiven Theile der Axen der x und X sollen mit einander zusammenfallen. Ferner sollen die positiven Theile der Axen der y und Y so angenommen werden, dass der von denselben eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel, welcher durch Θ bezeichnet werden mag, nicht grösser als 90° ist, und dass der positive Theil der Axe der y auf der positiven Seite der Ebene der XY liegt. Endlich sollen die positiven Theile der Axen der z und Z auf einer und derselben Seite der Ebene der xy oder auch der Ebene der XY liegen. Dies vorausgesetzt, hat man, wenn L, M, N die Coordinaten des Punktes O in Bezug auf das System der XYZ bezeichnen, nach den allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= L, \\ b &= M \cos \Theta + N \cos (90^\circ - \Theta), \\ c &= M \cos (90^\circ + \Theta) + N \cos \Theta; \end{aligned}$$

d. i.

$$2)\quad \begin{cases} a = L, \\ b = M \cos \Theta + N \sin \Theta, \\ c = - M \sin \Theta + N \cos \Theta. \end{cases}$$

Folglich ist nach 1)

$$3)\quad \begin{cases} x = L + x', \\ y = M \cos \Theta + N \sin \Theta + y', \\ z = - M \sin \Theta + N \cos \Theta + z'. \end{cases}$$

Nun wollen wir zu polaren Coordinaten übergehen, von denen bekanntlich in der Astronomie vorzugsweise Gebrauch gemacht wird. Zu dem Ende bezeichnen wir der Kürze wegen den in Rede stehenden Weltkörper durch W, die Projectionen der Linien CW und OW auf den Ebenen der xy und $x'y'$ respective durch CP und OP'. Die von CP und OP' mit den positiven Theilen der Axen der x und x' eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von den positiven Theilen der Axen der x und x' an durch die von den positiven Theilen der Axen der x und y, und der Axen der x' und y' eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach einer Richtung hin von 0 bis 360° zählt, seien λ und λ'. Die 90° nicht übersteigenden Winkel, unter denen die Linien CW und OW gegen die Ebenen der xy und $x'y'$ geneigt sind, indem man diese Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Linien CW und OW auf den positiven oder negativen Seiten der Ebenen der xy und $x'y'$ liegen, seien β und β'.

Bezeichnen nun ϱ und ϱ' die Entfernungen CW und OW des Weltkörpers W von dem Mittelpunkte C der Erde und dem Orte O auf ihrer Oberfläche; so hat man offenbar die folgenden ganz allgemein gültigen Ausdrücke:

$$4)\begin{cases} x=\varrho\cos\lambda\cos\beta, \\ y=\varrho\sin\lambda\cos\beta, \\ z=\varrho\sin\beta \end{cases}$$

und

$$5)\begin{cases} x'=\varrho'\cos\lambda'\cos\beta', \\ y'=\varrho'\sin\lambda'\cos\beta', \\ z'=\varrho'\sin\beta'; \end{cases}$$

und es ist folglich nach 3)

$$6)\begin{cases} \varrho\cos\lambda\cos\beta=L+\varrho'\cos\lambda'\cos\beta', \\ \varrho\sin\lambda\cos\beta=M\cos\Theta+N\sin\Theta+\varrho'\sin\lambda'\cos\beta', \\ \varrho\sin\beta=-M\sin\Theta+N\cos\Theta+\varrho'\sin\beta'. \end{cases}$$

Ist aber CQ die Projection der Linie CO auf der Ebene der XY, und A der von CQ mit dem positiven Theile der Axe der X oder x eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der X oder x an durch den von den positiven Theilen der Axen der X und Y eingeschlossenen rechten Winkel hindurch immer nach einer Richtung hin von 0 bis 360° zählt, φ der 90° nicht übersteigende Winkel, unter welchem die Linie CO gegen die Ebene der XY geneigt ist, indem man diesen Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die Linie CO auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der XY liegt; so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher, wenn wir den Erdhalbmesser $CO=r$ setzen:

$$7)\begin{cases} L=r\cos A\cos\varphi, \\ M=r\sin A\cos\varphi, \\ N=r\sin\varphi; \end{cases}$$

und folglich nach 6)

$$8)\begin{cases} \varrho\cos\lambda\cos\beta= r\cos A\cos\varphi+\varrho'\cos\lambda'\cos\beta', \\ \varrho\sin\lambda\cos\beta= r\sin A\cos\Theta\cos\varphi+r\sin\Theta\sin\varphi \\ \qquad +\varrho'\sin\lambda'\cos\beta', \\ \varrho\sin\beta=-r\sin A\sin\Theta\cos\varphi+r\cos\Theta\sin\varphi \\ \qquad +\varrho'\sin\beta'; \end{cases}$$

oder

$$9)\begin{cases} \varrho'\cos\lambda'\cos\beta'=\varrho\cos\lambda\cos\beta-r\cos A\cos\varphi, \\ \varrho'\sin\lambda'\cos\beta'=\varrho\sin\lambda\cos\beta-r\sin A\cos\Theta\cos\varphi \\ \qquad -r\sin\Theta\sin\varphi, \\ \varrho'\sin\beta'=\varrho\sin\beta+r\sin A\sin\Theta\cos\varphi \\ \qquad -r\cos\Theta\sin\varphi. \end{cases}$$

Dividirt man die zweite und dritte der Gleichungen 9) durch die erste Gleichung in diesem Systeme, so erhält man

$$10)\begin{cases}\tang\lambda'=\dfrac{\varrho\sin\lambda\cos\beta-r(\sin\Theta\sin\varphi+\cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\varrho\cos\lambda\cos\beta-r\cos A\cos\varphi},\\ \tang\beta'=\dfrac{\cos\lambda'\{\varrho\sin\beta-r(\cos\Theta\sin\varphi-\sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\varrho\cos\lambda\cos\beta-r\cos A\cos\varphi};\end{cases}$$

oder, wenn

$$11)\ \sin\pi=\frac{r}{\varrho}$$

gesetzt wird,

$$12)\begin{cases}\tang\lambda'=\dfrac{\sin\lambda\cos\beta-\sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi+\cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \tang\beta'=\dfrac{\cos\lambda'\{\sin\beta-\sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi-\sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Auf ganz ähnliche Art erhält man aus den Gleichungen 8)

$$13)\begin{cases}\tang\lambda=\dfrac{\varrho'\sin\lambda'\cos\beta'+r(\sin\Theta\sin\varphi+\cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\varrho'\cos\lambda'\cos\beta'+r\cos A\cos\varphi},\\ \tang\beta=\dfrac{\cos\lambda\{\varrho'\sin\beta'+r(\cos\Theta\sin\varphi-\sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\varrho'\cos\lambda'\cos\beta'+r\cos A\cos\varphi};\end{cases}$$

oder, wenn

$$14)\ \sin\pi'=\frac{r}{\varrho'}$$

gesetzt wird,

$$15)\begin{cases}\tang\lambda=\dfrac{\sin\lambda'\cos\beta'+\sin\pi'(\sin\Theta\sin\varphi+\cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda'\cos\beta'+\sin\pi'\cos A\cos\varphi},\\ \tang\beta=\dfrac{\cos\lambda\{\sin\beta'+\sin\pi'(\cos\Theta\sin\varphi-\sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda'\cos\beta'+\sin\pi'\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Zwischen den Grössen λ, β, ϱ und λ', β', ϱ' hat man nach dem Obigen die Gleichung

$$16)\ r\cos A\cos\varphi=\varrho\cos\lambda\cos\beta-\varrho'\cos\lambda'\cos\beta';$$

und daher zwischen λ, β, π und λ', β', π' die Gleichung:

$$17)\ \cos A\cos\varphi=\frac{\cos\lambda\cos\beta}{\sin\pi}-\frac{\cos\lambda'\cos\beta'}{\sin\pi'}.$$

Auch ergiebt sich aus den Gleichungen 8), wenn man dieselben quadrirt und dann zu einander addirt, leicht

$$18)\ \varrho^2=r^2+\varrho'^2+2r\varrho'\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda'\cos\beta'\cos A\cos\varphi\\ +\sin\lambda'\cos\beta'(\sin\Theta\sin\varphi\\ \qquad\qquad+\sin A\cos\Theta\cos\varphi)\\ \qquad+\sin\beta'(\cos\Theta\sin\varphi\\ \qquad\qquad-\sin A\sin\Theta\cos\varphi)\end{array}\right\}$$

und auf ganz ähnliche Art ergiebt sich aus den Gleichungen 9)

$$19)\ \varrho'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\cos\beta\cos A\cos\varphi\\ +\sin\lambda\cos\beta(\sin\Theta\sin\varphi\\ \qquad\qquad +\sin A\cos\Theta\cos\varphi)\\ \quad +\sin\beta(\cos\Theta\sin\varphi\\ \qquad\qquad -\sin A\sin\Theta\cos\varphi)\end{array}\right\}.$$

Berechnet man den Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$20)\ \tang\psi = \sin A\cot\varphi,$$

so ist

$$21)\left\{\begin{array}{l}\sin\Theta\sin\varphi + \sin A\cos\Theta\cos\varphi = \dfrac{\sin\varphi\sin(\Theta+\psi)}{\cos\psi},\\ \cos\Theta\sin\varphi - \sin A\sin\Theta\cos\varphi = \dfrac{\sin\varphi\cos(\Theta+\psi)}{\cos\psi};\end{array}\right.$$

und folglich

$$22)\ \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho'\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda'\cos\beta'\cos A\cos\varphi\\ +\dfrac{\sin\varphi}{\cos\psi}[\sin\beta'\cos(\Theta+\psi)\\ \qquad\qquad +\sin\lambda'\cos\beta'\sin(\Theta+\psi)]\end{array}\right\}$$

und

$$23)\ \varrho'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\cos\beta\cos A\cos\varphi\\ +\dfrac{\sin\varphi}{\cos\psi}[\sin\beta\cos(\Theta+\psi)\\ \qquad\qquad +\sin\lambda\cos\beta\sin(\Theta+\psi)]\end{array}\right\}.$$

Setzt man nun noch

$$24)\left\{\begin{array}{l}\tang\xi = \sin\lambda\cot\beta,\\ \tang\xi' = \sin\lambda'\cot\beta';\end{array}\right.$$

so wird

$$25)\ \varrho^2 = r^2 + \varrho'^2 + 2r\varrho'\left\{\cos\lambda'\cos\beta'\cos A\cos\varphi + \frac{\sin\beta'\sin\varphi\cos(\Theta+\psi-\xi')}{\cos\psi\cos\xi'}\right\}$$

und

$$26)\ \varrho'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\left\{\cos\lambda\cos\beta\cos A\cos\varphi + \frac{\sin\beta\sin\varphi\cos(\Theta+\psi-\xi)}{\cos\psi\cos\xi}\right\}.$$

Weil, da r, ϱ, ϱ' die drei Seiten eines Dreiecks sind, immer

$$r+\varrho > \varrho',\quad r+\varrho' > \varrho$$

ist, so ist der absolute Werth von $\varrho - \varrho'$ immer kleiner als r, und also auch immer kleiner als ϱ. Weil nun

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho - (\varrho - \varrho')} = \frac{r}{\varrho}\left(1 - \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho}\right)^{-1}$$

ist, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho} + \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho} + \ldots,$$

und weil nach dem Vorhergehenden der absolute Werth von

$$\frac{r}{\varrho} \cdot \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho}$$

immer kleiner als $(\frac{r}{\varrho})^2$, diese Grösse aber in Bezug auf die jederzeit äusserst kleine Grösse $\frac{r}{\varrho}$ von der zweiten Ordnung ist, so sind die Grössen $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{r}{\varrho'}$ oder $\sin\pi$ und $\sin\pi'$ immer nur sehr wenig von einander verschieden, und man kann also näherungsweise

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{r}{\varrho} \text{ oder } \sin\pi' = \sin\pi,$$

also nach 15) näherungsweise

$$27)\left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\lambda &= \frac{\sin\lambda'\cos\beta' + \sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi + \cos\Theta\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda'\cos\beta' + \sin\pi\cos A\cos\varphi}, \\ \operatorname{tang}\beta &= \frac{\cos\lambda\{\sin\beta' + \sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi - \sin\Theta\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda'\cos\beta' + \sin\pi\cos A\cos\varphi} \end{aligned}\right.$$

setzen.

λ und β heissen die wahren, λ' und β' die scheinbaren polaren Coordinaten des Weltkörpers W, und durch die im Vorhergehenden entwickelten Formeln können immer sowohl die ersteren aus den letzteren, als auch die letzteren aus den ersteren gefunden werden. Die Differenzen $\lambda - \lambda'$ und $\beta - \beta'$ heissen die Parallaxen des Weltkörpers W in Bezug auf die durch λ und β oder λ' und β' bezeichneten wahren oder scheinbaren Coordinaten, natürlich für die Zeit, welcher diese wahren und scheinbaren polaren Coordinaten entsprechen.

Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten ganz allgemeinen Formeln wollen wir nun die verschiedenen in der Astronomie bei der Parallaxenrechnung vorkommenden speciellen Aufgaben auflösen, indem wir nur noch bemerken, dass zur Berechnung der sogenannten geocentrischen Breite eines Orts O auf der Oberfläche der Erde und des nach demselben gezogenen Erdhalbmessers r aus der Polhöhe dieses Orts und den beiden Halbaxen der Erde schon im ersten Theile des Archiv's S. 177. bei einer andern Gelegenheit die nöthige Anleitung ertheilt worden ist, worauf wir daher der Kürze wegen hier bloss verweisen wollen.

§. 3.

Aufgabe. Aus der wahren Rectascension und Declination α, δ die scheinbare Rectascension und Declination α', δ' zu finden.

Auflösung. Wir lassen die Systeme der xyz und XYZ mit einander zusammenfallen, wo dann offenbar $\Theta=0$ ist. Ferner nehmen wir als Ebene der xy die Ebene des Aequators an, lassen den positiven Theil der Axe der x von dem Mittelpunkte der Erde aus durch den Anfangspunkt des Widders oder den Frühlingspunkt, den positiven Theil der Axe der y von dem Mittelpunkte der Erde aus durch den neunzigsten Grad der Rectascensionen, und den positiven Theil der Axe der z von dem Mittelpunkte der Erde aus durch den Nordpol des Aequators gehen. Unter diesen Voraussetzungen ist im Obigen offenbar $\lambda=\alpha$, $\beta=\delta$; $\lambda'=\alpha'$, $\beta'=\delta'$; der Winkel φ ist die sogenannte geocentrische Breite des Orts O auf der Oberfläche der Erde, und A ist die sogenannte Rectascension der Mitte des Himmels, welche man erhält, wenn man die Sternzeit des Orts O, der die wahren und scheinbaren Rectascensionen und Declinationen α, δ und α', δ' entsprechen, auf bekannte Weise in einen Bogen verwandelt. Hiernach ergeben sich nun aus 12) unmittelbar die Formeln

$$28)\left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}\alpha' &= \frac{\sin\alpha\cos\delta-\sin\pi\sin A\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \operatorname{tang}\delta' &= \frac{\cos\alpha'(\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi)}{\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi};\end{aligned}\right.$$

welche die vollständige Auflösung unserer Aufgabe enthalten.

Man kann aber diese Formeln auf mehrere Arten umgestalten, von denen wir hier nur auf die folgenden aufmerksam machen wollen.

Weil nämlich, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}\sin\alpha(\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi)-\cos\alpha(\sin\alpha\cos\delta\\-\sin\pi\sin A\cos\varphi)\\ =\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha(\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi)+\sin\alpha(\sin\alpha\cos\delta\\-\sin\pi\sin A\cos\varphi)\\ =\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin A(\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi)-\cos A(\sin\alpha\cos\delta\\-\sin\pi\sin A\cos\varphi)\\ =\cos\delta\sin(A-\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos A(\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi)+\sin A(\sin\alpha\cos\delta\\-\sin\pi\sin A\cos\varphi)\\ =\cos\delta\cos(A-\alpha)-\sin\pi\cos\varphi\end{aligned}$$

ist; so ist, wenn man jede dieser Gleichungen durch

$$\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi$$

dividirt, nach der ersten der beiden Gleichungen 28)

$$\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.$$

und

$$\sin A - \cos A \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},$$

$$\cos A + \sin A \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.$$

Also ist, wie sogleich in die Augen fallen wird,

$$29)\left\{\begin{aligned}\sin(\alpha-\alpha') &= \frac{\cos\alpha'\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \cos(\alpha-\alpha') &= \frac{\cos\alpha'\{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)\}}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}\end{aligned}\right.$$

und

$$30)\left\{\begin{aligned}\sin(A-\alpha') &= \frac{\cos\alpha'\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \cos(A-\alpha') &= \frac{\cos\alpha'\{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi\}}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich aber auf der Stelle

$$31)\left\{\begin{aligned}\operatorname{tang}(\alpha-\alpha') &= \frac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)},\\ \operatorname{tang}(A-\alpha') &= \frac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Weil ferner nach der zweiten der Gleichungen 28)

$$\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tang}\delta'}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}$$

ist, so lassen sich die Gleichungen 29) und 30) auch unter der folgenden Form darstellen:

$$32)\left\{\begin{aligned}\sin(\alpha-\alpha') &= \frac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta',\\ \cos(\alpha-\alpha') &= \frac{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta'\end{aligned}\right.$$

und

$$33)\left\{\begin{aligned}\sin(A-\alpha') &= \frac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta',\\ \cos(A-\alpha') &= \frac{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi}\operatorname{tang}\delta'.\end{aligned}\right.$$

Verbindet man die ersten Gleichungen in diesen beiden Systemen durch Addition und Subtraction mit einander, und bemerkt, dass

$$\sin(\alpha-\alpha')+\sin(A-\alpha')=2\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha),$$
$$\sin(\alpha-\alpha')-\sin(A-\alpha')=-2\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$

ist; so erhält man

$$2\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$
$$=\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\sin(A-\alpha)\tang\delta',$$
$$2\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$
$$=\frac{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\sin(A-\alpha)\tang\delta';$$

also, weil

$$\sin(A-\alpha)=2\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)$$

ist,

$$34)\left\{\begin{aligned}\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}&=\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\tang\delta',\\ \cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}&=\frac{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\tang\delta';\end{aligned}\right.$$

folglich durch Division

$$35)\quad \tang\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}\tang\tfrac{1}{2}(A-\alpha).$$

Ganz dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn man die zweiten Gleichungen in den beiden Systemen 32) und 33) durch Addition und Subtraction mit einander verbindet.

Hat man mittelst der Formel 35) die scheinbare Rectascension α' gefunden, so ergiebt sich die scheinbare Declination δ' mittelst einer der beiden folgenden unmittelbar aus 34) fliessenden Formeln:

$$36)\left\{\begin{aligned}\tang\delta'&=\frac{\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi},\\ \tang\delta'&=\frac{\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Wenn man die Gleichungen 34) quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\tang \delta' = \pm \frac{\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi}{\sqrt{(\cos \delta + \sin \pi \cos \varphi)^2 \sin \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2 + (\cos \delta - \sin \pi \cos \varphi)^2 \cos \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2}},$$

wo sich nun noch frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat. Um hierüber zu völliger Gewissheit zu kommen, müssen wir auf die Gleichungen 9) zurückgehen, welche im vorliegenden Falle die folgende Gestalt:

$$37)\begin{cases} \varrho' \cos \alpha' \cos \delta' = \varrho \cos \alpha \cos \delta - r \cos A \cos \varphi, \\ \varrho' \sin \alpha' \cos \delta' = \varrho \sin \alpha \cos \delta - r \sin A \cos \varphi, \\ \varrho' \sin \delta' = \varrho \sin \delta - r \sin \varphi; \end{cases}$$

oder die Gestalt

$$38)\left\{\begin{aligned}\frac{\varrho'}{\varrho}\cos\alpha'\cos\delta' &= \cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi,\\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\alpha'\cos\delta' &= \sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi,\\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\delta' &= \sin\delta - \sin\pi\sin\varphi\end{aligned}\right.$$

erhalten. Aus der dritten dieser Gleichungen erhellet, dass die Grössen

$$\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi \text{ und } \sin\delta'$$

immer gleiche Vorzeichen haben; und da nun, weil δ', absolut genommen, nie 90° übersteigt, $\sin\delta'$ und $\tang\delta'$ jederzeit gleiche Vorzeichen haben, so haben auch

$$\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi \text{ und } \tang\delta'$$

immer gleiche Vorzeichen, woraus sich ergiebt, dass in der oben für $\tang\delta'$ gefundenen Formel immer das obere Vorzeichen genommen, also

$$39)\ \tang \delta' = \frac{\sin \delta - \sin \pi \sin \varphi}{\sqrt{(\cos \delta + \sin \pi \cos \varphi)^2 \sin \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2 + (\cos \delta - \sin \pi \cos \varphi)^2 \cos \tfrac{1}{2}(A-\alpha)^2}}$$

gesetzt werden muss.

Hierbei bemerken wir zugleich, dass bei allen obigen Formeln noch eine besondere Beurtheilung nöthig ist, in welchem Quadranten man sich die gesuchte scheinbare Rectascension α', welche bekanntlich immer positiv ist, aber bis 360° wachsen kann, endigen lassen muss, und es ist sehr wichtig, im Besitz bestimmter Regeln zu sein, nach denen man diese Beurtheilung in allen Fällen mit völliger Sicherheit anstellen kann. In dieser Beziehung bemerken wir daher zuvörderst, dass wegen der beiden ersten Gleichungen in 38) jederzeit

$$\cos \alpha' \cos \delta' \text{ mit } \cos \alpha \cos \delta - \sin \pi \cos A \cos \varphi,$$

$$\sin \alpha' \cos \delta' \text{ mit } \sin \alpha \cos \delta - \sin \pi \sin A \cos \varphi;$$

also, weil $\cos\delta'$ stets positiv ist, jederzeit

$$\cos\alpha' \text{ mit } \cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi,$$

$$\sin\alpha' \text{ mit } \sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi$$

gleiches Vorzeichen hat. Also endigt sich α' im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadrenten, jenachdem von den beiden bekannten Grössen

$$\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi,$$

$$\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi$$

die erste positiv und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite negativ, die erste positiv und die zweite negativ ist, mittelst welcher Regeln also die verlangte Beurtheilung immer sicher angestellt werden kann.

Berechnet man nun α' und δ' z. B. mittelst der Formeln 28), nämlich mittelst der Formeln

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha\cos\delta - \sin\pi\sin A\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},$$

$$\tan\delta' = \frac{\cos\alpha'(\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi};$$

so muss sich α' im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten endigen, jenachdem in Bezug auf den der Grösse $\tan\alpha'$ gleichen Bruch der Nenner positiv und der Zähler positiv, der Nenner negativ und der Zähler positiv, der Nenner negativ und der Zähler negativ, der Nenner positiv und der Zähler negativ ist. Der Ausdruck für $\tan\delta'$ lässt keinen Zweifel über die Art und Weise, wie δ', welches, absolut genommen, nie 90° übersteigt, zu nehmen ist, zu.

Berechnet man α' und δ' mittelst der beiden aus 28) und 31) fliessenden Formeln

$$\tan(\alpha - \alpha') = \frac{\sin\pi\cos\varphi\sin(A-\alpha)}{\cos\delta - \sin\pi\cos\varphi\cos(A-\alpha)},$$

$$\tan\delta' = \frac{\cos\alpha'(\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}$$

oder

$$\tan(A - \alpha') = \frac{\cos\delta\sin(A-\alpha)}{\cos\delta\cos(A-\alpha) - \sin\pi\cos\varphi},$$

$$\tan\delta' = \frac{\cos\alpha'(\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi)}{\cos\alpha\cos\delta - \sin\pi\cos A\cos\varphi};$$

so hat man zu bemerken, dass die beiden Werthe, welche α' haben kann, immer von der Form α' und $\alpha' + 180^\circ$ sind, wo α' nicht grösser als 180° sein soll. Diesen beiden Werthen von α' entsprechen nun nach der zweiten Formel der beiden obigen Systeme von Formeln immer entgegengesetzte Werthe von $\tan\delta'$, und da man, weil bekanntlich $\tan\delta'$ immer einerlei Vorzeichen mit $\sin\delta - \sin\pi\sin\varphi$ hat, das Vorzeichen von $\tan\delta'$ kennt, so lässt sich offenbar

auch immer ohne Schwierigkeit sicher beurtheilen, welchen der beiden Werthe von α' man zu nehmen hat.

Auf ganz ähnliche Art hat man sich zu verhalten, wenn man α' und δ' mittelst eines der beiden folgenden aus dem Obigen bekannten Systeme von Formeln berechnet:

$$\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\,\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\delta'=\frac{\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}$$

oder

$$\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\,\frac{\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\delta'=\frac{\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\delta-\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta-\sin\pi\cos\varphi}.$$

Diese beiden letzten Systeme von Formeln sind, so viel ich weiss, bis jetzt noch nicht bekannt gewesen.

Sich die Rechnung nach den obigen Formeln durch die Einführung von Hülfswinkeln zu erleichtern, hat nicht die mindeste Schwierigkeit, und wir wollen dies daher auch nur beispielshalber an den letzten Formeln erläutern.

Setzt man nämlich

$$40)\quad \operatorname{tang}\chi=\frac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta},\quad \operatorname{tang}\xi=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\delta};$$

so hat man zur Berechnung von α' die Formeln

$$41)\quad \operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\operatorname{tang}(45^\circ+\chi)$$

oder

$$42)\quad \operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-\alpha)\cot(45^\circ-\chi);$$

und zur Berechnung von δ' hat man die Formeln

$$43)\begin{cases}\operatorname{tang}\delta'=\operatorname{tang}\delta\,\dfrac{\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\sin(45^\circ-\xi)}{\cos\xi\sin(45^\circ+\chi)},\\[2ex]\operatorname{tang}\delta'=\operatorname{tang}\delta\,\dfrac{\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\sin(45^\circ-\xi)}{\cos\xi\sin(45^\circ-\chi)};\end{cases}$$

oder auch

$$44)\begin{cases}\operatorname{tang}\delta'=\operatorname{tang}\delta\,\dfrac{\sin\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\sin\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\cos(45^\circ+\xi)}{\cos\xi\cos(45^\circ-\chi)},\\[2ex]\operatorname{tang}\delta'=\operatorname{tang}\delta\,\dfrac{\cos\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha)-\alpha'\}}{\cos\tfrac{1}{2}(A-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos\chi\cos(45^\circ+\xi)}{\cos\xi\cos(45^\circ+\chi)}.\end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen in 32) und 33) erhält man leicht

$$45)\begin{cases}\operatorname{tang}\delta'=\dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(A-\alpha)}\left(\dfrac{\sin\delta}{\sin\pi\cos\varphi}-\operatorname{tang}\varphi\right),\\[2ex]\operatorname{tang}\delta'=\dfrac{\sin(A-\alpha')}{\sin(A-\alpha)}\left(\operatorname{tang}\delta-\dfrac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}\right);\end{cases}$$

und wenn man die erste Gleichung in 32) durch die erste Gleichung in 33) dividirt, so ergiebt sich

$$46)\ \frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(A-\alpha')}=\frac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta}$$

oder

$$47)\ \sin(A-\alpha')=\frac{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\pi\cos\varphi}.$$

Die zweite der Gleichungen 45) kann man auch unter der Form

$$\tang\delta=\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(A-\alpha')}\tang\delta'+\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}$$

schreiben, und weil nun

$$\tang\delta=\tang\delta'+\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'}$$

ist, so ist

$$\tang\delta'+\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'}=\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(A-\alpha')}\tang\delta'+\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta},$$

also

$$\frac{\sin(A-\alpha')-\sin(A-\alpha)}{\sin(A-\alpha')}\tang\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}-\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'},$$

d. i.

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\sin(A-\alpha')}\tang\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}-\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'}.$$

Nach 47) ist aber

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{\sin(A-\alpha')}=\frac{\sin\pi\cos\varphi}{2\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\sin\pi\cos\varphi\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}\tang\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos\delta}-\frac{\sin(\delta-\delta')}{\cos\delta\cos\delta'},$$

also

$$\sin(\delta-\delta')=\sin\pi\sin\varphi\cos\delta'-\frac{\sin\pi\cos\varphi\sin\delta'\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}.$$

Setzt man nun

$$48)\ \cot\zeta=\frac{\cot\varphi\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')};$$

so wird

$$49)\ \sin(\delta-\delta')=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\zeta}\sin(\zeta-\delta'),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$50)\ \mu = \frac{\sin\pi \sin\varphi}{\sin\zeta}$$

setzen,

$$51)\ \sin(\delta - \delta') = \mu \sin(\zeta - \delta').$$

Nun ist aber

$$\zeta - \delta' = \zeta - \delta + (\delta - \delta');$$

also

$$\sin(\delta - \delta') = \mu\{\sin(\zeta - \delta)\cos(\delta - \delta') + \cos(\zeta - \delta)\sin(\delta - \delta')\},$$

und folglich

$$52)\ \operatorname{tang}(\delta - \delta') = \frac{\mu \sin(\zeta - \delta)}{1 - \mu\cos(\zeta - \delta)}.$$

Setzt man

$$53)\ k = \frac{\sin\pi \cos\varphi}{\cos\delta},$$

so ist nach 31)

$$54)\ \operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = \frac{k \sin(A - \alpha)}{1 - k\cos(A - \alpha)}.$$

Wenn man jetzt überhaupt die Gleichung

$$\operatorname{tang} u = \frac{x \sin v}{1 - x\cos v}$$

hat, und der absolute Werth von u nicht grösser als der vierte Theil der halben Peripherie ist; so ist nach einer aus der Analysis bekannten Reihe

$$u = \operatorname{tang} u - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang} u^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang} u^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tang} u^7 + \ldots,$$

und folglich, weil

$$\operatorname{tang} u = x \sin v(1 - x\cos v)^{-1}$$

ist,

$$\begin{aligned} u = \ & x \sin v(1 - x\cos v)^{-1} \\ & - \tfrac{1}{3}x^3 \sin v^3(1 - x\cos v)^{-3} \\ & + \tfrac{1}{5}x^5 \sin v^5(1 - x\cos v)^{-5} \\ & - \tfrac{1}{7}x^7 \sin v^7(1 - x\cos v)^{-7} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ist nun der absolute Werth von $x \cos v$ kleiner als die Einheit, so ist es verstattet, die sämmtlichen Potenzen von $1 - x\cos v$ nach dem Binomischen Lehrsatze in Reihen zu entwickeln. Thut man dies, und ordnet dann nach den Potenzen von x, so erhält man mittelst der aus der Trigonometrie bekannten Ausdrücke für

die Sinus der vielfachen Bogen ohne alle Schwierigkeit die folgende merkwürdige Reihe:

$$u=\frac{x\sin v}{1}+\frac{x^2\sin 2v}{2}+\frac{x^3\sin 3v}{3}+\frac{x^4\sin 4v}{4}+\ldots,$$

oder, wenn u in Secunden ausgedrückt sein soll,

$$u=\frac{x\sin v}{\sin 1''}+\frac{x^2\sin 2v}{2\sin 1''}+\frac{x^3\sin 3v}{3\sin 1''}+\frac{x^4\sin 4v}{4\sin 1''}+\ldots,$$

oder auch, wenn man nur einige wenige Anfangsglieder der Reihe berücksichtigt, ohne merklichen Fehler

$$u=\frac{x\sin v}{\sin 1''}+\frac{x^2\sin 2v}{\sin 2''}+\frac{x^3\sin 3v}{\sin 3''}+\frac{x^4\sin 4v}{\sin 4''}+\ldots.$$

Hiernach hat man unter der Voraussetzung, dass die absoluten Werthe von $\alpha-\alpha'$ und $\delta-\delta'$ nicht grösser als der vierte Theil der halben Peripherie, und die absoluten Werthe von $k\cos(A-\alpha)$ und $\mu\cos(\zeta-\delta)$ kleiner als die Einheit sind, nach 54) und 52) die Formeln

$$55)\quad \alpha-\alpha'=\frac{k\sin(A-\alpha)}{\sin 1''}+\frac{k^2\sin 2(A-\alpha)}{2\sin 1''}$$
$$+\frac{k^3\sin 3(A-\alpha)}{3\sin 1''}$$
$$+\frac{k^4\sin 4(A-\alpha)}{4\sin 1''}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$56)\quad \delta-\delta'=\frac{\mu\sin(\zeta-\delta)}{\sin 1''}+\frac{\mu^2\sin 2(\zeta-\delta)}{2\sin 1''}$$
$$+\frac{\mu^3\sin 3(\zeta-\delta)}{3\sin 1''}$$
$$+\frac{\mu^4\sin 4(\zeta-\delta)}{4\sin 1''}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

wo nach dem Obigen

$$57)\quad k=\frac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta},\quad \mu=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ aus der Formel

$$58)\quad \cot\zeta=\frac{\cot\varphi\cos\{A-\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}$$

bestimmt werden muss.

Ist man berechtigt mit hinreichender Näherung bei den ersten Gliedern der Reihen 55) und 56) stehen zu bleiben, so erhält man

$$59)\begin{cases}\alpha-\alpha'=\dfrac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta\sin 1''}\sin(A-\alpha),\\[2mm] \delta-\delta'=\dfrac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\zeta\sin 1''}\sin(\zeta-\delta);\end{cases}$$

oder auch näherungsweise

$$60)\begin{cases}\alpha-\alpha'=\dfrac{\pi\cos\varphi}{\cos\delta}\sin(A-\alpha),\\[2mm] \delta-\delta'=\dfrac{\pi\sin\varphi}{\sin\zeta}\sin(\zeta-\delta).\end{cases}$$

Weil aber

$$A-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')=A-\alpha+\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$

ist, so ist nach 58), wie man leicht findet, wenn man

$$\cos\{A-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\}$$
$$=\cos(A-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')-\sin(A-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$

setzt,

$$\cot\zeta=\cot\varphi\{\cos(A-\alpha)-\sin(A-\alpha)\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\},$$

also nach 59)

$$\delta-\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin 1''}\{\cos\delta-\sin\delta\cot\varphi\cos(A-\alpha)$$
$$+\sin\delta\cot\varphi\sin(A-\alpha)\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\},$$

und folglich, weil das Glied

$$\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\delta\cot\varphi\sin(A-\alpha)\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$

offenbar in Bezug auf $\sin\pi\tang\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')$ von der zweiten Ordnung ist, näherungsweise

$$\delta-\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin 1''}\{\cos\delta-\sin\delta\cot\varphi\cos(A-\alpha)\};$$

also, wenn man den Hülfswinkel η mittelst der Formel

$$61)\quad \cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha)$$

berechnet,

$$62)\quad \delta-\delta'=\frac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\eta\sin 1''}\sin(\eta-\delta).$$

Daher haben wir jetzt die folgenden Näherungsformeln

$$63)\begin{cases}\cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha),\\[2mm] \alpha-\alpha'=\dfrac{\sin\pi\cos\varphi}{\cos\delta\sin 1''}\sin(A-\alpha),\\[2mm] \delta-\delta'=\dfrac{\sin\pi\sin\varphi}{\sin\eta\sin 1''}\sin(\eta-\delta);\end{cases}$$

oder auch

$$64)\begin{cases}\cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha),\\ \alpha-\alpha'=\dfrac{\pi\cos\varphi}{\cos\delta}\sin(A-\alpha),\\ \delta-\delta'=\dfrac{\pi\sin\varphi}{\sin\eta}\sin(\eta-\delta).\end{cases}$$

Die Voraussetzungen, unter denen die im Vorhergehenden für $\alpha-\alpha'$ und $\delta-\delta'$ gefundenen Ausdrücke nur gültig sind, haben wir oben angegeben. Will man sich also dieser Ausdrücke mit Sicherheit bedienen, so muss man sich jederzeit vorher überzeugt haben, dass die in Rede stehenden Voraussetzungen sämmtlich erfüllt sind. Vorzüglich scheint dann, wenn die wahre Rectascension α nahe 0 oder nahe 360° ist, Vorsicht nöthig zu sein, weil dann allerdings der absolute Werth von $\alpha-\alpha'$ nicht nahe 0, sondern nahe 360° sein kann, was man also bei praktischen Anwendungen stets wohl zu beachten und zu berücksichtigen hat.

§. 4.

Aufgabe. Aus der scheinbaren Rectascension und Declination α', δ' die wahre Rectascension und Declination α, δ zu finden.

Auflösung. Auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen erhält man aus den Gleichungen 15) die Gleichungen

$$65)\begin{cases}\tang\alpha=\dfrac{\sin\alpha'\cos\delta'+\sin\pi'\sin A\cos\varphi}{\cos\alpha'\cos\delta'+\sin\pi'\cos A\cos\varphi},\\ \tang\delta=\dfrac{\cos\alpha(\sin\delta'+\sin\pi'\sin\varphi)}{\cos\alpha'\cos\delta'+\sin\pi'\cos A\cos\varphi}.\end{cases}$$

Da nun diese Gleichungen aus den Gleichungen 28) hervorgehen, wenn man für α, δ, α', δ', π respective α', δ', α, δ, $-\pi'$ setzt, so ist es sehr leicht, alle zur Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe dienenden Formeln aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln durch einfache Substitutionen herzuleiten. Auf diese Weise erhält man aus 31)

$$66)\begin{cases}\tang(\alpha-\alpha')=\dfrac{\sin\pi'\cos\varphi\sin(A-\alpha')}{\cos\delta'+\sin\pi'\cos\varphi\cos(A-\alpha')},\\ \tang(A-\alpha)=\dfrac{\cos\delta'\sin(A-\alpha')}{\cos\delta'\cos(A-\alpha')+\sin\pi'\cos\varphi};\end{cases}$$

und aus 35) und 36) ergiebt sich

$$67)\ \tang\{\tfrac{1}{2}(A+\alpha')-\alpha\}=\frac{\cos\delta'-\sin\pi'\cos\varphi}{\cos\delta'+\sin\pi'\cos\varphi}\tang\tfrac{1}{2}(A-\alpha')$$

und

$$68)\begin{cases}\tang\delta=\dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(A+\alpha')-\alpha\}}{\sin\frac{1}{2}(A-\alpha')}\cdot\dfrac{\sin\delta'+\sin\pi'\sin\varphi}{\cos\delta'-\sin\pi'\cos\varphi},\\ \tang\delta=\dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(A+\alpha')-\alpha\}}{\cos\frac{1}{2}(A-\alpha')}\cdot\dfrac{\sin\delta'+\sin\pi'\sin\varphi}{\cos\delta'+\sin\pi'\cos\varphi}.\end{cases}$$

Auch die Rechnung nach diesen Formeln kann man sich leicht durch Einführung von Hülfswinkeln erleichtern.

Aus 39) erhält man

$$69)\ \tang \delta = \frac{\sin \delta' + \sin \pi' \sin \varphi}{\sqrt{(\cos \delta' - \sin \pi' \cos \varphi)^2 \sin \tfrac{1}{2}(A - \alpha')^2 + (\cos \delta' + \sin \pi' \cos \varphi)^2 \cos \tfrac{1}{2}(A - \alpha')^2}}$$

Nach 37) ist

$$\varrho \cos \alpha \cos \delta = \varrho' \cos \alpha' \cos \delta' + r \cos A \cos \varphi,$$

$$\varrho \sin \alpha \cos \delta = \varrho' \sin \alpha' \cos \delta' + r \sin A \cos \varphi,$$

$$\varrho \sin \delta = \varrho' \sin \delta' + r \sin \varphi;$$

oder

$$\frac{\varrho}{\varrho'} \cos\alpha \cos\delta = \cos\alpha' \cos\delta' + \sin\pi' \cos A \cos\varphi,$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'} \sin\alpha \cos\delta = \sin\alpha' \cos\delta' + \sin\pi' \sin A \cos\varphi,$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'} \sin\delta = \sin\delta' + \sin\pi' \sin\varphi$$

Hieraus erhellet, dass

$\cos\alpha$ mit $\cos\alpha' \cos\delta' + \sin\pi' \cos A \cos\varphi$,

$\sin\alpha$ mit $\sin\alpha' \cos\delta' + \sin\pi' \sin A \cos\varphi$,

$\sin\delta$, und also auch $\operatorname{tang}\delta$, mit $\sin\delta' + \sin\pi' \sin\varphi$

jederzeit einerlei Vorzeichen hat. Also endigt sich α im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten, jenachdem von den beiden Grössen

$$\cos\alpha' \cos\delta' + \sin\pi' \cos A \cos\varphi,$$
$$\sin\alpha' \cos\delta' + \sin\pi' \sin A \cos\varphi$$

die erste positiv und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite positiv, die erste negativ und die zweite negativ, die erste positiv und die zweite negativ ist, wodurch sich auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen immer leicht mit völliger Sicherheit beurtheilen lässt, wie man α zu nehmen hat.

Aus 55) und 56) ergiebt sich

$$70)\quad \alpha' - \alpha = \frac{k \sin(A - \alpha')}{\sin 1''} + \frac{k^2 \sin 2(A - \alpha')}{2\sin 1''} + \frac{k^3 \sin 3(A - \alpha')}{3\sin 1''} + \frac{k^4 \sin 4(A - \alpha')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$71)\quad \delta' - \delta = \frac{\mu \sin(\zeta - \delta')}{\sin 1''} + \frac{\mu^2 \sin 2(\zeta - \delta')}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3 \sin 3(\zeta - \delta')}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4 \sin 4(\zeta - \delta')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo

$$72)\quad k = -\frac{\sin\pi' \cos\varphi}{\cos\delta'},\quad \mu = -\frac{\sin\pi' \sin\varphi}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$73)\quad \cot\zeta = \frac{\cot\varphi \cos\{A - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')\}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}$$

bestimmt werden muss.

Die so eben entwickelten Ausdrücke von $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ setzen voraus, dass die absoluten Werthe dieser Differenzen den vierten Theil der halben Peripherie nicht übersteigen, und dass die absoluten Werthe von $k\cos(A-\alpha')$ und $\mu\cos(\zeta-\delta')$ kleiner als die Einheit sind.

Aus 63) erhält man

$$74)\left\{\begin{array}{l}\cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha'),\\ \alpha'-\alpha=-\dfrac{\sin\pi'\cos\varphi}{\cos\delta'\sin 1''}\sin(A-\alpha')\\ \delta'-\delta=-\dfrac{\sin\pi'\sin\varphi}{\sin\eta\sin 1''}\sin(\eta-\delta');\end{array}\right.$$

oder auch

$$75)\left\{\begin{array}{l}\cot\eta=\cot\varphi\cos(A-\alpha'),\\ \alpha'-\alpha=-\dfrac{\pi'\cos\varphi}{\cos\delta'}\sin(A-\alpha'),\\ \delta'-\delta=-\dfrac{\pi'\sin\varphi}{\sin\eta}\sin(\eta-\delta').\end{array}\right.$$

In allen vorhergehenden Formeln kann man, wie wir aus §. 2. wissen, für π' näherungsweise π setzen. Wollte man sich dies aber nicht gestatten, so würde man sich auf folgende Art zu verhalten haben.

Nach 18) ist im vorliegenden Falle, wie man leicht findet,

$$76)\ \varrho^2=r^2+\varrho'^2+2r\varrho'\{\sin\delta'\sin\varphi+\cos\delta'\cos\varphi\cos(A-\alpha')\},$$

oder, wenn wir

$$77)\ \cot\sigma=\cot\delta'\cos(A-\alpha')$$

setzen,

$$78)\ \varrho^2=r^2+\varrho'^2+2r\varrho'\frac{\sin\delta'\cos(\varphi-\sigma)}{\sin\sigma},$$

oder

$$79)\ \varrho'^2+\frac{2r\sin\delta'\cos(\varphi-\sigma)}{\sin\sigma}\varrho'=(\varrho-r)(\varrho+r),$$

mittelst welcher quadratischen Gleichung man aus den gegebenen Grössen r, ϱ, α', δ' die Grösse ϱ', und daraus mittelst der Formel

$$\sin\pi'=\frac{r}{\varrho'}$$

die Grösse π' bestimmen müsste. Weil

$$\varrho=r\operatorname{cosec}\pi,\ \varrho'=r\operatorname{cosec}\pi'$$

ist, so kann man die Gleichung 79) auch auf die Form

$$\operatorname{cosec}\pi'^2+\frac{2\sin\delta'\cos(\varphi-\sigma)}{\sin\sigma}\operatorname{cosec}\pi'=\operatorname{cosec}\pi^2-1,$$

d. i. auf die Form

$$80)\ \operatorname{cosec} \pi'^2 + \frac{2 \sin \delta' \cos (\varphi - \sigma)}{\sin \sigma} \operatorname{cosec} \pi' = \cot \pi^2$$

bringen, und mittelst dieser Gleichung aus π, α', δ' unmittelbar π bestimmen.

§. 5.

Wenn man an zwei Beobachtungsorten, deren geographische Positionen als genau bekannt angenommen werden können, zu einerlei Zeitmoment *) durch Beobachtungen die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen α', δ' und α'_1, δ'_1 eines Weltkörpers bestimmt hat; so ist, wenn α, δ, ϱ die dem in Rede stehenden Zeitmoment entsprechende wahre Rectascension, Declination und Entfernung dieses Weltkörpers vom Mittelpunkte der Erde bezeichnen und A, φ, r, ϱ' und A_1, φ_1, r_1, ϱ'_1 für beide Beobachtungsorte gleiche Bedeutung haben, nach 37)

$$81)\ \begin{cases} \varrho' \cos \alpha' \cos \delta' = \varrho \cos \alpha \cos \delta - r \cos A \cos \varphi, \\ \varrho' \sin \alpha' \cos \delta' = \varrho \sin \alpha \cos \delta - r \sin A \cos \varphi, \\ \varrho' \sin \delta' = \varrho \sin \delta - r \sin \varphi \end{cases}$$

und

$$82)\ \begin{cases} \varrho'_1 \cos \alpha'_1 \cos \delta'_1 = \varrho \cos \alpha \cos \delta - r_1 \cos A_1 \cos \varphi_1, \\ \varrho'_1 \sin \alpha'_1 \cos \delta'_1 = \varrho \sin \alpha \cos \delta - r_1 \sin A_1 \cos \varphi_1, \\ \varrho'_1 \sin \delta'_1 = \varrho \sin \delta - r_1 \sin \varphi_1. \end{cases}$$

Durch Subtraction erhält man aus diesen Gleichungen auf der Stelle die Gleichungen

$$\varrho' \cos \alpha' \cos \delta' - \varrho'_1 \cos \alpha'_1 \cos \delta'_1 = r_1 \cos A_1 \cos \varphi_1 - r \cos A \cos \varphi,$$

$$\varrho' \sin \alpha' \cos \delta' - \varrho'_1 \sin \alpha'_1 \cos \delta'_1 = r_1 \sin A_1 \cos \varphi_1 - r \sin A \cos \varphi,$$

$$\varrho' \sin \delta' - \varrho'_1 \sin \delta'_1 = r_1 \sin \varphi_1 - r \sin \varphi;$$

welche nun bloss noch die beiden unbekannten Grössen ϱ' und ϱ'_1 enthalten. Aus den beiden ersten dieser Gleichungen erhält man mittelst gewöhnlicher algebraischer Elimination

$$83)\ \begin{cases} \varrho' = \dfrac{r_1 \sin (A_1 - \alpha'_1) \cos \varphi_1 - r \sin (A - \alpha'_1) \cos \varphi}{\sin (\alpha' - \alpha'_1) \cos \delta'}, \\ \varrho'_1 = \dfrac{r_1 \sin (A_1 - \alpha') \cos \varphi_1 - r \sin (A - \alpha') \cos \varphi}{\sin (\alpha' - \alpha'_1) \cos \delta'_1}; \end{cases}$$

und die letzte der drei obigen Gleichungen, nämlich die Gleichung

*) Dies ist möglich, weil man die Längen, wenigstens die Längendifferenz der beiden Beobachtungsorte kennt.

$$84)\quad \varrho' \sin\delta' - \varrho'_1 \sin\delta'_1 = r_1 \sin\varphi_1 - r \sin\varphi$$

kann dann als Prüfungsgleichung benutzt werden.

Aus ϱ' und ϱ'_1 erhält man π' und π'_1 für die beiden Beobachtungsorte mittelst der Formeln

$$85)\quad \sin\pi' = \frac{r}{\varrho'},\ \sin\pi'_1 = \frac{r_1}{\varrho'_1},$$

und kann dann α und δ mittelst der aus dem vorigen Paragraphen bekannten Formeln berechnen, worauf dann ferner zur Berechnung von ϱ die Gleichungen 81) und 82) Wege genug darbieten. Die leichteste Berechnung scheinen jedoch die leicht aus den beiden ersten der Gleichungen 81) und 82) fliessenden Formeln

$$86)\left\{\begin{aligned}\varrho &= r\,\frac{\sin(A-\alpha')\cos\varphi}{\sin(\alpha-\alpha')\cos\delta},\\ \varrho &= r_1\,\frac{\sin(A_1-\alpha'_1)\cos\varphi_1}{\sin(\alpha-\alpha'_1)\cos\delta_1}\end{aligned}\right.$$

zu gestatten. Zur Berechnung von π und π_1 für die beiden Beobachtungsorte hat man die Formeln

$$87)\left\{\begin{aligned}\sin\pi &= \frac{r}{\varrho} = \frac{\sin(\alpha-\alpha')\cos\delta}{\sin(A-\alpha')\cos\varphi},\\ \sin\pi_1 &= \frac{r_1}{\varrho} = \frac{\sin(\alpha-\alpha'_1)\cos\delta_1}{\sin(A_1-\alpha'_1)\cos\varphi_1}.\end{aligned}\right.$$

Man sieht hieraus, wie man aus gleichzeitigen Bestimmungen der scheinbaren Rectascensionen und Declinationen eines Weltkörpers an zwei Beobachtungsorten, deren geographische Positionen als bekannt vorausgesetzt werden, die dem in Rede stehenden Zeitpunkte entsprechende Entfernung des Weltkörpers vom Mittelpunkte der Erde bestimmen kann, und in der That ist das vorhergehende Verfahren die allgemeinste Methode zur Bestimmung der Entfernungen der Weltkörper von der Erde.

§. 6.

Aufgabe. Aus dem wahren Azimuth und der wahren Höhe ω, h das scheinbare Azimuth und die scheinbare Höhe ω', h' zu finden.

Auflösung. Grösserer Bestimmtheit wegen wollen wir annehmen, dass der Beobachtungsort in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liegen soll. Die Azimuthe zählen wir von Süden an nach Westen und nach Osten hin von 0 bis 180°, und nehmen westliche Azimuthe positiv, östliche Azimuthe dagegen negativ. Die Polhöhe des Beobachtungsorts bezeichnen wir durch φ'. Die Ebenen der xy und $x'y'$ sind die Ebenen des wahren und scheinbaren Horizonts, die Ebene der XY ist die Ebene des Aequators. Der positive Theil der Axe der x soll von dem Mittelpunkte der Erde nach Osten, der positive Theil der Axe der y vom Mittelpunkte der Erde nach Norden, der positive Theil der Axe der z vom Mittelpunkte der Erde nach dem Zenith des Beobachtungsorts hin gerichtet sein. Nimmt man nun, dies vorausgesetzt, alle in §. 2. ge-

machten Voraussetzungen, wie es verstattet ist, als erfüllt an; so ist offenbar

$$\lambda = 270^\circ - \omega \text{ oder } \lambda = (270^\circ - \omega) - 360^\circ,$$
$$\lambda' = 270^\circ - \omega' \text{ oder } \lambda' = (270^\circ - \omega') - 360^\circ;$$
$$\beta = h,\ \beta' = h';$$
$$\Theta = 90^\circ - \varphi',\ A = 270^\circ;$$

und folglich nach 12), wobei man nur zu überlegen hat, dass immer

$$\sin\lambda = -\cos\omega,\ \cos\lambda = -\sin\omega,\ \operatorname{tang}\lambda = \cot\omega;$$
$$\sin\lambda' = -\cos\omega',\ \cos\lambda' = -\sin\omega',\ \operatorname{tang}\lambda' = \cot\omega'$$

ist,

$$88)\begin{cases}\cot\omega' = \dfrac{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin\omega\cos h},\\[2ex] \operatorname{tang} h' = \dfrac{\sin\omega'\{\sin h - \sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\}}{\sin\omega\cos h};\end{cases}$$

oder, wie hieraus leicht folgt,

$$89)\begin{cases}\operatorname{tang}\omega' = \dfrac{\sin\omega\cos h}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')},\\[2ex] \operatorname{tang} h' = \dfrac{\cos\omega'\{\sin h - \sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\}}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}.\end{cases}$$

Weil nun

$$\sin\omega\{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\} - \sin\omega\cos\omega\cos h$$
$$= \sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi'),$$

$$\cos\omega\{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\} + \sin\omega\sin\omega\cos h$$
$$= \cos h + \sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')$$

ist, so ist, wie man leicht findet, wenn man diese Gleichungen durch

$$\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')$$

dividirt,

$$\sin\omega - \cos\omega\operatorname{tang}\omega' = \frac{\sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')},$$

$$\cos\omega + \sin\omega\operatorname{tang}\omega' = \frac{\cos h + \sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')};$$

d. i.

$$90)\begin{cases}\sin(\omega-\omega') = \dfrac{\sin\pi\sin\omega\cos\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')},\\[2ex] \cos(\omega-\omega') = \dfrac{\cos\omega'\{\cos h + \sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')\}}{\cos\omega\cos h + \sin\pi\sin(\varphi-\varphi')};\end{cases}$$

folglich, wegen der zweiten der Gleichungen 89)

$$91)\begin{cases}\sin(\omega-\omega')=\dfrac{\sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\tang h',\\ \cos(\omega-\omega')=\dfrac{\cos h+\sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\tang h';\end{cases}$$

und hieraus durch Division

$$92)\ \tang(\omega-\omega')=\frac{\sin\pi\sin\omega\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h+\sin\pi\cos\omega\sin(\varphi-\varphi')}.$$

Nach den Gleichungen 89) ist ferner, wie man leicht findet,

$$93)\ \sin\omega'=\frac{\sin\omega\cos h}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\tang h'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen 91) durch Addition und Subtraction, so erhält man

$$\sin\omega'+\sin(\omega-\omega')=\frac{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\sin\omega\tang h',$$

$$\sin\omega'-\sin(\omega-\omega')=\frac{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\sin\omega\tang h';$$

und folglich

$$94)\begin{cases}\cos(\omega'-\tfrac{1}{2}\omega)=\dfrac{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\cos\tfrac{1}{2}\omega\tang h',\\ \sin(\omega'-\tfrac{1}{2}\omega)=\dfrac{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}\sin\tfrac{1}{2}\omega\tang h';\end{cases}$$

also durch Division

$$95)\ \tang(\omega'-\tfrac{1}{2}\omega)=\frac{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}\tang\tfrac{1}{2}\omega.$$

Auch hat man nach 94)

$$96)\begin{cases}\tang h'=\dfrac{\cos(\omega'-\frac{1}{2}\omega)}{\cos\frac{1}{2}\omega}\cdot\dfrac{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')},\\ \tang h'=\dfrac{\sin(\omega'-\frac{1}{2}\omega)}{\sin\frac{1}{2}\omega}\cdot\dfrac{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h-\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}.\end{cases}$$

Alle diese Formeln auf ähnliche Weise wie die analogen Formeln in §. 3. durch Einführung zweier Hülfswinkel zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, hat nicht die mindeste Schwierigkeit.

Auch ergiebt sich aus 94) leicht

$$\tang h' = \pm \frac{\sin h - \sin \pi \cos (\varphi - \varphi')}{\sqrt{\{\cos h + \sin \pi \sin (\varphi - \varphi')\}^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 + \{\cos h - \sin \pi \sin (\varphi - \varphi')\}^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2}}$$

Nach 9) ist nun

$$\varrho' \sin \omega' \cos h' = \varrho \sin \omega \cos h,$$

$$\varrho' \cos \omega' \cos h' = \varrho \cos \omega \cos h + r \sin (\varphi - \varphi'),$$

$$\varrho' \sin h' = \varrho \sin h - r \cos (\varphi - \varphi')$$

oder

$$\frac{\varrho'}{\varrho}\sin\omega'\cos h'=\sin\omega\cos h,$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho}\cos\omega'\cos h'=\cos\omega\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi'),$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho}\sin h'=\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi').$$

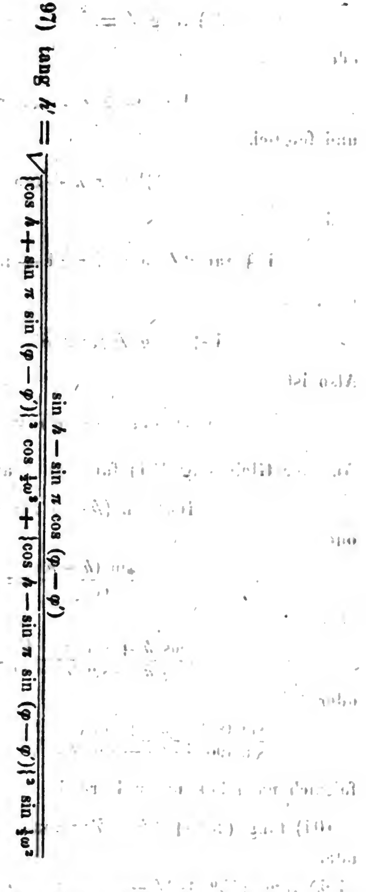
Also hat immer $\sin\omega'$ mit $\sin\omega$, $\cos\omega'$ mit

$$\cos\omega\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi'),$$

und $\sin h'$, folglich auch $\tan h'$, mit

$$\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')$$

gleiches Vorzeichen. Daher muss man in dem obigen Ausdrucke von tang h' das obere Zeichen nehmen, und folglich



$$97)\ \tang h' = \frac{\sin h - \sin \pi \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{\{\cos h + \sin \pi \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 + \{\cos h - \sin \pi \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2}}$$

setzen.

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist $\varphi = \varphi'$, und aus den obigen Gleichungen ergiebt sich daher unter dieser Voraussetzung auf der Stelle $\omega' = \omega$, so dass also, wenn man auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht nimmt, jederzeit das wahre und scheinbare Azimuth einander gleich sind. Ferner erhält man aus den obigen Formeln für die sphärische Erde leicht

$$98)\ \tang h' = \frac{\sin h - \sin \pi}{\cos h}$$

oder

$$99)\ \operatorname{tang} h' = \frac{2\sin\frac{1}{2}(h-\pi)\cos\frac{1}{2}(h+\pi)}{\cos h},$$

oder

$$100)\ \operatorname{tang} h' = \operatorname{tang} h - \frac{\sin\pi}{\cos h},$$

und folglich

$$101)\ \operatorname{tang} h - \operatorname{tang} h' = \frac{\sin\pi}{\cos h}$$

und

$$1 + \operatorname{tang} h \operatorname{tang} h' = 1 + \operatorname{tang} h^2 - \frac{\sin\pi\sin h}{\cos h^2},$$

d. i.

$$1 + \operatorname{tang} h \operatorname{tang} h' = \frac{1 - \sin\pi\sin h}{\cos h^2}.$$

Also ist

$$102)\ \operatorname{tang}(h-h') = \frac{\sin\pi\cos h}{1-\sin\pi\sin h}.$$

Aus der Gleichung 101) folgt auch auf der Stelle

$$103)\ \sin(h-h') = \sin\pi\cos h'$$

oder

$$\frac{\sin(h-h')}{\cos h'} = \sin\pi,$$

also

$$\frac{\cos h' + \sin(h-h')}{\cos h' - \sin(h-h')} = \frac{1+\sin\pi}{1-\sin\pi}$$

oder

$$\frac{\sin(90^\circ - h') + \sin(h-h')}{\sin(90^\circ - h') - \sin(h-h')} = \frac{1+\cos(90^\circ-\pi)}{1-\cos(90^\circ-\pi)},$$

folglich nach bekannten Formeln

$$104)\ \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}h - h') = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}h)\cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\pi)^2$$

oder

$$105)\ \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}h - h') = \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}h)\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi)^2.$$

Bis auf Glieder, die in Bezug auf $\sin\pi$ von der ersten Ordnung sind, ist nach 102) für die sphärische Erde

$$106)\ \operatorname{tang}(h-h') = \sin\pi\cos h$$

oder auch

$$107)\ h - h' = \pi\cos h,\quad h' - h = -\pi\cos h,$$

welche Formeln bekanntlich in der praktischen Astronomie sehr häufig gebraucht werden.

Ueberlegt man, dass die Formeln 89) aus den Formeln 28) erhalten werden, wenn man in letzteren für

$$\alpha,\ \delta,\ \alpha',\ \delta',\ \pi,\ A,\ \varphi$$

respective

$$\omega,\ h,\ \omega',\ h',\ \pi,\ 0,\ 90^\circ + (\varphi - \varphi')$$

setzt, so ergiebt sich aus 45) auf der Stelle

$$108)\ \begin{cases} \operatorname{tang} h' = \dfrac{\sin(\omega - \omega')}{\sin \omega} \left\{ \dfrac{\sin h}{\sin \pi \sin(\varphi - \varphi')} - \cot(\varphi - \varphi') \right\}, \\ \operatorname{tang} h' = \dfrac{\sin \omega'}{\sin \omega} \left\{ \operatorname{tang} h - \dfrac{\sin \pi \cos(\varphi - \varphi')}{\cos h} \right\}; \end{cases}$$

und aus 55) und 56)

$$109)\ \omega - \omega' = -\frac{k \sin \omega}{\sin 1''} - \frac{k^2 \sin 2\omega}{2\sin 1''} - \frac{k^3 \sin 3\omega}{3\sin 1''} - \frac{k^4 \sin 4\omega}{4\sin 1''} - \ldots\ldots$$

und

$$110)\ h - h' = \frac{\mu \sin(\zeta - h)}{\sin 1''} + \frac{\mu^2 \sin 2(\zeta - h)}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3 \sin 3(\zeta - h)}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4 \sin 4(\zeta - h)}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots,$$

wo nach 57) und 58)

$$111)\ k = -\frac{\sin \pi \sin(\varphi - \varphi')}{\cos h},\ \mu = \frac{\sin \pi \cos(\varphi - \varphi')}{\sin \zeta}$$

ist, und ζ aus der Formel

$$112)\ \cot \zeta = -\frac{\cos \frac{1}{2}(\omega + \omega')}{\cos \frac{1}{2}(\omega - \omega')} \operatorname{tang}(\varphi - \varphi')$$

bestimmt werden muss.

Ferner ist nach 64)

$$113)\ \begin{cases} \cot \eta = -\cos \omega \operatorname{tang}(\varphi - \varphi'), \\ \omega - \omega' = \dfrac{\pi \sin \omega}{\cos h} \sin(\varphi - \varphi'), \\ h - h' = \dfrac{\pi \sin(\eta - h)}{\sin \eta} \cos(\varphi - \varphi'). \end{cases}$$

Für die sphärische Erde ist $\zeta = 90^\circ$, $\mu = \sin \pi$, und folglich nach 110)

$$114)\ h-h'=\frac{\sin\pi\cos h}{\sin 1''}+\frac{\sin\pi^2\sin 2h}{2\sin 1''}-\frac{\sin\pi^3\cos 3h}{3\sin 1''}-\frac{\sin\pi^4\sin 4h}{4\sin 1''}+\ldots\ldots,$$

oder, wenn π in Secunden ausgedrückt ist:

$$115)\ h-h'=\pi\cos h+\tfrac{1}{2}\pi^2\sin 2h.\sin 1''-\tfrac{1}{3}\pi^3\cos 3h.(\sin 1'')^2-\tfrac{1}{4}\pi^4\sin 4h.(\sin 1'')^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 7.

Aufgabe. Aus dem scheinbaren Azimuth und der scheinbaren Höhe ω', h' das wahre Azimuth und die wahre Höhe ω, h zu finden.

Auflösung. Auf ganz ähnliche Art wie im vorigen Paragraphen erhält man aus 15) die Formeln

$$116)\begin{cases}\cot\omega=\dfrac{\cos\omega'\cos h'-\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}{\sin\omega'\cos h'},\\ \tan h=\dfrac{\sin\omega\{\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')\}}{\sin\omega'\cos h'};\end{cases}$$

aus denen sich leicht

$$117)\begin{cases}\tan\omega=\dfrac{\sin\omega'\cos h'}{\cos\omega'\cos h'-\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')},\\ \tan h=\dfrac{\cos\omega\{\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')\}}{\cos\omega'\cos h'-\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}\end{cases}$$

ergiebt. Da diese Gleichungen aus den Gleichungen 89) hervorgehen, wenn man in den letzteren für

$$\omega,\ h,\ \omega',\ h',\ \pi,\ \varphi,\ \varphi'$$

respective

$$\omega',\ h',\ \omega,\ h,\ -\pi',\ \varphi,\ \varphi'$$

setzt, so ist es leicht, die der jetzigen Aufgabe entsprechenden Formeln aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln unmittelbar abzuleiten.

Aus 91) erhält man auf diese Weise

$$118)\begin{cases}\sin(\omega-\omega')=\dfrac{\sin\pi'\sin\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}\tan h,\\ \cos(\omega-\omega')=\dfrac{\cos h'-\sin\pi'\cos\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}\tan h;\end{cases}$$

und aus 92) ergiebt sich

$$119)\ \tang(\omega-\omega')=\frac{\sin\pi'\sin\omega'\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h'-\sin\pi'\cos\omega'\sin(\varphi-\varphi')}.$$

Ferner erhält man aus 95)

$$120)\ \tang(\omega-\tfrac{1}{2}\omega')=\frac{\cos h'+\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h'-\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}\tang\tfrac{1}{2}\omega',$$

und aus 96) ergiebt sich

$$121)\left\{\begin{array}{l}\tang h=\dfrac{\cos(\omega-\frac{1}{2}\omega')}{\cos\frac{1}{2}\omega'}\cdot\dfrac{\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h'-\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')},\\ \tang h=\dfrac{\sin(\omega-\frac{1}{2}\omega')}{\sin\frac{1}{2}\omega'}\cdot\dfrac{\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h'+\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}.\end{array}\right.$$

Zu bemerken hat man auch, dass immer $\sin\omega$ mit $\sin\omega'$, $\cos\omega$ mit

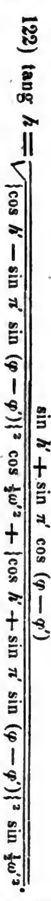
$$\cos\omega'\cos h'-\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi'),$$

und $\sin h$, also auch $\tang h$, mit

$$\sin h'+\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')$$

gleiches Vorzeichen hat.

Aus 97) ergiebt sich



$$122)\ \text{tang}\ h = \frac{\sin h' + \sin \pi' \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{\{\cos h' - \sin \pi' \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega'^2 + \{\cos h' + \sin \pi' \sin(\varphi - \varphi')\}^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega'^2}}.$$

Für die sphärische Erde ist nach 98)

$$123)\ \text{tang}\ h = \frac{\sin h' + \sin \pi'}{\cos h'},$$

oder

$$124)\ \text{tang}\ h = \frac{2\sin \frac{1}{2}(h' + \pi')\cos \frac{1}{2}(h' - \pi')}{\cos h'},$$

oder auch

$$125)\ \text{tang}\ h = \text{tang}\ h' + \frac{\sin \pi'}{\cos h'}.$$

Ferner ist nach 102)

$$126)\ \operatorname{tang}(h-h')=\frac{\sin\pi'\cos h'}{1+\sin\pi'\sin h'},$$

und nach 104)

$$127)\ \operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}h'\mp h)=\operatorname{tang}(45^\circ-\tfrac{1}{2}h')\cot(45^\circ-\tfrac{1}{2}\pi')^2$$

oder

$$128)\ \operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}h'-h)=\operatorname{tang}(45^\circ-\tfrac{1}{2}h')\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\pi')^2.$$

Nach 106) ist näherungsweise für die sphärische Erde

$$129)\ \operatorname{tang}(h-h')=\sin\pi'\cos h',$$

oder nach 107)

$$130)\ h-h'=\pi'\cos h',\quad h'-h=-\pi'\cos h'.$$

Für die sphäroidische Erde ist nach 108)

$$131)\ \begin{cases}\operatorname{tang} h=\dfrac{\sin(\omega-\omega')}{\sin\omega'}\left\{\dfrac{\sin h'}{\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}+\cot(\varphi-\varphi')\right\},\\[2ex] \operatorname{tang} h=\dfrac{\sin\omega}{\sin\omega'}\left\{\operatorname{tang} h'+\dfrac{\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}{\cos h'}\right\}.\end{cases}$$

Nach 109) ist

$$132)\ \omega-\omega'=\frac{k\sin\omega'}{\sin 1''}+\frac{k^2\sin 2\omega'}{2\sin 1''}+\frac{k^3\sin 3\omega'}{3\sin 1''}+\frac{k^4\sin 4\omega'}{4\sin 1''}+\ldots\ldots$$

und nach 110) ist

$$133)\ h-h'=-\frac{\mu\sin(\zeta-h')}{\sin 1''}-\frac{\mu^2\sin 2(\zeta-h')}{2\sin 1''}-\frac{\mu^3\sin 3(\zeta-h')}{3\sin 1''}-\frac{\mu^4\sin 4(\zeta-h')}{4\sin 1''}-\ldots\ldots\ldots,$$

wo

$$134)\ k=\frac{\sin\pi'\sin(\varphi-\varphi')}{\cos h'},\quad \mu=-\frac{\sin\pi'\cos(\varphi-\varphi')}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$135)\ \cot\zeta=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}\operatorname{tang}(\varphi-\varphi')$$

bestimmt werden muss.

Aus 113) ergiebt sich

$$136)\ \begin{cases}\cot\eta=-\cos\omega'\operatorname{tang}(\varphi-\varphi'),\\[1ex] \omega-\omega'=\dfrac{\pi'\sin\omega'}{\cos h'}\sin(\varphi-\varphi'),\\[2ex] h-h'=\dfrac{\pi'\sin(\eta-h')}{\sin\eta}\cos(\varphi-\varphi').\end{cases}$$

Für die sphärische Erde ist nach 114)

$$137)\quad h-h'=\frac{\sin\pi'\cos h'}{\sin 1''}-\frac{\sin\pi'^2\sin 2h'}{2\sin 1''}-\frac{\sin\pi'^3\cos 3h'}{3\sin 1''}+\frac{\sin\pi'^4\sin 4h'}{4\sin 1''}+\ldots\ldots\ldots,$$

oder, wenn π' in Secunden ausgedrückt ist,

$$138)\quad h-h'=\pi'\cos h'-\tfrac{1}{2}\pi'^2\sin 2h'.\sin 1''-\tfrac{1}{3}\pi'^3\cos 3h'.(\sin 1'')^2+\tfrac{1}{4}\pi'^4\sin 4h'.(\sin 1'')^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dass man in allen vorhergehenden Formeln für π' näherungsweise π schreiben kann, ist aus §. 2. bekannt. Wollte man sich dies aber nicht gestatten, so würde man sich auf folgende Art zu verhalten haben.

Nach 18) ist im vorliegenden Falle, wie man leicht findet,

$$139)\quad \varrho^2=r^2+\varrho'^2+2r\varrho'\{\sin h'\cos(\varphi-\varphi')-\cos\omega'\cos h'\sin(\varphi-\varphi')\},$$

oder, wenn man

$$140)\quad \cot\sigma=\cos\omega'\cot h'$$

setzt,

$$141)\quad \varrho^2=r^2+\varrho'^2+2r\varrho'\frac{\sin h'\sin(\sigma-\varphi+\varphi')}{\sin\sigma},$$

oder

$$142)\quad \varrho'^2+\frac{2r\sin h'\sin(\sigma-\varphi+\varphi')}{\sin\sigma}\varrho'=(\varrho-r)(\varrho+r),$$

mittelst welcher quadratischen Gleichung man ϱ', und daraus mittelst der Formel

$$\sin\pi'=\frac{r}{\varrho'}$$

π' bestimmen müsste. Auch ist, wie man leicht auf ähnliche Art wie in §. 4. findet,

$$143)\quad \operatorname{cosec}\pi'^2+\frac{2\sin h'\sin(\sigma-\varphi+\varphi')}{\sin\sigma}\operatorname{cosec}\pi'=\cot\pi^2,$$

mittelst welcher Gleichung π' unmittelbar gefunden werden kann.

§. 8.

Aufgabe. Aus der wahren Länge und Breite λ, β die scheinbare Länge und Breite λ', β' zu finden.

Auflösung. Die Ebenen der xy und XY seien respective die Ebene der Ekliptik und die Ebene des Aequators. Die mit einander zusammenfallenden positiven Theile der Axen der x und X seien von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Anfangspunkte des Widders oder dem Frühlingspunkte hin gerichtet. Die positiven Theile der Axen der y und Y gehen vom Mittelpunkte der Erde respective durch den neunzigsten Grad der Längen und den neunzigsten Grad der Rectascensionen. Die positiven Theile der Axen der z und Z sind vom Mittelpunkte der Erde respective nach dem Nordpole der Ekliptik und dem Nordpole des Aequators hin gerichtet. Dies vorausgesetzt ist, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet, und A und φ ganz dieselbe Bedeutung haben wie in §. 3., nach 12) offenbar

$$144)\left\{\begin{aligned}\tan \lambda' &= \frac{\sin\lambda\cos\beta - \sin\pi(\sin\varepsilon\sin\varphi + \cos\varepsilon\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi},\\ \tan\beta' &= \frac{\cos\lambda'\{\sin\beta - \sin\pi(\cos\varepsilon\sin\varphi - \sin\varepsilon\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos A\cos\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Beobachtungsorts in Bezug auf die Systeme der xyz und XYZ jetzt durch x_1, y_1, z_1 und X_1, Y_1, Z_1, dessen polare Coordinaten in Bezug auf das System der xyz durch L, B, r; so ist, weil A, φ, r offenbar seine polaren Coordinaten in Bezug auf das System der XYZ sind *):

$$145)\left\{\begin{aligned}x_1 &= r\cos L\cos B,\\ y_1 &= r\sin L\cos B,\\ z_1 &= r\sin B\end{aligned}\right.$$

und

$$146)\left\{\begin{aligned}X_1 &= r\cos A\cos\varphi,\\ Y_1 &= r\sin A\cos\varphi,\\ Z_1 &= r\sin\varphi.\end{aligned}\right.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1,\\ y_1 &= Y_1\cos\varepsilon + Z_1\cos(90^\circ - \varepsilon),\\ z_1 &= Y_1\cos(90^\circ + \varepsilon) + Z_1\cos\varepsilon;\end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1,\\ y_1 &= Y_1\cos\varepsilon + Z_1\sin\varepsilon,\\ z_1 &= -Y_1\sin\varepsilon + Z_1\cos\varepsilon;\end{aligned}$$

also nach 145) und 146)

*) Um die Begriffe zu fixiren, denken wir uns den Beobachtungsort auf der nördlichen Hälfte der Erde liegend.

$$147)\begin{cases}\cos L \cos B = \cos A \cos \varphi,\\ \sin L \cos B = \sin \varepsilon \sin \varphi + \cos \varepsilon \sin A \cos \varphi,\\ \sin B = \cos \varepsilon \sin \varphi - \sin \varepsilon \sin A \cos \varphi;\end{cases}$$

und folglich nach 144)

$$148)\begin{cases}\operatorname{tang} \lambda' = \dfrac{\sin \lambda \cos \beta - \sin \pi \sin L \cos B}{\cos \lambda \cos \beta - \sin \pi \cos L \cos B},\\ \operatorname{tang} \beta' = \dfrac{\cos \lambda'(\sin \beta - \sin \pi \sin B)}{\cos \lambda \cos \beta - \sin \pi \cos L \cos B};\end{cases}$$

wobei wir bemerken, dass L und B eigentlich bloss als zwei so, dass den drei Gleichungen 147) genügt wird, zu bestimmende Hülfswinkel zu betrachten sind.

Aus den Gleichungen 147) erhält man auf der Stelle

$$149)\begin{cases}\operatorname{tang} L = \dfrac{\sin \varepsilon + \cos \varepsilon \sin A \cot \varphi}{\cos A \cot \varphi},\\ \sin B = \sin \varphi(\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \sin A \cot \varphi);\end{cases}$$

und folglich, wenn man den Hülfswinkel w mittelst der Formel

$$150)\ \operatorname{tang} w = \sin A \cot \varphi$$

berechnet,

$$\operatorname{tang} L = \frac{\sin(\varepsilon + w)}{\cos A \cos w \cot \varphi},$$

$$\sin B = \frac{\sin \varphi \cos(\varepsilon + w)}{\cos w};$$

oder, weil

$$\cos w \cot \varphi = \frac{\sin w}{\sin A}$$

ist,

$$151)\begin{cases}\operatorname{tang} L = \dfrac{\operatorname{tang} A}{\sin w} \sin(\varepsilon + w),\\ \sin B = \dfrac{\sin \varphi}{\cos w} \cos(\varepsilon + w);\end{cases}$$

mittelst welcher Formeln L und B leicht berechnet werden können.

Nach 147) ist

$$152)\begin{cases}\cos L \cos B = \cos A \cos \varphi,\\ \sin L \cos B = \dfrac{\sin \varphi}{\cos w} \sin(\varepsilon + w),\\ \sin B = \dfrac{\sin \varphi}{\cos w} \cos(\varepsilon + w);\end{cases}$$

und da L und B so bestimmt werden müssen, dass diesen drei Gleichungen zugleich genügt wird, so muss man, indem man den absoluten Werth von B, was offenbar verstattet ist, nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ nimmt, mittelst der ersten der beiden Formeln 151) die Grösse L immer so bestimmen, dass

$$\cos L \text{ mit } \cos A$$

und

$$\sin L \text{ mit } \frac{\sin(\varepsilon + w)}{\cos w}$$

gleiches Vorzeichen erhält.

Die Gleichungen 148) gehen aus den Gleichungen 28) hervor, wenn man in den letzteren für

$$\alpha,\ \delta,\ \alpha',\ \delta',\ \pi,\ A,\ \varphi$$

respective

$$\lambda,\ \beta,\ \lambda',\ \beta',\ \pi,\ L,\ B$$

setzt. Also ist nach 31)

$$153)\ \begin{cases} \operatorname{tang}(\lambda - \lambda') = \dfrac{\sin\pi \cos B \sin(L-\lambda)}{\cos\beta - \sin\pi \cos B \cos(L-\lambda)}, \\ \operatorname{tang}(L - \lambda') = \dfrac{\cos\beta \sin(L-\lambda)}{\cos\beta \cos(L-\lambda) - \sin\pi \cos B}. \end{cases}$$

Nach 35) ist

$$154)\ \operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(L+\lambda) - \lambda'\} = \frac{\cos\beta + \sin\pi\cos B}{\cos\beta - \sin\pi\cos B} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L-\lambda),$$

und nach 36) ist

$$155)\ \begin{cases} \operatorname{tang}\beta' = \dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(L+\lambda)-\lambda'\}}{\sin\frac{1}{2}(L-\lambda)} \cdot \dfrac{\sin\beta - \sin\pi\sin B}{\cos\beta + \sin\pi\cos B}, \\ \operatorname{tang}\beta' = \dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(L+\lambda)-\lambda'\}}{\cos\frac{1}{2}(L-\lambda)} \cdot \dfrac{\sin\beta - \sin\pi\sin B}{\cos\beta - \sin\pi\cos B}. \end{cases}$$

Auch ist zu bemerken, dass

$$\cos\lambda' \text{ mit } \cos\lambda\cos\beta - \sin\pi\cos L\cos B,$$

$$\sin\lambda' \text{ mit } \sin\lambda\cos\beta - \sin\pi\sin L\cos B,$$

und $\sin\beta'$, also auch $\operatorname{tang}\beta'$, mit

$$\sin\beta - \sin\pi\sin B$$

gleiches Vorzeichen hat.

Nach 39) ist

$$156)\quad \tang \beta' = \frac{\sin \beta - \sin \pi \sin B}{\sqrt{(\cos \beta + \sin \pi \cos B)^2 \sin \tfrac{1}{2}(L-\lambda)^2 + (\cos \beta - \sin \pi \cos B)^2 \cos \tfrac{1}{2}(L-\lambda)^2}}.$$

Aus 45) ergiebt sich

$$157)\quad \begin{cases} \tang \beta' = \dfrac{\sin(\lambda - \lambda')}{\sin(L-\lambda)} \left(\dfrac{\sin \beta}{\sin \pi \cos B} - \tang B\right), \\ \tang \beta' = \dfrac{\sin(L - \lambda')}{\sin(L-\lambda)} \left(\tang \beta - \dfrac{\sin \pi \sin B}{\cos \beta}\right). \end{cases}$$

Nach 55) und 56) ist

$$158)\quad \lambda-\lambda'=\frac{k\sin(L-\lambda)}{\sin 1''}+\frac{k^2\sin 2(L-\lambda)}{2\sin 1''}+\frac{k^3\sin 3(L-\lambda)}{2\sin 1''}+\frac{k^4\sin 4(L-\lambda)}{4\sin 1''}+\ldots\ldots$$

und

$$159)\quad \beta-\beta'=\frac{\mu\sin(\zeta-\beta)}{\sin 1''}+\frac{\mu^2\sin 2(\zeta-\beta)}{2\sin 1''}+\frac{\mu^3\sin 3(\zeta-\beta)}{3\sin 1''}+\frac{\mu^4\sin 4(\zeta-\beta)}{4\sin 1''}+\ldots\ldots$$

wo

$$160)\quad k=\frac{\sin\pi\cos B}{\cos\beta},\quad \mu=\frac{\sin\pi\sin B}{\sin\zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$161)\quad \cot\zeta=\frac{\cot B\cos\{L-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\}}{\cos\frac{1}{2}(\lambda-\lambda')}$$

bestimmt werden muss.

Nach 64) ist

$$162)\quad\left\{\begin{array}{l}\cot\eta=\cot B\cos(L-\lambda),\\ \lambda-\lambda'=\dfrac{\pi\cos B}{\cos\beta}\sin(L-\lambda),\\ \beta-\beta'=\dfrac{\pi\sin B}{\sin\eta}\sin(\eta-\beta).\end{array}\right.$$

§. 9.

Aufgabe. Aus der scheinbaren Länge und Breite λ', β' die wahre Länge und Breite λ, β zu finden.

Auflösung. Ganz auf ähnliche Art wie in der vorigen Aufgabe erhält man aus 16)

$$163)\quad\left\{\begin{array}{l}\tang\lambda=\dfrac{\sin\lambda'\cos\beta'+\sin\pi'(\sin\varepsilon\sin\varphi+\cos\varepsilon\sin A\cos\varphi)}{\cos\lambda'\cos\beta'+\sin\pi'\cos A\cos\varphi},\\ \tang\beta=\dfrac{\cos\lambda\{\sin\beta'+\sin\pi'(\cos\varepsilon\sin\varphi-\sin\varepsilon\sin A\cos\varphi)\}}{\cos\lambda'\cos\beta'+\sin\pi'\cos A\cos\varphi};\end{array}\right.$$

welche Formeln aus 144) hervorgehen, wenn man für

$$\lambda,\ \beta,\ \lambda',\ \beta',\ \pi,\ \varepsilon,\ A,\ \varphi$$

respective

$$\lambda',\ \beta',\ \lambda,\ \beta,\ -\pi',\ \varepsilon,\ A,\ \varphi$$

setzt. Also hat man nach 150) und 151)

$$164)\ \tan w = \sin A \cot \varphi$$

und

$$165)\begin{cases}\tan L = \dfrac{\tan A}{\sin w}\sin(\varepsilon + w),\\[2mm] \sin B = \dfrac{\sin\varphi}{\cos w}\cos(\varepsilon + w);\end{cases}$$

und mittelst der ersten dieser beiden Gleichungen muss, indem man den absoluten Werth von B nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ nimmt, L so bestimmt werden, dass

$$\cos L \text{ mit } \cos A$$

und

$$\sin L \text{ mit } \frac{\sin(\varepsilon + w)}{\cos w}$$

gleiches Vorzeichen erhält.

Nach 153) ist

$$166)\begin{cases}\tan(\lambda' - \lambda) = -\dfrac{\sin\pi' \cos B \sin(L - \lambda')}{\cos\beta' + \sin\pi' \cos B \cos(L - \lambda')},\\[2mm] \tan(L - \lambda) = \dfrac{\cos\beta' \sin(L - \lambda')}{\cos\beta' \sin(L - \lambda') + \sin\pi' \cos B}.\end{cases}$$

Nach 154) und 155) ist

$$167)\ \tan\{\tfrac{1}{2}(L + \lambda') - \lambda\} = \frac{\cos\beta' - \sin\pi' \cos B}{\cos\beta' + \sin\pi' \cos B}\tan\tfrac{1}{2}(L - \lambda')$$

und

$$168)\begin{cases}\tan\beta = \dfrac{\sin\{\frac{1}{2}(L + \lambda') - \lambda\}}{\sin\frac{1}{2}(L - \lambda')}\cdot\dfrac{\sin\beta' + \sin\pi' \sin B}{\cos\beta' - \sin\pi' \cos B},\\[2mm] \tan\beta = \dfrac{\cos\{\frac{1}{2}(L + \lambda') - \lambda\}}{\cos\frac{1}{2}(L - \lambda')}\cdot\dfrac{\sin\beta' + \sin\pi' \sin B}{\cos\beta' + \sin\pi' \cos B}.\end{cases}$$

Auch ist zu bemerken, dass

$$\cos\lambda \text{ mit } \cos\lambda' \cos\beta' + \sin\pi' \cos L \cos B,$$
$$\sin\lambda \text{ mit } \sin\lambda' \cos\beta' + \sin\pi' \sin L \cos B,$$

und $\sin\beta'$, also auch $\tan\beta'$, mit

$$\sin\beta' + \sin\pi' \sin B$$

gleiches Vorzeichen hat.

Nach 156) ist

$$169)\quad \text{tang}\ \beta = \frac{\sin\beta' + \sin\pi' \sin B}{\sqrt{(\cos\beta' - \sin\pi' \cos B)^2 \sin \tfrac{1}{2}(L-\lambda')^2 + (\cos\beta' + \sin\pi' \cos B)^2 \cos \tfrac{1}{2}(L-\lambda')^2}}.$$

Nach 157) ist

$$170)\ \begin{cases} \text{tang}\ \beta = \dfrac{\sin(\lambda - \lambda')}{\sin(L - \lambda')} \left(\dfrac{\sin\beta'}{\sin\pi' \cos B} + \text{tang}\ B\right), \\ \text{tang}\ \beta = \dfrac{\sin(L - \lambda)}{\sin(L - \lambda')} \left(\text{tang}\ \beta' + \dfrac{\sin\pi' \sin B}{\cos\beta'}\right). \end{cases}$$

Nach 158) und 159) ist

$$171)\ \lambda' - \lambda = \frac{k \sin (L - \lambda')}{\sin 1''} + \frac{k^2 \sin 2(L - \lambda')}{2\sin 1''} + \frac{k^3 \sin 3(L - \lambda')}{3\sin 1''} + \frac{k^4 \sin 4(L - \lambda')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$172)\ \beta' - \beta = \frac{\mu \sin (\zeta - \beta')}{\sin 1''} + \frac{\mu^2 \sin 2(\zeta - \beta')}{2\sin 1''} + \frac{\mu^3 \sin 3(\zeta - \beta')}{3\sin 1''} + \frac{\mu^4 \sin 4(\zeta - \beta')}{4\sin 1''} + \ldots\ldots\ldots$$

wo

$$173)\ k = -\frac{\sin \pi' \cos B}{\cos \beta'},\ \mu = -\frac{\sin \pi' \sin B}{\sin \zeta}$$

ist, und ζ mittelst der Formel

$$174)\ \cot \zeta = \frac{\cot B \cos \{L - \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')\}}{\cos \frac{1}{2}(\lambda - \lambda')}$$

bestimmt werden muss.

Nach 162) ist

$$175) \begin{cases} \cot \eta = \cot B \cos (L - \lambda'), \\ \lambda - \lambda' = \frac{\pi' \cos B}{\cos \beta'} \sin (L - \lambda'), \\ \beta - \beta' = \frac{\pi' \sin B}{\sin \eta} \sin (\eta - \beta'). \end{cases}$$

Dass man in allen diesen Formeln näherungsweise π für π' setzen kann, wissen wir aus §. 2. Wollte man sich diese Näherung nicht gestatten, so müsste man auf ganz ähnliche Art, wie in §. 4. und §. 7. gezeigt worden ist, verfahren, was wir hier der Kürze wegen nicht wiederholen wollen.

§. 10.

Bezeichnet man durch D den aus dem Mittelpunkte C der Erde, durch D' den aus dem Orte O gesehenen scheinbaren Halbmesser des Weltkörpers W, so ist offenbar

$$176)\ \varrho \sin D = \varrho' \sin D',$$

und folglich

$$177)\ \frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Weil nun nach 9)

$$178)\begin{cases}\frac{\varrho'}{\varrho}\cos\lambda'\cos\beta'=\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos A\cos\varphi,\\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\lambda'\cos\beta'=\sin\lambda\cos\beta\\ \qquad -\sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi+\sin A\cos\Theta\cos\varphi),\\ \frac{\varrho'}{\varrho}\sin\beta'=\sin\beta-\sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi\\ \qquad -\sin A\sin\Theta\cos\varphi)\end{cases}$$

ist, so ist nach 177)

$$179)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\cos\lambda'\cos\beta'}{\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos A\cos\varphi}$$

$$=\frac{\sin\lambda'\cos\beta'}{\sin\lambda\cos\beta-\sin\pi(\sin\Theta\sin\varphi+\sin A\cos\Theta\cos\varphi)}$$

$$=\frac{\sin\beta'}{\sin\beta-\sin\pi(\cos\Theta\sin\varphi-\sin A\sin\Theta\cos\varphi)}.$$

Multiplicirt man die zweite und dritte der Gleichungen 178) respective mit $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$, und addirt die Gleichungen dann zu einander, so erhält man

$$\frac{\varrho'}{\varrho}(\sin\beta'\cos\Theta+\sin\lambda'\cos\beta'\sin\Theta)$$

$$=\sin\beta\cos\Theta+\sin\lambda\cos\beta\sin\Theta-\sin\pi\sin\varphi,$$

und folglich

$$180)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\sin\beta'\cos\Theta+\sin\lambda'\cos\beta'\sin\Theta}{\sin\beta\cos\Theta+\sin\lambda\cos\beta\sin\Theta-\sin\pi\sin\varphi},$$

welcher Ausdruck die Grösse A gar nicht mehr enthält.

Aus diesen allgemeinen Formeln erhält man, wenn die in §. 3. gebrauchten Zeichen auch jetzt ihre dortige Bedeutung behalten:

$$181)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\cos\alpha'\cos\delta'}{\cos\alpha\cos\delta-\sin\pi\cos A\cos\varphi}$$

$$=\frac{\sin\alpha'\cos\delta'}{\sin\alpha\cos\delta-\sin\pi\sin A\cos\varphi}$$

$$=\frac{\sin\delta'}{\sin\alpha-\sin\pi\sin\varphi}.$$

Eben so hat man, wenn die in §. 6. gebrauchten Zeichen auch jetzt ihre dortige Bedeutung behalten:

$$182)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\sin\omega'\cos h'}{\sin\omega\cos h}$$

$$=\frac{\cos\omega'\cos h'}{\cos\omega\cos h+\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')}$$

$$=\frac{\sin h'}{\sin h-\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$=\frac{\sin h'\sin\varphi'-\cos\omega'\cos h'\cos\varphi'}{\sin h\sin\varphi'-\cos\omega\cos h\cos\varphi'-\sin\pi\sin\varphi}.$$

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist $\varphi=\varphi'$, und folglich

$$183)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\sin h'}{\sin h-\sin\pi}$$

oder

$$184)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\sin h'}{2\sin\frac{1}{2}(h-\pi)\cos\frac{1}{2}(h+\pi)}.$$

Unter der in Rede stehenden Voraussetzung ist aber nach §. 6. auch immer $\omega=\omega'$, und folglich nach der ersten und zweiten der Gleichungen 182) auch

$$185)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\cos h'}{\cos h}.$$

Endlich hat man, wenn die in §. 8. gebrauchten Zeichen auch jetzt noch ihre dortige Bedeutung behalten:

$$186)\ \frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{\cos\lambda'\cos\beta'}{\cos\lambda\cos\beta-\sin\pi\cos A\cos\varphi}$$

$$=\frac{\sin\lambda'\cos\beta'}{\sin\lambda\cos\beta-\sin\pi(\sin\varepsilon\sin\varphi+\sin A\cos\varepsilon\cos\varphi)}$$

$$=\frac{\sin\beta'}{\sin\beta-\sin\pi(\cos\varepsilon\sin\varphi-\sin A\sin\varepsilon\cos\varphi)}$$

$$=\frac{\sin\beta'\cos\varepsilon+\sin\lambda'\cos\beta'\sin\varepsilon}{\sin\beta\cos\varepsilon+\sin\lambda\cos\beta\sin\varepsilon-\sin\pi\sin\varphi}.$$

Wegen der Kleinheit von D und D' kann man in allen vorhergehenden Formeln näherungsweise

$$\frac{\sin D'}{\sin D}=\frac{D'}{D}$$

setzen.

XLI.

Rein geometrische Behandlung der im Archiv der Mathematik und Physik Th. III. Heft 1. S. 40 vorgelegten geodätischen Aufgabe.

Von

Herrn Fr. Seydewitz

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Aufgabe.

Es seien (Taf. V. Fig. 1.) zwei Punkte M und M_1 gegeben; man soll durch den Punkt M drei unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien MA, MB, MC, durch den Punkt M_1 drei ebenfalls unter gegebenen Winkeln gegen einander geneigte gerade Linien M_1A, M_1B, M_1C so legen, dass das durch die Durchschnittspunkte A, B, C der Linien MA und M_1A, MB und M_1B, MC und M_1C bestimmte Dreieck einem gegebenen Dreiecke ähnlich sei.

Auflösung.

1) Betrachtet man eine jede der Figuren $MABC$ und M_1ABC zunächst für sich und unabhängig von der anderen, z. B. die erstere in der Lage der Figur $MA_1B_1C_1$, und denkt sich durch einen beliebigen Punkt M_1 der Linie MA_1 (oder MB_1, MC_1) mit A_1B_1 und A_1C_1 bezüglich die Parallelen M_1b und M_1c gelegt, welche die Linien MB_1 und MC_1 bezüglich in den Punkten b und c schneiden, so verhält sich:

$$M_1b : A_1B_1 = MM_1 : MA_1 = M_1c : A_1C_1,$$

also

$$M_1b : M_1c = A_1B_1 : A_1C_1.$$

Ferner ist

$$\angle bM_1c = \angle B_1A_1C_1 = \angle BAC.$$

Da nun $\triangle A_1B_1C_1$ oder ABC einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist, so ist das Verhältniss der Linien M_1b und M_1c, und der Winkel Winkel bM_1c gegeben. Es ist aber auch der Punkt M_1 und die gerade Linie MB_1 (MC_1), welcher der Punkt b angehört, gegeben, indem die Linie MA_1 als beliebige, und der Winkel

B_1MA_1 gegeben ist; also ist auch, nach einem bekannten Localtheorem, eine gerade Linie $c\gamma$ als Ort des Punktes c gegeben. Dieser Punkt gehört aber auch der Linie MC_1 (MB_1) an, welche durch den Winkel C_1MA_1 gegeben ist; also ist dieser Punkt selbst, und somit sind unter anderen die Winkel MM_1b und MbM_1, und die ihnen gleichen MAB und MBA gegeben. Dasselbe gilt andererseits von den Winkeln M_1AB und M_1BA.

2) Demnach sind auch die Winkel MAM_1 und MBM_1 gegeben, und, da die Punkte M und M_1, so sind auch die Kreise um MAM_1 und um MBM_1 gegeben, Es sind aber auch die Periphe-rie-Winkel MAB und MBA, folglich die ihnen zugehörigen Bogen dieser Kreise, und somit auf dem Umfange eines jeden ein Punkt S gegeben, in welchem derselbe von der geraden Linie AB geschnitten wird. Also ist die Linie AB der Richtung nach, die Punkte A und B und sonach auch der Punkt C gegeben — oder: weil der Kreis um MAM_1, auf seinem Umfange der Punkt S, und die Winkel MBS und M_1BS gegeben sind, so sind es auch die Kreise um MBS und um M_1BS, also ihr Durchschnittspunkt B, die gerade Linie SB u. s. w.

Konstruktion.

1) Man gebe den geraden Linien Mb und Mc gegen MM_1, und den geraden Linien M_1b_1 und M_1c_1 gegen M_1M bezüglich die Neigungen, welche die Linien MB und MC gegen MA, und die Linien M_1B und M_1C gegen M_1A erhalten sollen. Vom Punkte M_1 fälle man auf eine der Linien Mb, Mc, z. B. auf Mb, die Senkrechte $M_1\beta$, und construire über $M_1\beta$ ein dem gegebenen ähnliches Dreieck $M_1\beta\gamma$, mit Rücksicht auf die Art, wie die Winkel des ersteren den gegebenen Neigungswinkeln der Linien MA, MB, MC entsprechen sollen. Solcher Dreiecke gibt es auf jeder Seite von $M_1\beta$ eines. Auf $M_1\gamma$ errichte man in γ die Senkrechte γc, und verbinde den Punkt c, wo letztere die Linie Mc schneidet, mit M_1 durch M_1c; mache endlich $\angle cM_1b = \angle \gamma M_1\beta$ und verbinde den Punkt b, den Durchschnitt der Linien Mb und M_1b, mit c durch die Linie bc. So erhält man ein Dreieck M_1bc, und durch dasselbe Verfahren in Bezug auf den Punkt M und die Linien M_1b_1, M_1c_1 ein anderes Dreieck Mb_1c_1, welche beide dem gegebenen ähnlich sind.

2) Die entsprechenden Seiten M_1b und Mb_1, M_1c und Mc_1 dieser beiden Dreiecke mögen sich bezüglich in den Punkten S, O schneiden. Man beschreibe nun um die drei Dreiecke MM_1S (oder MM_1O), MbS und M_1b_1S drei Kreise, von denen die beiden letztern sich zum zweiten Mal im Punkte B schneiden, verbinde S mit B durch die gerade Linie SB, die den Kreis um MSM_1 zum zweiten Mal im Punkte A schneidet, endlich den Punkt O mit A durch OA, und den Punkt Q (oder Q_1), wo die Seite bc (oder b_1c_1) den Kreis um MSb (M_1Sb_1) noch einmal schneidet, mit dem Punkte B durch BQ, welche der Linie OA in C begegnet; so sind die Punkte A, B, C die Durchschnitte der gesuchten Linien.

Anmerkung: Da es zwei Dreiecke M_1bc und zwei Dreiecke Mb_1c_1 gibt, so hat die Aufgabe im Allgemeinen vier Auflösungen.

Beweis.

1) Da $\angle M_1\gamma c = \angle M_1\beta b = R$, und $\angle \gamma M_1\beta = \angle cM_1 b$, also auch $\angle \gamma M_1 c = \angle \beta M_1 b$, so ist $\Delta M_1 c\gamma \backsim \Delta M_1 b\beta$, also verhält sich $cM_1 : bM_1 = \gamma M_1 : \beta M_1$, folglich ist $\Delta M_1 bc$ dem $\Delta M_1\beta\gamma$ und somit dem gegebenen Dreiecke ähnlich. Ebenso ist ΔMb_1c_1 dem gegebenen ähnlich.

2) Da nun $\angle bM_1c = \angle b_1Mc_1 = \angle SM_1O$, so liegt der Punkt O auf dem Umfange des Kreises um MSM_1; folglich ist

$$\angle BAC = \angle OAS = \angle OM_1S = \angle bM_1c = \angle b_1Mc_1,$$

und

$$\angle CBA = \angle QbS = \angle cbM_1 = \angle c_1b_1M.$$

Also ist das Dreieck ABC dem gegebenen ähnlich.

3) Da einerseits

$$\angle MM_1S = \angle MAS, \text{ und } \angle MbS = \angle MBS;$$

andererseits

$$\angle M_1MS = \angle M_1AS, \text{ und } \angle M_1b_1S = \angle M_1BS;$$

so ist

$$\angle MM_1S - \angle MbS = \angle MAS - \angle MBS \text{ und}$$
$$\angle M_1MS - \angle M_1b_1S = \angle M_1AS - \angle M_1BS, \text{ d. h.}$$
$$\angle bMM_1 = \angle BMA \text{ und } \angle b_1M_1M = \angle BM_1A.$$

4) Da $\Delta MM_1b \backsim \Delta MAB$, $\Delta M_1bc \backsim \Delta ABC$,
$\Delta M_1Mb_1 \backsim \Delta M_1AB$, $\Delta Mb_1c_1 \backsim \Delta ABC$,

so verhält sich

$$MM_1 : MA = bM_1 : BA = cM_1 : CA;$$
$$M_1M : M_1A = b_1M : BA = c_1M : CA;$$

also

$$MM_1 : MA = cM_1 : CA;$$
$$M_1M : M_1A = c_1M : CA.$$

Aber auch

$$\angle cM_1M = \angle CAM, \text{ und } \angle c_1MM_1 = \angle CAM_1;$$

folglich

$$\Delta MM_1c \backsim \Delta MAC, \text{ und } \Delta M_1Mc_1 \backsim \Delta M_1AC,$$

also

$$\angle cMM_1 = \angle CMA, \text{ und } \angle c_1M_1M = \angle CM_1A;$$

q. e. d.

XLII.

Einige Sätze von Sechsecken, welche in oder um einen Kegelschnitt beschrieben sind.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Sei in Taf. V. Fig. 2. *abcdef* ein Sechseck, dessen Spitzen in der Peripherie eines Kegelschnitts liegen. Jede Hauptdiagonale wie *ad* theilt dasselbe in 2 Vierecke *abcd* und *defa*, in welchen wir die einander gegenüberliegenden Seiten verlängern, bis sie die Gerade *ad* in den Punkten α_1 und α_2 schneiden. Verfahren wir ebenso mit den übrigen Hauptdiagonalen und den ihnen gegenüberstehenden Seiten, so entstehen im Ganzen 6 solcher Durchschnitte α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Von diesen liegen 3 und 3 in einer Geraden, so dass es zwei solcher Geraden $\alpha_1\beta_2\gamma_2$ und $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ giebt, die wir p und q nennen wollen. Nach Pascal's Satz liegen aber auch die Durchschnitte der 3 Paar Gegenseiten, nämlich die Punkte δ_1, δ_2, δ_3, in einer Geraden r. Diese 3 Geraden p, q, r schneiden sich in einem Punkte.

Der vorstehende Doppelsatz lässt sich sehr einfach mit Hülfe der perspectivischen Projektion erweisen, indem man die letztere in ihrer einfachsten Gestalt anwendet, wie dies in einem früheren Aufsatze von mir (Archiv. Band I. S. 248) geschehen ist.

Man nehme zuerst die Gerade $\alpha_1\beta_1$ als Polare des Kegelschnitts an. Dann lässt sich derselbe so projiciren, dass die Projektion ein Kreis ist, in welchem die Geraden *AD* und *BC*, *BE* und *AF* einander parallel laufen (weil sich die entsprechenden Geraden *ad* und *bc*, *be* und *af* auf der Polare schneiden). Nun sagt aber ein Satz der Elementargeometrie:

> „Zwischen parallelen Sehnen liegen gleiche Kreisbogen“ und umgekehrt: „Sind die Bogen zwischen zwei Sehnen gleich, so laufen die letzteren einander parallel.“

Weil daher in Taf. V. Fig. 3. $AD \parallel BC$, $BE \parallel AF$; so folgt daraus

$$\text{arc } AB = \text{arc } CD, \; \text{arc } AB = \text{arc } EF$$

mithin auch

$$\text{arc } CD = \text{arc } EF$$

so dass also $CF \parallel DE$ ist. Der Durchschnitt γ_2 der entsprechen-

den Geraden cf und de in Taf. V. Fig. 2. muss daher mit auf der Polaren $\alpha_1\beta_1$ liegen.

Nimmt man ebenso $\alpha_2\beta_1$ als Polare an, so wird ganz analog gezeigt, dass auch γ_1 auf dieser Geraden liegen muss; und damit ist der erste Theil unseres Satzes bewiesen, dass nämlich sowohl $\alpha_1\beta_2\gamma_2$ als $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ eine Gerade bilden.

Es werde jetzt die Gerade $\delta_1\delta_2\delta_3$, in welcher die Durchschnitte der Gegenseiten liegen, als Polare angenommen und demgemäss der Kegelschnitt projizirt. Es entspricht ihm dann in Taf. V. Fig. 4. ein Kreis mit einem Sehnensechseck, dessen Gegenseiten einander paarweis parallel laufen. Auch von diesem muss der obenbewiesene Satz gelten, dass nämlich sowohl $\alpha_1\beta_2\gamma_2$ als $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ in einer Geraden liegen. Die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden ist leicht zu ermitteln. Denn man hat $\triangle AH\gamma_1 \backsim \triangle DH\gamma_2$, $\triangle CH\alpha_1 \backsim \triangle FH\alpha_2$, endlich $\triangle AHF \backsim \triangle CHD$, woraus der Reihe nach die Proportionen fliessen:

$$AH : H\gamma_1 = DH : H\gamma_2$$
$$CH : H\alpha_1 = FH : H\alpha_2$$
$$AH : DH = FH : CH.$$

Durch Vergleichung der letzteren mit den beiden ersten hat man

$$H\gamma_1 : H\gamma_2 = H\alpha_2 : H\alpha_1$$

oder

$$H\gamma_1 : H\alpha_2 = H\gamma_2 : H\alpha_1$$

woraus folgt, dass $\alpha_2\gamma_1 \parallel \alpha_1\gamma_2$, also auch die Gerade $\alpha_1\beta_2\gamma_2 \parallel \alpha_2\beta_1\gamma_1$ ist, mithin die gleichnamigen Geraden in Taf. V. Fig. 2. sich auf der Polare $\delta_1\delta_2\delta_3$ schneiden. D. h. die 3 Geraden $\alpha_1\beta_2\gamma_2$, $\alpha_2\beta_1\gamma_1$ und $\delta_1\delta_2\delta_3$ schneiden sich in einem Punkte w. z. b. w.

Vermöge der „théorie des polaires réciproques" leitet man daraus den folgenden Satz ab.

Sei abcdef ein beliebiges einem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck, dessen Seiten ab, bc, .. u. s. w. der Reihe nach a, b, c, d, e, f heissen mögen. Von den Durchschnitten je zweier Gegenseiten a und d, b und e, c und f ziehe man Gerade nach den jedesmaligen beiden übrigen Ecken des Sechsecks; also vom Durchschnitt (ad) nach c und f u. s. f. So entstehen 6 Gerade, diese schneiden sich zu 3 und 3 in einem Punkte, so dass es zwei solcher Punkte p, q giebt.

Nach Brianchon's Satz schneiden sich auch die 3 Hauptdiagonalen des Tangentensechsecks in einem Punkte r. Diese 3 Punkte p, q, r, liegen in einer Geraden.

Ein anderer mittelst der nämlichen Principien leicht zu erweisender Satz ist folgender.

In einem Sehnensechseck verlängere man diejenigen Diagonalen, welche von denselben ein Dreieck abschneiden, bis sich die einander gegenüberliegenden Diagonalen dieser Art schneiden. Man nenne ε_1 den Durchschnitt von bf und ce, ε_2 den von ac und df, ε_3 den von bd und ae. Je zwei dieser Punkte liegen mit einem der Durchschnitte der Gegenseiten δ_1, δ_2, δ_3 in einer Geraden. Es giebt daher 3 solcher Geraden, nämlich $\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_3\delta_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3\delta_1$.

In einem Tangentensechseck, dessen Seiten a, b, c, d, e, f heissen mögen, verbinde man mit einander die Durchschnitte der Seiten b, f und c, e, der Seiten c, a und d, f, und der Seiten d, b und e, a. So entstehen 3 Gerade ε_1, ε_2, ε_3. Sind ferner δ_1, δ_2, δ_3 die 3 Hauptdiagonalen des Sechsecks, so schneiden sich je zwei der Geraden ε mit einer der Diagonalen δ in einem Punkte.

XLIII.

Ueber ausgezeichnete Sehnen im Kreise, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

Von dem

Herrn Doctor Büchner

Lehrer der Mathematik am Herzoglichen Gymnasium zu Hildburghausen.

Von den Ergebnissen der folgenden Untersuchung finden sich hin und wieder einige in geometrischen Werken angeführt, der Verfasser kann sich aber nicht erinnern, diese alle, und zugleich unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt vereinigt, vorgefunden zu haben. Es waren sogar ihm etliche gänzlich neu und daher Grund, warum er die Frage in grösserer Ausdehnung der Untersuchung unterwarf. Auch der einfache gewöhnliche Weg, welchen er einschlug, wurde nicht ohne Ursache gewählt, da andere nicht so viele Antworten auf ein Mal darboten.

Wenn durch einen beliebig zu wählenden Punkt (γ, δ) eine gerade Linie so gelegt werden soll, dass sie einen gegebenen Kreis durchschneidet und dass die so entstehende Sehne einen ausgezeichneten Werth erhält, welchen Winkel muss sie mit der Abscissenaxe bilden?

Ist die Gleichung des gegebenen Kreises vom Mittelpunkte aus genommen: $y^2+x^2=r^2$, γ, δ Ordinate und Abscisse des willkührlich zu bestimmenden Punktes, und nimmt man letzteren noch zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird aus der ersten $(y+\gamma)^2+(x+\delta)^2=r^2$. Die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die Sehne die Abscissenaxe schneidet, heisse kurz z, so folgt für die Gleichung der in Rede stehenden Geraden: $y=zx$, wofern $\angle z$ kleiner als $90°$ vorausgesetzt wird. Dann folgt:

$$(zx+\gamma)^2+(x+\delta)^2=r^2,$$

daher

$$(z^2+1)x^2+2(z\gamma+\delta)x=r^2-\delta^2-\gamma^2,$$

daraus ergeben sich die zwei Abscissen der Durchschnittspunkte der eingelegten Linie mit dem Kreise, oder

$$\left.\begin{matrix}x\\x'\end{matrix}\right\}=\frac{-(z\gamma+\delta)\pm\sqrt{[(r^2-\delta^2-\gamma^2)\ (z^2+1)+(z\gamma+\delta)^2]}}{z^2+1},$$

somit die zugehörigen Ordinaten:

$$\left.\begin{matrix}y\\y'\end{matrix}\right\}=\frac{z(-(z\gamma+\delta)\pm\sqrt{[(r^2-\delta^2-\gamma^2)\ (z^2+1)+(z\gamma+\delta)^2]})}{z^2+1}.$$

Die Länge T der Sehne im Kreise aber wird durch

$$T=\sqrt{[(y-y')^2+(x-x')^2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{[(1+z^2)\ ((r^2-\delta^2-\gamma^2)\ (z^2+1)+(z\gamma+\delta)^2)]}}{z^2+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{[(r^2-\delta^2)\ z^2+2\gamma\delta z+(r^2-\gamma^2)]}}{\sqrt{(z^2+1)}}=2\sqrt{\left[r^2-\frac{(z\delta-\gamma)^2}{z^2+1}\right]}$$

$$=2\sqrt{[r^2-(\gamma\ \mathrm{Cos}\ z-\delta\ \mathrm{Sin}\ z)^2]}$$

sich ausdrücken lassen.

Hieraus folgt:

$$\frac{dT}{dz}=\frac{\sqrt{(z^2+1)}\ [\gamma\delta z^4+(\delta^2-\gamma^2)z^3-(\gamma^2-\delta^2)z-\gamma\delta]}{\sqrt{[(r^2-\delta^2)z^2+2\gamma\delta z+(r^2-\gamma^2)]}}.$$

Setzt man dieses $=0$, so folgt, wofern man die positiven Werthe von T berücksichtigt:

$$1)\ z^2+1=0;\ z=\sqrt{-1},$$

$$2)\ \mathrm{Sec}\ z^2=0.$$

Der Nenner bringt

$$3)\ z=\frac{-\gamma\delta\pm\sqrt{[\gamma^2\delta^2-(r^2-\gamma^2)\ (r^2-\delta^2)]}}{r^2-\delta^2}=\frac{-\gamma\delta\pm r\sqrt{(\gamma^2+\delta^2-r^2)}}{r^2-\delta^2}.$$

Dieser letzte Werth ist die trigonometrische Tangente des Winkels einer von dem Punkte (γ, δ) aus an den Kreis gehenden Berührenden. Ist aber

$$4)\ \gamma\delta z^4+(\delta^2-\gamma^2)z^3-(\gamma^2-\delta^2)z-\gamma\delta=0,$$

so wird dieser Werth sehr verschiedene Antworten auf unsere Frage geben, je nachdem $\delta\gtreqless\gamma$ angenommen wurde. Es sei fürs Erste $\delta>\gamma$, also $\gamma\delta z^4+(\delta^2-\gamma^2)z^3+(\gamma^2-\delta^2)z-\gamma\delta=0$, so folgt: a) $z=+1$; b) $z=-1$; c) $z=\frac{\gamma^2-\delta^2\pm\sqrt{[(\gamma^2-\delta^2)^2-4\gamma^2\delta^2]}}{2\gamma\delta}$.
Dieser letzte Ausdruck bleibt brauchbar so lange: $(\gamma^2-\delta^2)^2>4\gamma^2\delta^2$ ist.

Ueber die Art der eminenten Werthe in diesen Fällen gibt:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{-4\gamma\delta z^3 - 3(\delta^2 - \gamma^2)z^2 + (\delta^2 - \gamma^2)}{T}$$

Bescheid. Für $z = +1$ wird: $\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{(\gamma - \delta)^2 - 2\delta^2}{T}$, für $z = -1$ aber: $\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{(\gamma + \delta)^2 - 2\delta^2}{T}$. Es ergiebt sich demnach im ersten Falle wofern: $(\gamma - \delta)^2 \lesseqgtr 2\delta^2$ oder wofern $\gamma \lesseqgtr \delta(\pm\sqrt{2} + 1)$, im zweiten Falle, wofern: $(\gamma + \delta)^2 \lesseqgtr 2\delta^2$ oder $\gamma \lesseqgtr \delta(\pm\sqrt{2} - 1)$ ist, für das obere Zeichen ein Maximum, für das untere Zeichen ein Minimum, sobald T positiv ist, wie vorausgesetzt wurde.

Für $z = \frac{(\gamma^2 - \delta^2) \pm \sqrt{[(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]}}{2\gamma\delta}$ wird

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{[((\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2)\ ((\gamma^2 - \delta^2) \pm \sqrt{(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2})]}{4\gamma^2\delta^2 T}$$

$$= -\frac{[(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]z}{2\gamma\delta T}.$$

Hier gibt es demnach sowohl Maxima als Minima, je nachdem γ, δ, z das Zeichen ändert. Der Werth $(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2$ muss stets positiv bleiben, damit z möglich wird, T wurde positiv vorausgesetzt, und es hängt somit das Zeichen von $\frac{d^2T}{dz^2}$ bloss von denen des γ, δ und z ab. Die Grösse der ausgezeichneten Sehne wird hierfür aber:

$$T = \sqrt{\left\{4r^2 - \frac{[\gamma^2 + \delta^2 \mp \sqrt{((\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2)}]^2}{[\gamma^2 \pm \sqrt{((\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2)}]\ (\gamma^2 - \delta^2)}\right.}$$

Für $z = \pm 1$ lässt sich die Lage der Sehnen durch eine einfache Construction leicht anschaulich machen. Der allgemeine Ausdruck: $T = 2\sqrt{[r^2 - (\gamma \text{ Cos } z - \delta \text{ Sin } z)^2]}$ kann, je nachdem nämlich γ oder δ positiv oder negativ angenommen wird, durch die einzelnen Quadranten nur folgende Formen:

$$T = 2\sqrt{[r^2 - (\pm\gamma \text{ Cos } z \pm \delta \text{ Sin } z)^2]}$$

oder

$$T = 2\sqrt{[r^2 - (\pm\gamma \text{ Sin } z \pm \delta \text{ Cos } z)^2]}$$

haben. Ist nun in Taf. V. Fig. 5.: $FD = \gamma$, $CD = \delta$ und FA die unter dem Winkel $z = \angle FED$ durch den Kreis gehende Sehne, CM so wie DL perpendikulär zu dieser Linie, läuft ferner CL parallel derselben, so wird: $DK = \gamma$ Cos z, $DL = \delta$ Sin z, somit $KL = CM = \gamma$ Cos $z - \delta$ Sin z,

$$AB = 2\sqrt{[r^2 - (\gamma \text{ Cos } z - \delta \text{ Sin } z)^2]} = T.$$

Legt man aber Sehne PQ unter dem Winkel $z = \angle QHS$ ein, indem $TG = \gamma$, $CT = \delta$ genommen wird, fällt von C das Perpendikel CN auf PQ und zieht TR parallel hiermit, TW aber

perpendikulär zu CN, so folgt: $CW = \delta$ Sin z, $TR = \gamma$ Cos z, also $CN = \delta$ Sin $z + \gamma$ Cos z, daher ferner

$$PQ = 2\sqrt{[r^2 - (\delta \text{ Sin } z + \gamma \text{ Cos } z)^2]}.$$

Für $\angle z = 45^\circ$ wird Cos $z =$ Sin $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, Tang $z = 1$; $T = 2\sqrt{[r^2 - \frac{(\gamma + \delta)^2}{2}]}$. Für Tang $z = -1$ kommt aber $T = 2\sqrt{[r^2 - \frac{(\gamma - \delta)^2}{2}]}$. Zieht man demnach AB durch den gegebenen Punkt (γ, δ), oder auch PQ durch denselben parallel mit den Seiten eines im Kreise gezeichneten Quadrates, so sind dieses die gewünschten eminenten Sehnen für Fall a) und b).

Weniger kurz wird die Construction für:

$$z = \frac{\gamma^2 - \delta^2 \pm \sqrt{[(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]}}{2\gamma\delta},$$

oder für c) unter Nr. 4.; indessen gelingt sie, wenn man die Bedingung: $(\gamma^2 - \delta^2)^2 > 4\gamma^2\delta^2$ einhält und

$$z = \frac{\gamma}{2\delta} - \frac{\delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\gamma}{2\delta} - \frac{\delta}{2\gamma}\right)^2 - 1\right)}$$

auf die Form:

$$z = m - n \pm \sqrt{((m - n) + 1)((m - n) - 1)}$$

bringt, oder wofern man, und was noch mehr Klarheit über die Lage der durch diesen Werth bedingten Sehne verbreitet, folgender Betrachtung folgt. Nennt man den Winkel der Geraden, welche den Mittelpunkt des Kreises und den Punkt (γ, δ) verbindet, mit dem der Abscissenaxe parallelen Radius v, so wird $\frac{\gamma}{\delta} =$ Tg v, daher:

$$z = \frac{\text{Tg } v - \text{Cot } v}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\text{Tg } v - \text{Cot } v}{2}\right)^2 - 1\right)}$$

$$= -\text{Cot } 2v \pm \sqrt{((\text{Cot } 2v)^2 - 1)}.$$

Wäre in Taf. V. Fig. 5. nun $CE = EF$, $\angle FCE = \angle EFC = w$, so folgte $\angle FED = 2w = \angle z$, somit Tg $z =$ Tg $2w = \frac{2\text{Tg } w}{1 - (\text{Tg } w)^2}$, woraus ferner Tg $w = -$Cot $2w \pm \sqrt{((\text{Cot } 2w)^2 + 1)}$ sich ergibt. Der obige Werth von z lässt sich leicht auf diese Form zurückführen, sobald man nur: Cot $2v = \pm\sqrt{((\text{Cot } 2w)^2 + 1)}$ setzt. Dann kommt: $\mp\sqrt{((\text{Cot } 2w)^2 + 1)} \pm$ Cot $2w = z$. Da nun w ein ganz willkührlicher Winkel ist, so gibt die Substitution: Cot $2v = \pm\sqrt{((\text{Cot } 2w)^2 + 1)} = \pm\frac{1}{\text{Sin } 2w}$ oder $\pm$Sin $2w =$ tg $2v$ für v auch alle mögliche Grössen. Es entspricht demnach

$\text{Cot}\ 2w = \text{Cot}\ 45^\circ = 1$; durch diese Substitution: $\text{Cot}\ 2v = \sqrt{2} = \text{Cot}\ 35^\circ\ 16'$;

$\text{Cot}\ 2w = \text{Cot}\ 26^\circ\ 33' = 2$; . . . $\text{Cot}\ 2v = \sqrt{5} = \text{Cot}\ 24^\circ\ 6'$;

$\text{Cot}\ 2w = \text{Cot}\ 18^\circ\ 26' = 3$; . . . $\text{Cot}\ 2v = \sqrt{10} = \text{Cot}\ 17^\circ\ 33'$.

Allgemein, da immer $2v = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\ \lg\left[\frac{1 + \text{Tg}\ 2v\sqrt{-1}}{1 - \text{Tg}\ 2v\sqrt{-1}}\right]$, so folgt $2v = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\ \lg\left[\frac{1 \pm \text{Sin}\ 2w\sqrt{-1}}{1 \mp \text{Sin}\ 2w\sqrt{-1}}\right]$, wovon zwar hier immer nur der eine Werth, weiter unten aber auch der andere seine Verwendung findet. Lässt sich mit dieser Substitution noch die Bedingung: $(\text{Cot}\ 2v)^2 \geqq 1$, somit: $(\text{Cot}\ 2w)^2 \geqq 0$, vereinigen, so ist die Lage der Sehne immer möglich. Letzteres verlangt aber nur: $2w \leqq 90^\circ$, und es wird $\angle x$ der Aussenwinkel in einem gleichschenkligen Dreieck, von dessen gleichen Winkeln jeder v ist.

Dieses alles tritt ein, wofern $\gamma < \delta$ gesetzt wird, was sich recht gut mit $(\gamma^2 - \delta^2)^2 > 4\gamma^2\delta^2$ verträgt.

Nimmt man in der Formel:

$$\gamma\delta x^4 + (\delta^2 - \gamma^2)x^3 - (\gamma^2 - \delta^2)x - \gamma\delta = 0$$

aber $\gamma > \delta$, so genügt derselben: $x = \frac{\gamma}{\delta}$ und $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, nebst:

$$x = \frac{\delta^2 - \gamma^2}{2\gamma\delta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\delta^2 - \gamma^2}{2\gamma\delta}\right)^2 - 1\right]} = \frac{\delta}{2\gamma} - \frac{\gamma}{2\delta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\delta}{2\gamma} - \frac{\gamma}{2\delta}\right)^2 - 1\right]}$$

$$= \frac{\text{Cot } v - \text{Tg } v}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\text{Cot } v - \text{Tg } v}{2}\right)^2 - 1\right]}$$

$$= \text{Cot } 2v \pm \sqrt{[(\text{Cot } 2v)^2 - 1]},$$

nach den oben gemachten Voraussetzungen. Die ersten beiden Werthe geben für: T stets $2r$ und $2\sqrt{[r^2 - (\gamma^2 + \delta^2)]}$. Auf den letzten lassen sich aber die oben angegebenen Betrachtungen wieder in Anwendung bringen. $T = 2\sqrt{[r^2 - (\gamma^2 + \delta^2)]}$ ist eine kleinste Sehne, wie sich leicht an Taf. V. Fig. 6. zeigen lässt. Ist nämlich $CD = \delta$, $DE = \gamma$, so entspricht die auf CE senkrechte Linie MN dem eben genannten Werthe von T. Jede andere Sehne aber, wie PQ hat, wegen $CL < EC$, wofern CL perpendikulär zu QP steht, auch eine grössere Länge als MN. Dieses ist der Fall, welcher in manchen Lehrbüchern allein, als eine ausgezeichnete Sehne gebend, angeführt wird.

Endlich bringt noch für die vorige Gleichung 4). c): $\gamma = \delta$, $x = \pm\sqrt{-1}$ und $x = \pm 1$ und somit $T = 2r$.

Liegt der Punkt (γ, δ) auf der Peripherie des Kreises, oder ist $\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)} = r$, folglich $\frac{\gamma}{\delta} = x$, $T = 2r$, ebenfalls ein bekannter Fall.

Die ganze Untersuchung gibt nun unter der Voraussetzung, dass $\angle x > 90°$ ist, im Allgemeinen drei wesentlich verschiedene von demselben Punkte durch den Kreis gehende ausgezeichnete Sehnen, abgesehen von der nur unter Umständen als kleinstes anzusehenden Berührenden.

Setzt man gleich anfänglich $\angle x$ grösser als 90°, also etwa $= 90° + x'$ voraus, so kommt für Tang x nun überall: $-$Cot x', was zwar 4). a) und 4). b) nicht, wohl aber 4). c) wesentlich ändert. Wir erhalten im letzten Falle:

$$\text{Tang } x' = \frac{-2\gamma\delta}{\gamma^2 - \delta^2 \pm \sqrt{[(\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2]}}.$$

Aus 3) der Berührenden wird jetzt eine Normale, ein Resultat, was in mehren Lehrbüchern wieder als einzige ausgezeichnete Sehne angeführt sich vorfindet. Es ist leicht dieses auf andere Weise aufzufinden. Aus $T = \sqrt{[(y - \gamma)^2 + (x - \delta)^2]}$ folgt nämlich, wenn y und x Coordinaten der Peripherie, wie oben, bedeuten, wegen

$y^2 + x^2 = r^2$, also wegen $y = f(x)$, $\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{(y - \gamma)\frac{dy}{dx} + (x - \delta)}{\sqrt{[(y - \gamma)^2 + (x - \delta)^2]}}$,

wovon der Zähler $= 0$ genommen, die Gleichung einer vom Punkte

(γ, δ) aus an den Kreis gezogene Normale, wie bekannt, darstellt. Wegen $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ergibt sich: $x\gamma-y\delta=0$, $\frac{y}{x}=\frac{\gamma}{\delta}$, was $T=2r$ bringt.

Lässt man $\angle z > 180^\circ$ werden, so ändert sich in den anfänglichen Bestimmungen (für den ersten Quadranten) nichts, wohl aber für $\angle z > 270^\circ$, was alles leicht zu übersehen ist.

XLIV.

Anderer Beweis für die beiden Theoreme in Thl. III. Nr. XXXV.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Wenn

$$z^{2n}+A_1 z^{2n-1}+A_2 z^{2n-2}+\ldots\ldots+A_2 z^2+A_1 z+1=$$
$$(z^2+\alpha_1 z+1)(z^2+\alpha_2 z+1)\ldots\ldots(z^2+\alpha_n z+1)$$

gesetzt wird, so ist

$$1)\ A_m=C_m+(n-m+2)_1\ C_{m-2}+(n-m+4)_2\ C_{m-4}+\ldots.$$

$$2)\ C_m=A_m-[(n-m+1)_1+(n-m)_0]\ A_{m-2}$$
$$+[(n-m+2)_2+(n-m+1)_1]\ A_{m-4}$$
$$-[(n-m+3)_3+(n-m+2)_2]\ A_{m-6}+\ldots\ldots,$$

wo C_m die Summe der Producte zu m aus den Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ist.

Beweis. 1) Man hat bekanntlich

$$(z^2+\alpha_1 z+1)(z^2+\alpha_2 z+1)\ldots\ldots(z^2+\alpha_n z+1)=$$
$$(z^2+1+\alpha_1 z)(z^2+1+\alpha_2 z)\ldots\ldots(z^2+1+\alpha_n z)=$$
$$(z^2+1)^n+C_1(z^2+1)^{n-1}z+C_2(z^2+1)^{n-2}z^2+\ldots\ldots+C_n z^n.$$

Da nun A_m der Coeffizient von z^m in der Entwickelung dieses Ausdrucks ist, so darf man, um A_m zu finden, nur die mit z^m behafteten Glieder in der Entwickelung jedes einzelnen Summanden jenes Ausdrucks ausscheiden. Es enthalten aber die auf das Glied $C_m(z^2+1)^{n-m}z^m$ folgenden Glieder offenbar nur höhere Potenzen

von z als die $m$te. Das genannte Glied enthält die Potenz $C_m z^m$; das vorhergehende Glied $C_{m-1}(z^2+1)^{n-m+1} z^{m-1}$ enthält keine Potenz z^m, weil $(z^2+1)^{n-m+1}$ nur gerade Potenzen von z enthält. Das nächstvorhergehende Glied $C_{m-2}(z^2+1)^{n-m+2} z^{m-2}$ enthält die Potenz $(n-m+2)_1 C_{m-2} z^m$; und so abwechselnd weiter: 0, $(n-m+4)_2 C_{m-4} z^m$, 0, $(n-m+6)_3 C_{m-6} z^m$, $0, \ldots\ldots$ Folglich hat man

$$A_m = C_m + (n-m+2)_1 C_{m-2} + (n-m+4)_2 C_{m-4} + \ldots\ldots$$

2) Fügt man in der vorgegebenen Gleichung links die gleichweit von der Mitte abstehenden Glieder zu je einem Gliede zusammen, dividirt dann beiderseits durch z^n und setzt zur Abkürzung $z+z^{-1}=x$, so erhält man, wenn der Gleichförmigkeit wegen $1=A_0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} A_0(z^n+z^{-n}) + A_1(z^{n-1}+z^{-n+1}) + \ldots + A_{n-1}(z+z^{-1}) + A_n \\ = (z+z^{-1}+\alpha_1)(z+z^{-1}+\alpha_2)\ldots\ldots(z+z^{-1}+\alpha_n) \\ = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots\ldots(x+\alpha_n) \\ = x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \end{aligned}$$

Um nun C_m zu finden, darf man nur den ersten dieser Ausdrücke nach Potenzen von x entwickeln. Zu diesem Behufe setze man anstatt $A_0, A_1 \ldots\ldots A_n$ beziehlich $u^n, u^{n-1}, \ldots\ldots u^0$. Es ist klar dass wenn man den so entstehenden Ausdruck

$$(A) \ldots u^0 + (z+z^{-1})u + (z^2+z^{-2})u^2 + \ldots\ldots + (z^n+z^{-n})u^n$$

in Bezug auf x und u entwickelt und dann für $u^0, u, \ldots u^n$ beziehlich wieder $A_n, A_{n-1} \ldots\ldots A_0$ einsetzt, die verlangte Entwickelung erhalten werden wird. Die beiden geometrischen Progressionen des letztgenannten Ausdrucks sind leicht zu summiren, und man erhält

$$1 + \frac{zu - z^{n+1}u^{n+1}}{1-zu} + \frac{z^{-1}u - z^{-n-1}u^{n+1}}{1-z^{-1}u}$$

oder nach ausgeführter Addition

$$\frac{1-u^2}{1-xu+u^2} + \frac{(z^n+z^{-n})u^{n+2} - (z^{n+1}+z^{-n-1})u^{n+1}}{1-xu+u^2}.$$

Der zweite dieser Brüche hat in seiner Entwickelung nur höhere Potenzen von u als die $n$te. Da aber der ganze Ausdruck keine solchen Potenzen enthält, so folgt dass dieser zweite Bruch sich gegen die höheren Potenzen von u in der Entwickelung des ersten Bruchs $\frac{1-u^2}{1-xu+u^2}$ hebt, und dass also die verlangte Entwickelung des Ausdrucks (A) aus den ersten Gliedern der Entwickelung von $\frac{1-u^2}{1-xu+u^2}$ bis zur $n$ten Potenz von u einschliesslich besteht. Diese Entwickelung ist nun

$$\begin{aligned} 1 + u(x-u) + u^2(x-u)^2 + u^3(x-u)^3 + \ldots\ldots \\ - u^2 - u^3(x-u) - u^4(x-u)^2 - u^5(x-u)^3 - \ldots\ldots \end{aligned}$$

Sammelt man in diesem Ausdrucke die $(n-m)$ten Potenzen von x zusammen, so findet sich dass in den beiden Reihen die Glieder

$u^{n-m}(x-u)^{n-m}$ und $-u^{n-m+2}(x-u)^{n-m}$ beziehlich die ersten sind, welche eine solche Potenz enthalten, und dass der Coeffizient von x^{n-m} daher folgendermassen ausgedrückt ist:

$$u^{n-m}-(n-m+1)_1 u^{n-m+2}+(n-m+2)_2 u^{n-m+4}-\ldots\ldots$$
$$-u^{n-m+2}+(n-m+1)_1 u^{n-m+4}-\ldots\ldots$$

wo die Potenzen von u nur bis zur $n$ten einschliesslich fortzusetzen sind. Setzt man endlich für u^{n-m}, u^{n-m+2}, ... beziehlich wieder A_m, A_{m+2}, ... ein, so ergiebt sich der Coefficient von x^{n-m}, nämlich C_m,

$$C_m = A_m - [(n-m+1)_1 + (n-m)_0]A_{m-2}$$
$$+[(n-m+2)_2+(n-m+1)_1]A_{m-4}-\ldots\ldots$$

Anmerkung. Setzt man $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, während $A_0 = 1$ bleibt, so erhält man

$$C_0 = 1,\; C_1 = 0,\; C_2 = -[(n-1)_1 + (n-2)_0],\; C_3 = 0,$$
$$C_4 = [(n-2)_2 + (n-3)_1],\; C_5 = 0,$$
$$C_6 = -[(n-3)_3 + (n-4)_2], \ldots\ldots$$

folglich die bekannte Entwickelung

$$z^n + z^{-n} = x^n - [(n-1)_1 + (n-2)_0]x^{n-2}$$
$$+[(n-2)_2 + (n-3)_1]x^{n-4} - \ldots\ldots$$

oder $x = 2\cos y$ gesetzt, wodurch $z = \cos y + i \sin y$ wird,

$$2\cos ny = (2\cos y)^n - [(n-1)_1 + (n-2)_0]\,(2\cos y)^{n-2}$$
$$+[(n-2)_2 + (n-3)_1]\,(2\cos y)^{n-4} - \ldots$$

welche auch hätte zu Hülfe genommen werden können, um unmittelbar zum erwünschten Resultate zu gelangen.

Zusatz. In den oben bewiesenen beiden Formeln sind die Summen der Producte der Wurzeln der einen von den beiden Gleichungen

$$z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + \ldots + A_2 z^2 + A_1 z + 1 = 0,$$
$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0$$

durch die der andern ausgedrückt. Die Formeln für die Potenzsummen der Wurzeln derselben Gleichungen sind eben so leicht herstellbar und einfach. Bezeichnet nämlich S_m die Summe der $m$ten Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung, s_m die der zweiten, so findet sich:

$$s_m = S_m + mS_{m-2} + m_2 S_{m-4} + \ldots\ldots$$

$$S_m = s_m - [(m-1)_1 + (m-2)_0]s_{m-2}$$
$$+[(m-2)_2 + (m-3)_1]s_{m-4} - \ldots\ldots$$

In der ersten muss das letzte Glied um die Hälfte vermindert werden, wenn m gerade ist.

XLV.

Bemerkung über eine von Ivori gefundene Eigenschaft convokaler Ellipsoide.

Von dem

Herrn Doctor Haedenkamp

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Bekanntlich hat Ivori gefunden, dass es auf zweien convoka-
len Ellipsoiden je 2 correspondirende Punkte gebe, welche die Eigenschaft haben, dass die von diesen Punkten nach zweien anderen correspondirenden Punkten gezogenen Radien immer wieder gleich sind. Ich will hier zeigen, dass diese sogenannten correspondirenden Punkte die Durchschnittspunkte der beiden convokalen Hyperboloide (mit gebrochener und ununterbrochener Höhlung) mit den beiden convokalen Ellipsoiden sind. Man kann diesen Satz leicht aus der von Ivori selbst geführten Analyse herleiten. Der folgende Beweis deckt noch einige merkwürdige Beziehungen der 3 convokalen Oberflächen zweiter Ordnung auf.

Bezeichnen a, b, c die Quadrate der halben Axen eines Ellipsoids und x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes desselben. Legt man durch den Mittelpunkt des Ellpsoids eine Ebene, die parallel mit der durch (xyz) gelegten Tangenten-Ebene ist; so werden die Quadrate der halben Axen dieses Schnittes die wir durch r_1, r_2 bezeichnen, durch die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a-r}+\frac{y^2}{b-r}+\frac{z^2}{c-r}=1$$

bestimmt. Drückt man die Coordinaten xyz durch diese Axen aus, so hat man folgende, für viele Untersuchungen wichtige, Coordinaten-Transformation:

$$1.\quad x^2=\frac{a(a-r_1)(a-r_2)}{(a-b)(a-c)},\quad y^2=\frac{b(b-r_1)(b-r_2)}{(b-a)(b-c)},$$
$$z^2=\frac{c(c-r_1)(c-r_2)}{(c-a)(c-b)}.$$

Legt man nun durch den Punkt (xyz) die beiden Hyperboloiden mit gebrochener und ununterbrochener Höhlung, die dem gegebenen Ellipsoide convokal sind, und nennt man die Quadrate der halben Axen derselben $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$, so werden dieselben folgendermassen durch die Axen des Schnittes ausgedrückt,

$$2.\begin{cases} a_1 = a - r_1, \ b_1 = b - r_1, \ c_1 = c - r_1; \\ a_2 = a - r_2, \ b_2 = b - r_2, \ c_2 = c - r_2; \end{cases}$$

daher wird auch nach (1):

$$3. \quad x^2 = \frac{aa_1a_2}{(a-b)\ (a-c)}, \ y^2 = \frac{bb_1b_2}{(b-c)\ (b-a)}, \ z^2 = \frac{cc_1c_2}{(c-a)\ (c-b)}.$$

Die beiden Tangenten-Ebenen im Punkte (xyz) an die beiden convokalen Hyperboloiden gelegt, schneiden die Tangenten-Ebene, welche man in demselben Punkte (xyz) an das Ellipsoid legt, in Linien, die der Richtung der Axen des Schnittes parallel sind. Nennt man die Determinanten dieser Linien (die Abscissen der Winkel die diese Linien mit den Axen bilden, $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\zeta_1$, so erhält man leicht

$$\xi = \frac{x}{a_1}\Theta, \ \eta = \frac{y}{b_1}\Theta, \ \zeta = \frac{z}{c_1}\Theta,$$

$$\xi_1 = \frac{x}{a_2}\Theta_1, \ \eta_1 = \frac{y}{b_2}\Theta_1, \ \zeta_1 = \frac{z}{c_2}\Theta_1;$$

wo

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{x^2}{a_1{}^2} + \frac{y^2}{b_1{}^2} + \frac{z^2}{c_1{}^2} = \frac{(r_1 - r_2)^2}{a_1b_1c_1},$$

$$\frac{1}{\Theta_1{}^2} = \frac{x^2}{a_2{}^2} + \frac{y^2}{b_2{}^2} + \frac{z^2}{c_2{}^2} = \frac{(r_2 - r_1)^2}{a_2b_2c_2}.$$

Θ und Θ_1 sind die auf die genannte Tangenten-Ebene gefällten Perpendikel.

Da die Durchschnittslinien der Hyperboloiden mit dem Ellipsoide Krümmungslinien sind, so ergibt sich aus den Gleichungen (3), dass für die eine dieser Curven die eine Axe, und für die andere Curve die andere Axe der entsprechenden Schnitte constant ist. Die bekannten Gleichungen der Projectionen dieser Krümmungslinien lassen sich leicht aus den Gleichungen (1) in Verbindung mit der des Ellipsoids ableiten. Die Projectionen der Curven in der Ebene (xy) sind durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\frac{a-c}{a(a-r_1)}x^2 + \frac{b-c}{b(b-r_1)}y^2 = 1,$$

$$\frac{a-c}{a(a-r_2)}x^2 + \frac{b-c}{b(b-r_2)}y^2 = 1.$$

Die eine dieser Curven ist eine Ellipse, die andere eine Hyperbel, da die eine der Axen r_1 und r_2 zwischen a und b und die andere zwischen b und c liegt. Die Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte (xyz) sind:

$$\sqrt{\frac{r_1{}^3 r_2}{abc}}, \ \sqrt{\frac{r_2{}^3 r_1}{abc}}.$$

Mit Hülfe der vorhergehenden Coordinaten-Transformation findet man auch leicht die von Jacobi gefundene Gleichung der kürzesten

Linie auf einem dreiaxigen Ellipsoide, wie ich im 22. Bande d. J. f. d. r. u. a. M. S. 188 gezeigt habe.

Denken wir uns ferner ein zweites Ellipsoid, welches dem ersten convokal ist, dessen Quadrate der halben Axen durch $a_0 b_0 c_0$ bezeichnet werden sollen, so wird dieses die genannten Hyperboloide in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ nach (3) so ausgedrückt werden:

$$4. \quad x_0^2 = \frac{a_0 a_1 a_2}{(a-b)\,(a-c)}, \quad y_0^2 = \frac{b_0 b_1 b_2}{(b-a)\,(b-c)}, \quad z_0^2 = \frac{c_0 c_1 c_2}{(c-a)\,(c-b)}.$$

Die Relationen zwischen den Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte (xyz) und $(x_0 y_0 z_0)$ sind:

$$5. \quad \frac{x_0}{x} = \sqrt{\frac{a_0}{a}}, \quad \frac{y_0}{y} = \sqrt{\frac{b_0}{b}}, \quad \frac{z_0}{z} = \sqrt{\frac{c_0}{c}};$$

$$x_0^2 - x^2 + y_0^2 - y^2 + z_0^2 - z^2 = a_0 - a = b_0 - b = c_0 - c.$$

Denken wir uns jetzt zwei andere, den gegebenen Ellipsoiden convokale Hyperboloiden mit gebrochener und ununterbrochener Höhlung, die das erste und zweite Ellipsoid in Punkten schneiden, deren Coordinaten durch $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ bezeichnet werden, so hat man ebenso zwischen diesen Coordinaten die Relationen:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha} = \sqrt{\frac{a_0}{a}}, \quad \frac{\beta_0}{\beta} = \sqrt{\frac{b_0}{b}}, \quad \frac{\gamma_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{c_0}{c}};$$

$$\alpha_0^2 - \alpha^2 + \beta_0^2 - \beta^2 + \gamma_0^2 - \gamma^0 = a_0 - a = b_0 - b = c_0 - c.$$

Hieraus erhält man in Verbindung mit den Gleichungen (5):

$$\alpha_0 x = \alpha x_0, \quad \beta_0 y = \beta y_0, \quad \gamma_0 z = \gamma z_0$$

und folglich

$$(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 + (z_0 - \gamma)^2$$
$$= (x - \alpha_0)^2 + (y - \beta_0)^2 + (z - \gamma_0)^2;$$

welche Gleichung den Ivorischen Satz ausdrückt.

XLVI.

Mechanische Construction der Lemniscate.

Von dem

Herrn Doctor Haedenkamp

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Denkt man sich zwei gleiche Kreise, deren Mittelpunkte C und C', und bewegt eine Linie gleich der Axe CC' so, dass deren Endpunkte sich in entgegengesetzter Richtung in den Peripherien der beiden Kreise bewegen, so beschreibt die Mitte der Linie CC' die Fusspunktencurve einer Hyperbel, deren Gleichung

$$\frac{r^2}{4}\cos^2\psi-\left(\frac{d^2-r^2}{4}\right)\sin^2\psi=\varrho^2$$

ist; in welcher r der Radius der Kreise, d die Entfernung der Mittelpunkte und ϱ ein Radius der Curve. Macht man

$$d^2=2r^2,$$

so wird die Curve eine Lemniscate. Diese lässt sich hiernach leicht mechanisch construiren.

XLVII.

Allgemeines Theorem für die Verwandlung einer Funktion in eine unendliche Reihe.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Die Differenzialrechnung giebt bekanntlich die Methoden an, durch welche man eine beliebige Funktion $F(x)$ in eine Reihe

entwickeln kann, die nach den steigenden Potenzen einer anderen willkührlichen Funktion $\psi(x)$ fortläuft, so dass das Resultat die Form hat

$$F(x) = A_0 + A_1\psi(x) + A_2\overline{\psi(x)}^2 + A_3\overline{\psi(x)}^3 + \ldots .$$

Hierher gehört besonders der von Bürmann gefundene Satz *), aus welchem sich für $F(x) = b^x$, $\psi(x) = xa^x$ folgende Reihe ableiten lässt:

$$b^x = 1 + lb \cdot \frac{xa^x}{1} + lb(lb - 2la)^1 \cdot \frac{x^2a^{2x}}{1.2}$$
$$+ lb(lb - 3la)^2 \cdot \frac{x^3a^{3x}}{1.2.3} + \ldots$$

Diese giebt spezieller für $a = b = e$

$$e^x = 1 + \frac{xe^x}{1} - 1^1 \cdot \frac{x^2e^{2x}}{1.2} + 2^2 \cdot \frac{x^3e^{3x}}{1.2.3} - 3^3 \cdot \frac{x^4e^{4x}}{1.2.3.4} + \ldots . \quad (1).$$

Davon kann man folgende elegante Anwendung machen. Man multiplizire durchgängig mit $\varphi(x)dx$, wobei $\varphi(x)$ eine ganz beliebige Funktion bedeutet, und integrire zwischen den willkührlichen Gränzen a und b, so wird

$$\int_a^b e^x\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b xe^x\varphi(x)dx$$
$$- \frac{1^1}{1.2}\int_a^b x^2e^{2x}\varphi(x)dx + \frac{2^2}{1.2.3}\int_a^b x^3e^{3x}\varphi(x)dx$$
$$- \frac{3^3}{1.2.3.4}\int_a^b x^4e^{4x}\varphi(x)dx + \ldots .. \quad (2)$$

Setzen wir jetzt

$$\int_a^b e^{px}\varphi(x)dx = f(p) \ldots . \quad (3)$$

worin p eine willkührliche Constante bedeutet, so giebt eine $n$malige Differenziation nach p:

$$\frac{d^nf(p)}{dp^n} = \int_a^b \left(\frac{d^ne^{px}}{dp^n}\right) \varphi(x)dx = \int_a^b x^ne^{px}\varphi(x)dx$$

oder, wenn wir nach geschehener Differenziation $p = n$ setzen und den $n$ten Differenzialquotienten von $f(p)$ mit $f^n(p)$ bezeichnen,

$$f^n(p = n) = \int_a^b x^ne^{nx}\varphi(x)dx.$$

Nach dieser Formel und der vorhergehenden (3) lassen sich sämmtliche Integrale in (2) ausführen und wir erhalten sogleich den Satz:

*) M. s. hierüber: Lacroix, Traité du calcul différentiel etc. Tome III. pag. 623, oder: Supplemente zum math. Wörterb. Art. Bürmannische Reihe.

$$f(1) = f(0) + \frac{f^1(1)}{1} - \frac{f^2(2)}{1 \,.\, 2} + 2^2 \frac{f^3(3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - 3^3 \frac{f^4(4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \ldots . \quad (4)$$

Ob diese Reihe nach den Potenzen einer in $f(p)$ enthaltenen Constanten fortschreite oder nicht, hängt von der Natur der Funktion $f(p)$ ab, wie man aus den folgenden Beispielen erkennen wird.

1) Es sei $f(p) = (\alpha + p)^\mu$, so ist

$$f^n(p) = \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1)\ (\alpha + p)^{\mu - n},$$

also

$$f^n(n) = \mu(\mu - 1) \ldots . (\mu - n + 1)\ (\alpha + n)^{\mu - n}$$

und demnach:

$$(\alpha + 1)^\mu = \alpha^\mu + \frac{\mu}{1} (\alpha + 1)^{\mu - 1}$$

$$- 1^1 . \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \,.\, 2} (\alpha + 2)^{\mu - 2} + 2^2 . \frac{\mu(\mu - 1)\ (\mu - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (\alpha + 3)^{\mu - 3} - \ldots$$

oder, wenn wir die Binomialkoeffizienten mit μ_0, μ_1, μ_2 u. s. w. bezeichnen:

$$(\alpha + 1)^\mu = \mu_0 \alpha^\mu + \mu_1 (\alpha + 1)^{\mu - 1}$$

$$- 1^1 \mu_2 (\alpha + 2)^{\mu - 2} + 2^2 \mu_3 (\alpha + 3)^{\mu - 3} - 3^3 \mu_4 (\alpha + 4)^{\mu - 4} + \ldots . \quad (5)$$

Aus diesem bemerkenswerthen Satze liesse sich eine Reihe Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ableiten, wenn man nämlich Alles auf beiden Seiten nach Potenzen von α ordnete und die Coëffizienten gleicher Potenzen vergliche. So sind z. B. die Coeffizienten von α^0:

$$1 = 1^{\mu - 1} \mu_1 - 1^1 \,.\, 2^{\mu - 2} \mu_2 + 2^2 \,.\, 3^{\mu - 3} \mu_3 - 3^3 \,.\, 4^{\mu - 4} \mu_4 + \ldots$$

oder:

$$1 = 1^\mu \mu_1 - \frac{1^1}{2^2} 2^\mu \mu_2 + \frac{2^2}{3^3} 3^\mu \mu_3 - \frac{3^3}{4^4} 4^\mu \mu_4 + \ldots \quad (6).$$

Will man die Reihe (5) für andere als positive ganze μ brauchen, so muss man darauf sehen, dass sie convergirt, was übrigens in den meisten Fällen statt findet.

2) Es sei $f(p) = l(\alpha + p)$, so wird

$$f^n(p) = (-1)^{n-1} . \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n - 1)}{(\alpha + p)^n},$$

also

$$f^n(n) = (-1)^n . \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (n - 1)}{(\alpha + n)^n}$$

und folglich

$$l(\alpha + 1) = l\alpha + \tfrac{1}{1} \cdot \frac{1}{\alpha + 1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1^1}{(\alpha + 2)^2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{(\alpha + 3)^3} + \ldots . \quad (7)$$

Die Reihe convergirt für jedes positive α und giebt z. B. für $\alpha = 1$:

$$\Omega = \tfrac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1^1}{3^2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{2^2}{4^3} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{3^3}{5^4} + \ldots \quad (8)$$

3) Es sei $f(p) = \sin \alpha p$, so hat man $f^n(p) = \alpha^n \sin(\alpha p + \tfrac{1}{2} n\pi)$, folglich

$$\sin \alpha = \frac{\alpha \cos \alpha}{1} + 1^1 \cdot \frac{\alpha^2 \sin 2\alpha}{1.2} - 2^2 \cdot \frac{\alpha^3 \cos 3\alpha}{1.2.3} - 3^3 \cdot \frac{\alpha^4 \sin 4\alpha}{1.2.3.4} + \ldots \quad (9)$$

wobei das Zeichen von Paar zu Paar wechselt.

Man erhält ganz ähnlich für $f(p) = \cos \alpha p$:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha \sin \alpha}{1} - 1^1 \cdot \frac{\alpha^2 \cos 2\alpha}{1.2} + 2^2 \cdot \frac{\alpha^3 \sin 3\alpha}{1.2.3} + 3^3 \cdot \frac{\alpha^4 \cos 4\alpha}{1.2.3.4} - \ldots \quad (10)$$

Beide Reihen convergiren nur, wenn α ein ächter Bruch ist. Nimmt man $f(p) = e^{\alpha p}$, so kommt man auf die Gleichung (1) zurück.

XLVIII.

Auszug aus einem Schreiben von Herrn A. Göpel zu Berlin an den Herausgeber.

Ew. u. s. w. haben in dem Aufsatze Thl. III. Nr. XXIX. eine elegante Eigenschaft des Kreises bewiesen: dass wenn A_1, A_2, A_3, A_4 irgend vier auf einander folgende Punkte seiner Peripherie bezeichnen, dann für jeden andern Punkt O seiner Ebene immer

$$0 = A_1O^2 \cdot \Delta A_2A_3A_4 - A_2O^2 \cdot \Delta A_3A_4A_1 + A_3O^2 \cdot \Delta A_4A_1A_2 - A_4O^2 : \Delta A_1A_2A_3$$

ist. So wenig man auch diese Eigenschaft zu verallgemeinern strebt, so gelangt man doch zu einem Satze, der keineswegs einer besondern Kurve, sondern beliebigen fünf Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 und O in einer Ebene zukommt. Man erhält nämlich jenen Ausdruck

$$A_1O^2 \,.\, \Delta A_2A_3A_4 - \text{u. s. w.} = \text{Const.},$$

d. h. unabhängig von der Lage des Punktes O. Um dies zu beweisen, befolge ich den von Ihnen gebrauchten Gang, indem ich nur statt r beziehlich r_1, r_2, r_3, r_4 setze, um der Bedingung, dass alle 4 Punkte auf einem Kreise liegen, zu entgehen. Auf diese Art erhält man

$$x_1^2 + y_1^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_1 - 2by_1 = r_1^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_2 - 2by_2 = r_2^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_3 - 2by_3 = r_3^2$$
$$x_4^2 + y_4^2 + (a^2 + b^2) - 2ax_4 - 2by_4 = r_4^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehlich mit

$$\Delta A_2A_3A_4, \; -\Delta A_3A_4A_1, \; \Delta A_4A_1A_2, \; -\Delta A_1A_2A_3$$

so ergiebt sich, wegen der in Ihrer Abhandlung bewiesenen Gleichungen:

$$\Delta A_2A_3A_4 - \Delta A_3A_4A_1 + \Delta A_4A_1A_2 - \Delta A_1A_2A_3 = 0$$

$$(A) \quad x_1 \,.\, \Delta A_2A_3A_4 - x_2 \,.\, \Delta A_3A_4A_1 + x_3 \,.\, \Delta A_4A_1A_2 - x_4 \,.\, \Delta A_1A_2A_3 = 0$$

$$y_1 \,.\, \Delta A_2A_3A_4 - y_2 \,.\, \Delta A_3A_4A_1 + y_3 \,.\, \Delta A_4A_1A_2 - y_4 \,.\, \Delta A_1A_2A_3 = 0$$

schliesslich die Gleichung

$$(x_1^2 + y_1^2) \,.\, \Delta A_2A_3A_4 - (x_2^2 + y_2^2) \,.\, \Delta A_3A_4A_1 + (x_3^2 + y_3^2) \,.\, \Delta A_4A_1A_2 - (x_4^2 + y_4^2) \,.\, \Delta A_1A_2A_3$$
$$= r_1^2 \,.\, \Delta A_2A_3A_4 - r_2^2 \,.\, \Delta A_3A_4A_1 + r_3^2 \,.\, \Delta A_4A_1A_2 - r_4^2 \,.\, \Delta A_1A_2A_3.$$

Da nun die Ausdrücke $x_1^2 + y_1^2$, $x_2^2 + y_2^2$, u. s. w. die Quadrate der Abstände der Punkte A_1, A_2, u. s. w. vom Anfangspunkte der Coordinaten sind, da ferner dieser letztere, so wie auch der Punkt (a, b) ganz willkührlich sind, so erhellet aus dieser Gleichung die Wahrheit des Behaupteten. Um den Werth jener Constanten zu finden, darf man nur dem Punkte (a, b) eine solche besondere Lage geben, welche den obigen Ausdruck möglichst vereinfacht. Liegen z. B. die vier Punkte im Kreise, so sei (a, b) der Mittelpunkt desselben; alsdann ist $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ und man erhält, wegen der ersten der Gleichungen (A), Null als den Werth der Constanten, womit Ihr Lehrsatz bewiesen ist. Liegen die vier Punkte nicht im Kreise, so sei (a, b) z. B. der Mittelpunkt des durch A_1, A_2, A_3 gehenden Kreises; dann hat man $r_1 = r_2 = r_3$ und, wegen der ersten Gleichung (A),

$$A_1O^2 \,.\, \Delta A_2A_3A_4 - \text{u. s. w.} = (r_1^2 - r_4^2)\, \Delta A_1A_2A_3.$$

Hier ist offenbar $r_1^2 - r_4^2$ gleich der Potenz des Kreises $A_1A_2A_3$

in Bezug auf den Punkt A_4 oder $P(A_1A_2A_3)A_4$, welcher Ausdruck positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem A_4 innerhalb oder ausserhalb jenes Kreises liegt. Demnach hat man allgemein den Werth jener Constanten

$$= P(A_1A_2A_3)A_4 \,.\, \Delta A_1A_2A_3$$

oder auch

$$= - P(A_2A_3A_4)A_1 \,.\, \Delta A_2A_3A_4$$

u. s. w.

Alles Obige gilt natürlich auch noch, wenn man die Beschränkung, dass A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken eines convexen Vierecks sein sollen, aufhebt; wenn man nur noch bestimmt, dass diejenigen Dreiecksinhalte $\Delta A_1A_2A_3$, u. s. w., deren Ecken in derselben Reihenfolge liegen, als positiv (oder negativ), die andern aber als negativ (oder positiv) in Rechnung gezogen werden sollen.

Das Unternehmen des Herrn Strauch, eine Beispielsammlung zur Anwendung des Variationscalculs herauszugeben, ist um so verdienstlicher, je schwieriger eine solche Arbeit bei der Mangelhaftigkeit aller Vorarbeiten ist. Es wird daher gewiss Jeder wünschen, ein derartiges Werk in möglichster Vollkommenheit ausgeführt zu sehen. Um zu diesem Zwecke mit beizutragen und weil der Herr Verfasser selbst zu Bemerkungen über seine Abhandlung aufgefordert hat, trage ich kein Bedenken, Ihnen einige Betrachtungen darüber mitzutheilen; zumal da dieselben von so geringem Gewichte sind, dass sie nur zu ganz leichten Abänderungen veranlassen würden, falls Herr Strauch sie für begründet halten sollte. Auf S. 121. wird der Unterschied zwischen der Differential- und der Variationsrechnung darin gesetzt, dass die erstere die Werthe der unabhängigen Veränderlichen in andere Werthe übergehen lässt, während die letztere Functionen von Veränderlichen in andere Functionen sich verändern lässt. Diese Unterscheidung dürfte eben so unbestimmt sein, als es der Unterschied zwischen Werthen und Functionen ist; insofern nämlich im Calcul die sogenannten speciellen Werthe eben so gut durch unbestimmte Zeichen (Buchstaben) bezeichnet werden, als die Veränderlichen. Der Ausdruck der Unbekannten einer quadratischen Litteralgleichung ist z. B. ein solcher specieller Werth, insofern die Buchstabencoefficienten der Gleichung selbst specielle bestimmte Werthe bedeuten; er ist aber auch eine Function jener Coefficienten, insofern letztere jeden beliebigen Werth haben können. Es darf daher jeder gesuchte Werth einer Unbekannten als Function der übrigen in der Aufgabe vorkommenden Unbestimmten angesehen werden, und dieser Werth wird im Allgemeinen nur dadurch zu einem wirklichen speciellen Werthe, d. h. Ziffernwerthe werden können, dass allen genannten Unbestimmten solche specielle Werthe gegeben werden. Auf der andern Seite darf jede gesuchte Function als ein Werth der Unbekannten angesehen werden, weil man unter Werth jeden Ausdruck (mag er ein Ziffernwerth sein oder noch Buchstaben enthalten) versteht, dessen Substitution an die Stelle der Unbekannten den Bedingungen der Aufgabe genügt. Aus diesen Gründen glaube ich, dass die erwähnte Unterscheidung der Differential- von der Variationsrechnung nicht hinlänglich motivirt ist. Dies wird, ausser

an den vom Herrn Verf. gegebenen Beispielen, auch noch an zwei andern Stellen deutlich. Auf Seite 125. wird nämlich als einfachster Fall der mittelst der Variationsrechnung zu behandelnden Aufgabe vom Grössten und Kleinsten die Aufgabe angeführt: diejenige Function y von x zu finden, welche den Werth des Ausdrucks $f(x, y)$ für jeden beliebigen Werth des x zu einem Maximum macht. Diese Aufgabe lässt sich aber bekanntlich vollständig vermittelst der Differentialrechnung lösen; denn sie ist nicht verschieden von der Aufgabe, das Maximum von $f(\alpha, x)$ oder wenn man will $f(3, x)$ für veränderliche Werthe von x zu finden. Wenn daher der Herr Verf. S. 120. sagt, dass er die Probleme der ersten Abtheilung seines Werkes, die nur auf Urfunctionen führen, alle selbst zusammensetzen und ausführen musste, so kann man ihm hierin nicht ganz Recht geben. Es gehören vielmehr alle in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Differentialrechnung und in den Sammlungen für Maximumsaufgaben enthaltenen Beispiele in seine erste Abtheilung. — Die Unterscheidung S. 125. zwischen primären und secundären Grössten und Kleinsten muss nach dem Obigen für unwesentlich gehalten werden. Man wird bald gewahr, dass sie auf eine Eintheilung der Aufgaben in solche, die einen, und solche, die mehrere unabhängig Variable enthalten, hinausläuft. Es würde ebenso passend sein, sie je nach der Anzahl der letzteren in primäre, secundäre, tertiäre, u. s. w. einzutheilen. — Die Folgen der gerügten Ungenügendheit der Unterscheidungen ziehen sich bis in die Beispiele hin. Wenn in Aufgabe 2. die Gleichung $y = fx$ derjenigen Curve gesucht wird, bei welcher der Ausdruck

$$U = y(x - y) + x(a - x)$$

sowohl für alle Nachbarwerthe des x, als auch für alle Nachbarcurven von $y = fx$ ein Maximum wird, und wenn hierauf als Resultat $y = \frac{1}{2}x$ erhalten wird, so muss dies geradezu für unrichtig erklärt werden; denn die Aufgabe wird durch jede Curve gelöst, welche durch den Punkt $(x = \frac{2}{3}a,\ y = \frac{1}{3}a)$ geht. Die beiden Gleichungen $x - 2y = 0$ und $y + a - 2x = 0$, zu denen man gelangt, bestimmen in der That nur die beiden genannten Coordinatenwerthe für x und y und lassen den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ völlig unbestimmt. — Ein Gleiches gilt von den folgenden Aufgaben 17. 31. 32. — Bei dieser Gelegenheit muss ich darauf aufmerksam machen, dass einige von den Bestimmungsgleichungen dieser Aufgaben ohne augenscheinlichen Grund identische, die andern nicht identische Gleichungen genannt werden. So heisst z. B. in der Aufgabe 2. die Gleichung $x - 2y = 0$ eine identische, die andere aber $y + a - 2x = 0$ eine nicht identische. Diese Benennung hat vermuthlich irgend einen Zusammenhang mit der vorhin besprochenen Distinction zwischen Werthen und Functionen, Differential- und Variationsrechnung, primärem und secundärem Maximum; weicht aber dermassen vom üblichen Sprachgebrauch ab, dass eine desfalsige Erklärung des Herrn Strauch erwünscht gewesen wäre. — Die Behandlung der Aufgabe 52. scheint eher zu dem §. 24. von Ohm's Lehre des Grössten und Kleinsten zu gehören, als zu dem citirten §. 35., weil in der Aufgabe zwar ursprünglich 3 Variable eingeführt sind, eine derselben aber vermittelst einer der Bedingungsgleichungen eliminirt wird, ehe zur Variationenberechnung geschritten wird.

In der zur zweiten Abtheilung gehörigen Aufgabe 70. wird derjenige Werth von y verlangt, welcher $U=\frac{(py+x)^2}{2p}$ für alle der Gleichung $\frac{y}{p}\,.\,x-x^2=A$ genügende Nachbarwerthe von y zu einem Maximum macht. Es findet sich ein Werth von $y=\sqrt{\frac{x^2+A}{3}}$, wodurch

$$U=\frac{8x}{3}\,.\,\sqrt{\frac{x^2+A}{3}} \text{ und } \delta^2 U=\frac{4x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+A}}\,.\,\delta y^2$$

entsteht. Diese Werthe sind beide doppeldeutig. Um nun zwischen Maximum und Minimum zu entscheiden, sagt der Herr Verf., pflegt man sich in solchen Fällen dahin zu entscheiden, dass ein Kleinstes stattfinde, wenn U und $\delta^2 U$ einerlei Zeichen, ein Grösstes, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. Ein solcher Usus wäre schwerlich zu rechtfertigen, da er der gewöhnlichen Bedeutung der Ausdrücke Maximum und Minimum widerspräche; auch kommt er, so viel mir bekannt ist, nirgends vor. Bekanntlich findet im vorliegenden Falle ein Minimum statt, wenn x und y dieselben Zeichen, ein Maximum, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. Jene willkührliche Entscheidung veranlasst den Herrn Verf. zu einer kleinen Uebereilung in Betreff des zweiten, jener Aufgabe genügenden Werthes von y. Dieser ist $y=\sqrt{-x^2-A}$, woraus $U=0$, $\delta^2 U=-\frac{4x}{\sqrt{-x^2-A}}\,.\,\delta y^2$ entsteht; und es wird nun, wegen der Zeichenlosigkeit von U, behauptet, dass weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinde. Diese Behauptung meint der Herr Verf. auch noch durch den Umstand zu bestätigen, dass nicht allein für den gefundenen Kreis $y=\sqrt{-x^2-A}$, sondern auch für alle andere Kreise $U=0$ wird, und mithin von einem Maximum oder Minimum nicht die Rede sein könne. Allein hiergegen kann wohl mit Recht eingewandt werden, dass die besagten Kreise keineswegs die bedungenen Nachbarcurven sind, sondern dass die letzteren vielmehr in der vom Herrn Verf. selbst weiter unten gefundenen Gleichung $y=\sqrt{E(x^2+A)}$ enthalten sind, und folglich im vorliegenden Falle, wo $E=-1$ ist, beiderseits Ellipsen werden.

Im Allgemeinen könnte noch in Betreff der Aufgaben der zweiten Abtheilung angemerkt werden, dass man in den Fällen, wo das y durch mehr als eine Gleichung bedingt wird, meistentheils weit leichter zum Ziele gelangt (z. B. bei Aufgabe 82.), wenn man q und p eliminirt und mittelst Differentiation versucht, ob der für y gefundene Werth allen Gleichungen genügt, als wenn man eine der Bedingungsgleichungen integrirt und das Resultat derselben Probe unterwirft.

XLIX.

Ueber Parabeln im Raume.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wir denken uns, ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz allen unsern folgenden Betrachtungen zum Grunde legend, eine beliebige Parabel im Raume, und bezeichnen die Coordinaten des Brennpunkts und des Scheitels dieser Parabel in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem respective durch a, b, c und α, β, γ; so sind

$$1)\begin{cases} x-a=\dfrac{a-\alpha}{c-\gamma}(z-c), \\ y-b=\dfrac{b-\beta}{c-\gamma}(z-c) \end{cases}$$

oder

$$2)\begin{cases} x-\alpha=\dfrac{a-\alpha}{c-\gamma}(z-\gamma), \\ y-\beta=\dfrac{b-\beta}{c-\gamma}(z-\gamma) \end{cases}$$

die Gleichungen der Axe derselben. Fällen wir nun von einem beliebigen Punkte der Parabel, dessen Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden sollen, auf die Axe ein Perpendikel, und bezeichnen die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Perpendikels mit der Axe der Parabel durch ξ, η, ζ, die veränderlichen Coordinaten jetzt aber durch X, Y, Z; so sind

$$3)\begin{cases} X-x=\dfrac{x-\xi}{z-\zeta}(Z-z), \\ Y-y=\dfrac{y-\eta}{z-\zeta}(Z-z) \end{cases}$$

oder

$$4)\begin{cases} X-\xi=\dfrac{x-\xi}{z-\zeta}(Z-\zeta), \\ Y-\eta=\dfrac{y-\eta}{z-\zeta}(Z-\zeta) \end{cases}$$

die Gleichungen des in Rede stehenden Perpendikels, und nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie hat man also wegen 1) und 3) die Gleichung

$$1+\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\cdot\frac{x-\xi}{z-\zeta}+\frac{b-\beta}{c-\gamma}\cdot\frac{y-\eta}{z-\zeta}=0$$

oder

$$5)\quad (a-\alpha)(x-\xi)+(b-\beta)(y-\eta)+(c-\gamma)(z-\zeta)=0.$$

Weil aber der Punkt $(\xi\eta\zeta)$ in der Axe der Parabel liegt, so ist nach 2) auch

$$6)\quad \begin{cases}\xi-\alpha=\dfrac{a-\alpha}{c-\gamma}(\zeta-\gamma),\\[2mm] \eta-\beta=\dfrac{b-\beta}{c-\gamma}(\zeta-\gamma).\end{cases}$$

Da nun die Gleichung 5) auch auf folgende Art geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{array}{r}(a-\alpha)\,\{(x-\alpha)-(\xi-\alpha)\}\\ +(b-\beta)\,\{(y-\beta)-(\eta-\beta)\}\\ +(c-\gamma)\,\{(z-\gamma)-(\zeta-\gamma)\}\end{array}\right\}=0,$$

so ist

$$\left.\begin{array}{r}(a-\alpha)\,\{(x-\alpha)-\dfrac{a-\alpha}{c-\gamma}(\zeta-\gamma)\}\\[2mm] +(b-\beta)\,\{(y-\beta)-\dfrac{b-\beta}{c-\gamma}(\zeta-\gamma)\}\\[2mm] +(c-\gamma)\,\{(z-\gamma)-\dfrac{c-\gamma}{c-\gamma}(\zeta-\gamma)\}\end{array}\right\}=0,$$

und folglich

$$\zeta-\gamma=\frac{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}(c-\gamma).$$

Ueberhaupt aber erhält man nun mittelst dieser Formel und der Gleichungen 6) die folgenden Ausdrücke:

$$\xi-\alpha=\frac{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}(a-\alpha),$$

$$\eta-\beta=\frac{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}(b-\beta),$$

$$\zeta-\gamma=\frac{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}(c-\gamma);$$

und folglich

$$7)\quad (\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2$$
$$=\frac{\{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}.$$

Weil nun der Radius Vector eines jeden Punktes (xyz) der Parabel der Summe der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel und der Abscisse des in Rede stehenden Punktes in Bezug auf die Axe der Parabel als Axe, und deren Scheitel als Anfang der Abscissen gleich ist; so haben wir die Gleichung

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$=\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}$$
$$+\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2},$$

d. i. nach 7)

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$=\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}$$
$$\pm\frac{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}}$$

oder

$$\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\,.\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$=\quad (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2$$
$$\pm\{(a-\alpha)\ (x-\alpha)+(b-\beta)\ (y-\beta)+(c-\gamma)\ (z-\gamma)\},$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat, worüber auf folgende Art eine Entscheidung gegeben werden kann. Nähme man nämlich das untere Zeichen, so wäre

$$\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\,.\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2$$
$$-\{(a-\alpha)\ (x-a+(a-\alpha))+(b-\beta)\ (y-b+(b-\beta)).$$
$$+(c-\gamma)\ (z-c+(c-\gamma))\}$$
$$=-\{(a-\alpha)\ (x-a)+(b-\beta)\ (y-b)+(c-\gamma)\ (z-c)\}$$

und folglich

$$\frac{\{(a-\alpha)\ (x-a)+(b-\beta)\ (y-b)+(c-\gamma)\ (z-c)\}^2}{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\ \{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}}=1.$$

Die Gleichungen des dem Punkte (xyz) der Parabel entsprechenden Radius Vectors sind, wenn wieder X, Y, Z die veränderlichen Coordinaten bezeichnen:

$$8)\left\{\begin{array}{l} X-a=\dfrac{x-a}{z-c}\,(Z-c), \\[2ex] Y-b=\dfrac{y-b}{z-c}\,(Z-c). \end{array}\right.$$

Bezeichnen wir also jeden der beiden von diesem Radius Vector mit der Axe der Parabel eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch V; so ist wegen der Gleichungen 1) und 8) nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\cos V^2 = \frac{\left(1+\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\cdot\frac{x-a}{z-c}+\frac{b-\beta}{c-\gamma}\cdot\frac{y-b}{z-c}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\right)^2+\left(\frac{b-\beta}{c-\gamma}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{x-a}{z-c}\right)^2+\left(\frac{y-b}{z-c}\right)^2\right\}}$$

oder

$$\cos V^2 = \frac{\{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)+(c-\gamma)(z-c)\}^2}{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\cos V^2 = 1,\ \cos V = \pm 1,$$

also $V=0$ oder $V=180^\circ$, welches offenbar nur für den Scheitel der Parabel gilt. Daher muss man in der oben gefundenen Gleichung das obere Zeichen nehmen, folglich

$$9)\ \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\,.\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2$$
$$+\{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}$$

setzen, wo bloss noch zu untersuchen ist, ob diese Gleichung auch für den Scheitel der Parabel gilt, was aber offenbar der Fall ist, da diese Gleichung eine identische Gleichung wird, wenn man $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ setzt. Also gilt die Gleichung 9) oder die Gleichung

$$10)\ \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\,.\,\{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$
$$-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\}$$
$$=(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)$$

für jeden Punkt der Parabel.

Um die Gleichung 9) rational zu machen, quadrire man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, so erhält man

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}$$
$$=\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}^2$$
$$+(a-\alpha)^2(x-\alpha)^2+(b-\beta)^2(y-\beta)^2+(c-\gamma)^2(z-\gamma)^2$$
$$+2\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(a-\alpha)(x-\alpha)$$
$$+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}$$
$$+2(a-\alpha)(b-\beta)(x-\alpha)(y-\beta)$$
$$+2(b-\beta)(c-\gamma)(y-\beta)(z-\gamma)$$
$$+2(c-\gamma)(a-\alpha)(z-\gamma)(x-\alpha).$$

Der Theil auf der linken Seite des Gleichheitszeichens kann auf folgende Art dargestellt werden:

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\left\{\begin{array}{l}(x-\alpha)^2-2(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(a-\alpha)^2\\+(y-\beta)^2-2(b-\beta)\,(y-\beta)+(b-\beta)^2\\+(z-\gamma)^2-2(c-\gamma)\,(z-\gamma)+(c-\gamma)^2\end{array}\right\}$$

$$=\{(a-u)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}$$
$$-2\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}$$
$$+\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}^2.$$

Hebt man nun auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens der obigen Gleichung auf, was sich aufheben lässt, so erhält man

$$\{(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,(x-\alpha)^2$$
$$+\{(c-\gamma)^2+(a-\alpha)^2\}\,(y-\beta)^2$$
$$+\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\,(z-\gamma)^2$$
$$=4\{(a-u)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\,\{(a-\alpha)\,(x-\alpha)$$
$$+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\}$$

$$+2(a-\alpha)(b-\beta)(x-\alpha)(y-\beta)$$
$$+2(b-\beta)(c-\gamma)(y-\beta)(z-\gamma)$$
$$+2(c-\gamma)(a-\alpha)(z-\gamma)(x-\alpha),$$

und hieraus ergiebt sich leicht

$$11)\quad \{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2$$
$$+\{(c-\gamma)(y-\beta)-(b-\beta)(z-\gamma)\}^2$$
$$+\{(a-\alpha)(z-\gamma)-(c-\gamma)(x-\alpha)\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(a-\alpha)(x-\alpha)$$
$$+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}.$$

Wenn nun

$$12)\quad z=Ax+By+C$$

die Gleichung der Ebene ist, in welcher unsere Parabel liegt, so sind deren beide Gleichungen, durch welche dieselbe vollkommen charakterisirt wird, die Gleichungen 11) und 12), und zwischen den neun Constanten a, b, c; α, β, γ; A, B, C hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} Aa+Bb+C=c, \\ A\alpha+B\beta+C=\gamma. \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungen

$$c=Aa+Bb+C,$$
$$\gamma=A\alpha+B\beta+C,$$
$$z=Ax+By+C$$

folgt

$$c-\gamma=A(a-\alpha)+B(b-\beta),$$
$$z-\gamma=A(x-\alpha)+B(y-\beta).$$

Also ist offenbar

$$(c-\gamma)(y-\beta)-(b-\beta)(z-\gamma)$$
$$=-A\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\},$$
$$(a-\alpha)(z-\gamma)-(c-\gamma)(x-\alpha)$$
$$=-B\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\};$$

und folglich

$$\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2$$
$$+\{(c-\gamma)(y-\beta)-(b-\beta)(z-\gamma)\}^2$$
$$+\{(a-\alpha)(z-\gamma)-(c-\gamma)(x-\alpha)\}^2$$
$$=(1+A^2+B^2)\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2.$$

Daher kann man die Gleichung 11) auch unter der Form

$$13)\ (1+A^2+B^2)\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\{(a-\alpha)(x-\alpha)$$
$$+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}.$$

oder unter der Form

$$14)\ \frac{4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}}{1+A^2+B^2}$$
$$=\frac{\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2}{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)}$$

darstellen.

Weil $\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}$ die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel ist, so ist, wenn wir den Parameter unserer Parabel durch μ bezeichnen:

$$15)\ \mu=4\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2},$$

und die Gleichung 13) kann daher auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$16)\ (1+A^2+B^2)\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2$$
$$=\frac{\mu^2}{4}\{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}$$

oder

$$17)\ 4(1+A^2+B^2)\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2$$
$$=\mu^2\{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)+(c-\gamma)(z-\gamma)\}.$$

Wenn die Ebene, in welcher die Parabel liegt, die Ebene der xy ist, so verschwinden die Grössen A, B, c, γ, z, und die Gleichung der Parabel wird

$$18)\ 4\{(b-\beta)(x-\alpha)-(a-\alpha)(y-\beta)\}^2$$
$$=\mu^2\{(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)\}.$$

Nimmt man den Scheitel der Parabel als Anfang und deren Axe als Axe der x an, so verschwinden die Grössen α, β, b, und die Gleichung der Parabel wird

$$19)\ 4ay^2=\mu^2x.$$

Weil nun aber $4a=\mu$ ist, so geht diese Gleichung in die bekannte gewöhnliche Form

$$20)\ y^2=\mu x$$

der Gleichung der Parabel über.

§. 2.

Wir wollen nun die Gleichung der Projection unserer Parabel

im Raume auf der Ebene der xy entwickeln. Um diese Gleichung zu finden, müssen wir aus den beiden vorher gefundenen Gleichungen der Parabel im Raume die Grösse z eliminiren. Weil nach dem vorigen Paragraphen bekanntlich

$$z-\gamma=A(x-\alpha)+B(y-\beta)$$

ist, so ist

$$\begin{aligned}(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)+(c-\gamma)\,(z-\gamma)\\ =\{a-\alpha+(c-\gamma)A\}\,(x-\alpha)\\ +\{b-\beta+(c-\gamma)B\}\,(y-\beta),\end{aligned}$$

und nach 13) oder 17) ist also die Gleichung der Projection auf der Ebene der xy

$$\begin{aligned}21)\ (1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2\\ =4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\}\\ \times\{[a-\alpha+(c-\gamma)A]\,(x-\alpha)+[b-\beta+(c-\gamma)B]\,(y-\beta)\}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}22)\ 4(1+A^2+B^2)\,\{(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)\}^2\\ =\mu^2\{[a-\alpha+(c-\gamma)A]\,(x-\alpha)+[b-\beta+(c-\gamma)B]\,(y-\beta)\}.\end{aligned}$$

Um nun aber auch noch $c-\gamma$ zu eliminiren, hat man nach dem vorigen Paragraphen

$$c-\gamma=A(a-\alpha)+B(b-\beta),$$

und folglich

$$\begin{aligned}a-\alpha+(c-\gamma)A\\ =a-\alpha+A\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\},\\ b-\beta+(c-\gamma)B\\ =b-\beta+B\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\\ =(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}^2;\end{aligned}$$

oder, wenn der Kürze wegen im Folgenden

$$23)\ \Theta=(a-\alpha)A+(b-\beta)B$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}a-\alpha+(c-\gamma)A=a-\alpha+A\Theta,\\ b-\beta+(c-\gamma)B=b-\beta+B\Theta,\\ (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c\gamma-)^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2;\end{aligned}$$

so dass also die Gleichung der Projection unserer Parabel im Raume auf der Ebene der xy nach dem Obigen

$$24)\ (1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)\ (x-\alpha)-(a-\alpha)\ (y-\beta)\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\}$$
$$\times\{(a-\alpha+A\Theta)\ (x-\alpha)+(b-\beta+B\Theta)\ (y-\beta)\}$$

oder

$$25)\ 4(1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)\ (x-\alpha)-(a-\alpha)\ (y-\beta)\}^2$$
$$=\mu^2\{(a-\alpha+A\Theta)\ (x-\alpha)+(b-\beta+B\Theta)\ (y-\beta)\}$$

ist.

Nehmen wir den Scheitel $(\alpha\beta\gamma)$ der Parabel im Raume als den Anfang eines dem primitiven Systeme der xyz parallelen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ an, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$26)\ x_1=x-\alpha,\ y_1=y-\beta,\ z_1=z-\beta;$$

und die Gleichungen 24) und 25) lassen sich also auch unter der folgenden Form darstellen:

$$27)\ (1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=4\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\}$$
$$\times\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}$$

und

$$28)\ 4(1+A^2+B^2)\ \{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=\mu^2\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}.$$

Noch wollen wir bemerken, dass, wenn i den Neigungswinkel der Ebene, in welcher die Parabel im Raume liegt, gegen die Ebene der xy bezeichnet, nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$\cos i^2=\frac{1}{1+A^2+B^2}$$

ist, so dass man also die Gleichungen 27) und 28) auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$29)\ \{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=4\cos i^2\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\}$$
$$\times\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}$$

und

$$30)\ 4\{(b-\beta)x_1-(a-\alpha)y_1\}^2$$
$$=\mu^2\cos i^2\{(a-\alpha+A\Theta)x_1+(b-\beta+B\Theta)y_1\}.$$

Denkt man sich diese Gleichung gehörig entwickelt und auf Null gebracht, so sind die Coefficienten von x_1^2, y_1^2, x_1y_1 respective

$$4(b-\beta)^2,\ 4(a-\alpha)^2,\ -8(a-\alpha)\ (b-\beta),$$

und da nun offenbar

$$\{-8(a-\alpha)(b-\beta)\}^2-4\{4(a-\alpha)^2\}\{4(b-\beta)^2\}=0$$

ist, so ist nach der allgemeinen Theorie der Linien des zweiten Grades die Projection unserer Parabel im Raume auf der Ebene der xy, und eben so natürlich auch deren Projection auf der Ebene der xz und auf der Ebene der yz, eine Parabel.

Um nun die Projection auf der Ebene der xy etwas genauer zu untersuchen, müssen wir zuerst die folgenden allgemeinen Betrachtungen vorausschicken.

§. 3.

Wenn

$$Ax^2+By^2+2Cxy+Dx+Ey+F=0$$

die allgemeine Gleichung einer Parabel für rechtwinklige Coordinaten ist, und man will die Coordinaten p, q des Brennpunkts, und die Gleichung

$$y=Mx+N$$

der Directrix dieser Parabel finden; so bemerkt man sogleich, dass nach den Principien der analytischen Geometrie das Quadrat der Entfernung jedes Punktes (xy) der Parabel von dem Brennpunkte (pq)

$$(x-p)^2+(y-q)^2,$$

und das Quadrat der Entfernung des Punktes (xy) der Parabel von der Directrix

$$\frac{(y-Mx-N)^2}{1+M^2}$$

ist. Weil nun bekanntlich jeder Punkt einer Parabel vom Brennpunkte eben so weit entfernt ist wie von der Directrix, so erhält man die Gleichung

$$(x-p)^2+(y-q)^2=\frac{(y-Mx-N)^2}{1+M^2},$$

oder nach gehöriger Entwickelung die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} x^2+M^2y^2 \\ \quad +2Mxy \\ \quad -2\{p(1+M^2)+MN\}x \\ \quad -2\{q(1+M^2)-N\}y \\ \quad +(p^2+q^2)(1+M^2)-N^2 \end{array}\right\}=0,$$

welche offenbar mit der gegebenen Gleichung

$$x^2+\frac{B}{A}y^2+\frac{2C}{A}xy+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

identisch sein muss, wodurch man zu den folgenden Gleichungen geführt wird:

$$M^2 = \frac{B}{A},$$

$$M = \frac{C}{A},$$

$$p(1+M^2) + MN = -\frac{D}{2A},$$

$$q(1+M^2) - N = -\frac{E}{2A},$$

$$(p^2+q^2)\,(1+M^2) - N^2 = \frac{F}{A}.$$

Soll man den beiden ersten Gleichungen zugleich zu genügen im Stande sein, so muss offenbar

$$\frac{C^2}{A^2} = \frac{B}{A},$$

also $C^2 = AB$ oder

$$C^2 - AB = 0$$

sein, welches nach der Theorie der Linien des zweiten Grades bekanntlich wirklich der Fall ist, da die durch die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

charakterisirte Curve nach der Voraussetzung eine Parabel ist. Zu der Bestimmung von M hat man also

$$31)\quad M = \frac{C}{A},\quad M^2 = \frac{B}{A}.$$

Nun ist nach dem Obigen

$$p(1+M^2) = -\frac{D}{2A} - MN,$$

$$q(1+M^2) = -\frac{E}{2A} + N;$$

also

$$p^2(1+M^2)^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{D}{A}MN + M^2N^2,$$

$$q^2(1+M^2)^2 = \frac{E^2}{4A^2} - \frac{E}{A}N + N^2;$$

folglich, wenn man addirt,

$$(p^2+q^2)\,(1+M^2)^2$$
$$= \frac{D^2+E^2}{4A^2} - \frac{E-DM}{A}N + (1+M^2)N^2.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$(p^2+q^2)(1+M^2)=\frac{F}{A}+N^2,$$

also

$$(p^2+q^2)(1+M^2)^2=\frac{F}{A}(1+M^2)+(1+M^2)N^2$$

ist; so ist, wie sich auf der Stelle ergiebt, wenn man dies mit dem Vorhergehenden vergleicht,

$$\frac{D^2+E^2}{4A^2}-\frac{E-DM}{A}N=\frac{F}{A}(1+M^2),$$

also

$$\frac{E-DM}{A}N=\frac{D^2+E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}(1+M^2).$$

Nach dem Obigen ist, wie man leicht findet,

$$\frac{E-DM}{A}=\frac{AE-CD}{A^2},\quad \frac{F}{A}(1+M^2)=\frac{(A+B)F}{A^2};$$

also

$$32)\quad N=\frac{D^2+E^2-4(A+B)F}{4(AE-CD)}.$$

Endlich erhält man nun mittelst der Gleichungen

$$p(1+M^2)=-\frac{D}{2A}-MN,$$

$$q(1+M^2)=-\frac{E}{2A}+N$$

für die Coordinaten p, q des Brennpunkts leicht die folgenden Ausdrücke:

$$33)\quad \begin{cases} p=-\dfrac{2ADE-C(D^2-E^2)-4(A+B)CF}{4(A+B)(AE-CD)}, \\[2ex] q=\dfrac{2CDE+A(D^2-E^2)-4(A+B)AF}{4(A+B)(AE-CD)}; \end{cases}$$

oder

$$34)\quad \begin{cases} p=-\dfrac{(AE-CD)D+(AD+CE)E-4(A+B)CF}{4(A+B)(AE-CD)}, \\[2ex] q=-\dfrac{(AE-CD)E-(AD+CE)D+4(A+B)AF}{4(A+B)(AE-CD)}. \end{cases}$$

Für $F=0$ ist

$$35)\begin{cases} M=\frac{C}{A};\ M^2=\frac{B}{A} \\ N=\frac{D^2+E^2}{4(AE-CD)}, \\ p=-\frac{2ADE-C(D^2-E^2)}{4(A+B)\ (AE-CD)} \\ \quad =-\frac{(AE-CD)D+(AD+CE)E}{4(A+B)\ (AE-CD)}, \\ q=\frac{2CDE+A(D^2-E^2)}{4(A+B)\ (AE-CD)} \\ \quad =-\frac{(AE-CD)E-(AD+CE)D}{4(A+B)\ (AE-CD)}. \end{cases}$$

Von diesen Formeln wollen wir nun die folgenden Anwendungen auf die Projection unserer Parabel im Raume auf der Ebene der xy machen.

§. 4.

Die Gleichung 30) der Projection auf der Ebene der xy giebt gehörig entwickelt

$$\begin{aligned} 36)\ 0= &\ 4(b-\beta)^2x_1{}^2 \\ &+4(a-\alpha)^2y_1{}^2 \\ &-8(a-\alpha)\ (b-\beta)x_1y_1 \\ &-\mu^2 \cos i^2\ (a-\alpha+A\Theta)x_1 \\ &-\mu^2 \cos i^2\ (b-\beta+B\Theta)y_1, \end{aligned}$$

wofür wir der Kürze wegen

$$37)\ 0=\mathfrak{A}x_1{}^2+\mathfrak{B}y_1{}^2+2\mathfrak{C}x_1y_1+\mathfrak{D}x_1+\mathfrak{E}y_1$$

schreiben wollen, wo die Bedeutung der Symbole $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ von selbst erhellen wird.

Um zuerst die Gleichung der Directrix der Projection auf der Ebene der xy zu finden, haben wir nach 35) die folgenden Gleichungen:

$$M=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},\ N=\frac{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2}{4(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{D})}.$$

Führt man nun für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ihre aus dem Vorhergehenden bekannten Ausdrücke ein, so erhält man auf der Stelle

$$M=-\frac{a-\alpha}{b-\beta}$$

und

$$\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2=\mu^4 \cos i^4\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\},$$

so wie

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

$$=-4\mu^2\cos i^2(b-\beta)^2(b-\beta+B\Theta)$$
$$-4\mu^2\cos i^2(a-\alpha)(b-\beta)(a-\alpha+A\Theta)$$
$$=-4\mu^2\cos i^2(b-\beta)\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2\};$$

ınd folglich, weil nach §. 2.

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2,$$

ınd nach 15)

$$\mu^2=16\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2\},$$

ılso

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2=\tfrac{1}{16}\mu^2$$

st:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{D}=-\tfrac{1}{4}\mu^4\cos i^2(b-\beta).$$

Also ist nach dem Obigen

$$N=-\frac{\cos i^2\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{b-\beta},$$

und folglich

$$38)\quad y_1=-\frac{a-\alpha}{b-\beta}x_1-\frac{\cos i^2\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{b-\beta},$$

oder

$$39)\quad y-\beta=-\frac{a-\alpha}{b-\beta}(x-\alpha)$$
$$-\frac{\cos i^2\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{b-\beta},$$

oder

$$40)\quad y-\beta=-\frac{a-\alpha}{b-\beta}(x-\alpha)-\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{(b-\beta)(1+A^2+B^2)},$$

oder

$$41)\quad (a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)=$$
$$-\cos i^2\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\},$$

oder

$$42)\quad (a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)=$$
$$-\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{1+A^2+B^2}$$

die Gleichung der Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy.

Auch ist

$$(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+2\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\Theta+(A^2+B^2)\Theta^2$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2+(1+A^2+B^2)\Theta^2$$
$$=\tfrac{1}{16}\mu^2+\frac{\Theta^2}{\cos i^2}=\frac{\mu^2\cos i^2+16\Theta^2}{16\cos i^2},$$

und folglich auch

$$43)\quad y-\beta=-\frac{a-\alpha}{b-\beta}(x-\alpha)-\frac{\mu^2\cos i^2+16\Theta^2}{16(b-\beta)}$$

oder

$$44)\quad (a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)=-\frac{\mu^2\cos i^2+16\Theta^2}{16},$$

oder

$$45)\quad (a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)=-(\Theta^2+\tfrac{1}{16}\mu^2\cos i^2)$$

die Gleichung der Directrix der Projection auf der Ebene der xy.

Die Gleichung der durch die Punkte (ab) und $(\alpha\beta)$ gehenden geraden Linie, d. i. die Gleichung der Projection der Axe der Parabel im Raume auf der Ebene der xy, ist

$$46)\quad y-\beta=\frac{b-\beta}{a-\alpha}(x-\alpha),$$

und weil nun

$$1-\frac{a-\alpha}{b-\beta}\cdot\frac{b-\beta}{a-\alpha}=0$$

ist, so steht nach bekannten Principien der analytischen Geometrie die Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy auf der Projection der Axe der Parabel im Raume auf der Ebene der xy senkrecht, und die Projection der Axe der Parabel im Raume auf der Ebene der xy ist daher jederzeit ein Durchmesser der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy, oder der Axe dieser Projection parallel.

§. 5.

Um nun ferner die Coordinaten des Brennpunkts der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy zu finden, haben wir nach 36)

$$\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2=\mu^4\cos i^4\{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2\},$$

und folglich

$$2\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}(\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2)$$

$$=4(b-\beta)\mu^4\cos i^4\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2]\\+2(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)\end{array}\right\}$$

$$=4(b-\beta)\mu^4\cos i^4\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)]\\-(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)]\end{array}\right\}$$

und

$$2\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}+\mathfrak{A}(\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2)$$

$$=4(b-\beta)\mu^4\cos i^4\left\{\begin{array}{l}(b-\beta)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2]\\-2(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)\end{array}\right\}$$

$$=-4(b-\beta)\mu^4\cos i^4\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)]\\+(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)]\end{array}\right\}.$$

Weil nun ferner

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{D})=-(b-\beta)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\mu^4\cos i^2$$

ist, so ist, wenn p, q die Coordinaten des Brennpunkts der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy in Bezug auf das primitive System der xyz bezeichnen, nach 35)

$$47)\quad \begin{cases} p-\alpha = \dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{array}{l} (a-\alpha)\ [(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2] \\ +2(b-\beta)\ (a-\alpha+A\Theta)\ (b-\beta+B\Theta) \end{array} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}, \\[2ex] q-\beta = -\dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{array}{l} (b-\beta)\ [(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2] \\ -2(a-\alpha)\ (a-\alpha+A\Theta)\ (b-\beta+B\Theta) \end{array} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}; \end{cases}$$

oder

$$48)\quad \begin{cases} p-\alpha = \dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{array}{l} (a-\alpha+A\Theta)\ [(a-\alpha)\ (a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\ (b-\beta+B\Theta)] \\ -(b-\beta+B\Theta)\ [(a-\alpha)\ (b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\ (a-\alpha+A\Theta)] \end{array} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}, \\[2ex] q-\beta = \dfrac{\cos i^2 \left\{ \begin{array}{l} (a-\alpha+A\Theta)\ [(a-\alpha)\ (b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\ (a-\alpha+A\Theta)] \\ +(b-\beta+B\Theta)\ [(a-\alpha)\ (a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\ (b-\beta+B\Theta)] \end{array} \right\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}; \end{cases}$$

oder

$$
49)\quad \begin{cases} p-\alpha = \dfrac{\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2] \\ +2(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)\end{array}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}, \\[2ex] q-\beta = -\dfrac{\left\{\begin{array}{l}(b-\beta)\,[(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2] \\ -2(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)\end{array}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}; \end{cases}
$$

oder

$$
50)\quad \begin{cases} p-\alpha = \dfrac{\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)] \\ -(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)]\end{array}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}, \\[2ex] q-\beta = \dfrac{\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha+A\Theta)\,[(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)] \\ +(b-\beta+B\Theta)\,[(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)]\end{array}\right\}}{(1+A^2+B^2)\,\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}. \end{cases}
$$

Aus den vorhergehenden Formeln erhält man durch leichte Rechnung

$$
51)\quad \begin{cases} (a-\alpha)\,(p-\alpha)-(b-\beta)\,(q-\beta) \\ = \cos i^2\,\{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2\}, \\ (b-\beta)\,(p-\alpha)+(a-\alpha)\,(q-\beta) \\ = 2\cos i^2\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta); \end{cases}
$$

oder

$$52)\ \begin{cases} (a-\alpha)\,(p-\alpha)-(b-\beta)\,(q-\beta) \\ =\dfrac{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2}{1+A^2+B^2}, \\ (b-\beta)\,(p-\alpha)+(a-\alpha)\,(q-\beta) \\ =\dfrac{2(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta)}{1+A^2+B^2}. \end{cases}$$

Auch findet man leicht

$$(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2=\frac{\cos i^4\ \{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2},$$

also

$$53)\ \sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}=\frac{\cos i^2\ \{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}}$$

oder

$$54)\ \sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}=\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{(1+A^2+B^2)\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}},$$

und folglich

$$55)\ \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\ .\ \sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}$$
$$=\frac{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2}{1+A^2+B^2}.$$

Daher kann man nach 42) die Gleichung der Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy auch unter der folgenden Form darstellen:

$$56)\ (a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)$$
$$=-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\ .\ \sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}.$$

§. 6.

Die Axe der Projection der Parabel im Raume geht durch den Brennpunkt (pq) und ist nach §. 4. der durch die Punkte (ab) und $(\alpha\beta)$ gehenden Linie parallel. Also ist

$$57)\ y-q=\frac{b-\beta}{a-\alpha}\,(x-p)$$

oder

$$58)\ (a-\alpha)\,(y-\beta)-(b-\beta)\,(x-\alpha)$$
$$=(a-\alpha)\,(q-\beta)-(b-\beta)\,(p-\alpha)$$

die Gleichung der Axe der Projection auf der Ebene der xy. Führt man nun für $p-\alpha$ und $q-\beta$ ihre oben gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man für die Gleichung der Axe leicht

$$59)\quad (a-\alpha)(y-\beta)-(b-\beta)(x-\alpha)$$
$$=\frac{2\{(a-\alpha)(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)(b-\beta+B\Theta)\}\times\{(a-\alpha)(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)(a-\alpha+A\Theta)\}}{(1+A^2+B^2)\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}$$

oder

$$60)\quad (a-\alpha)(y-\beta)-(b-\beta)(x-\alpha)$$
$$=\frac{2\cos i^2\{(a-\alpha)(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)(b-\beta+B\Theta)\}\times\{(a-\alpha)(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)(a-\alpha+A\Theta)\}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}.$$

Es ist aber

$$(a-\alpha)(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)(b-\beta+B\Theta)$$
$$=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+\Theta^2=\tfrac{1}{16}\mu^2$$

und

$$(a-\alpha)(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)(a-\alpha+A\Theta)$$
$$=\{(a-\alpha)B-(b-\beta)A\}\Theta$$
$$=\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\{(a-\alpha)B-(b-\beta)A\};$$

also

$$61)\quad (a-\alpha)(y-\beta)-(b-\beta)(x-\alpha)$$
$$=\frac{\mu^2\cos i^2\{(a-\alpha)A+(b-\beta)B\}\{(a-\alpha)B-(b-\beta)A\}}{8\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}$$

die Gleichung der Axe der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy.

§. 7.

Nach 56) ist

$$(a-\alpha)(x-\alpha)+(b-\beta)(y-\beta)$$
$$=-\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}$$

die Gleichung der Directrix der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy, und folglich, wenn wir den Parameter dieser Projection durch μ_1 bezeichnen, da die Entfernung des Brennpunkts von der Directrix der halbe Parameter, d. i. $\frac{1}{2}\mu_1$ ist, nach den Principien der analytischen Geometrie, wie wan leicht findet:

62) $\frac{1}{2}\mu_1^{\,2} = \frac{\{(a-\alpha)(p-\alpha)+(b-\beta)(q-\beta)+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}\}^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}$.

Nun ist aber, wie man leicht findet, nach 49)

$$\frac{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\ \{(a-\alpha)\,(p-\alpha)+(b-\beta)\,(q-\beta)\}}{\cos i^2}$$

$$=\{(a-\alpha)^2-(b-\beta)^2\}\ \{(a-\alpha+A\Theta)^2-(b-\beta+B\Theta)^2\}$$
$$+4(a-\alpha)\,(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\,(b-\beta+B\Theta),$$

und nach 53)

$$\frac{\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}}{\cos i^2}$$

$$=\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\,\{(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2\}.$$

Also ist, wie man durch leichte Rechnung findet,

$$\frac{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}{\cos i^2}\left\{\begin{array}{l}(a-\alpha)\,(p-\alpha)+(b-\beta)\,(q-\beta)\\ +\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}\end{array}\right\}$$

$$=2\{(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)\}^2$$

$$=\frac{1}{128}\mu^4,$$

und folglich

$$(a-\alpha)\,(p-\alpha)+(b-\beta)\,(q-\beta)$$
$$+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\,.\,\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}$$
$$=\frac{\mu^4\cos i^2}{128\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}}.$$

Daher ist nach 62)

$$63)\quad \tfrac{1}{2}\mu_1=\frac{\mu^4\cos i^2}{128\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}}$$

oder

$$64)\quad \mu_1=\frac{\mu^4\cos i^2}{64\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 8.

Es ist nun noch übrig, die Coordinaten des Scheitels der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy zu finden, wozu man auf folgendem Wege gelangen kann.

Wenn wir der Kürze wegen

$$k=(a-\alpha+A\Theta)^2+(b-\beta+B\Theta)^2$$

und

$$k'=\frac{\begin{array}{c}2\{(a-\alpha)\,(a-\alpha+A\Theta)+(b-\beta)\,(b-\beta+B\Theta)\}\\ \times\{(a-\alpha)\,(b-\beta+B\Theta)-(b-\beta)\,(a-\alpha+A\Theta)\}\end{array}}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}$$

setzen, so sind nach 41) und 60)

$$(a-\alpha)\,(x-\alpha)+(b-\beta)\,(y-\beta)=-k\cos i^2$$

und

$$(b-\beta)\,(x-\alpha)-(a-\alpha)\,(y-\beta)=-k'\cos i^2$$

die Gleichungen der Directrix und der Axe. Bezeichnen wir also durch p', q' die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Directrix

und der Axe, so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die beiden Gleichungen:

$$(a-\alpha)(p'-\alpha)+(b-\beta)(q'-\beta)=-k\cos i^2,$$
$$(b-\beta)(p'-\alpha)-(a-\alpha)(q'-\beta)=-k'\cos i^2;$$

aus denen sich

$$65)\quad \begin{cases} p'-\alpha=-\dfrac{(a-\alpha)k+(b-\beta)k'}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\cos i^2, \\ q'-\beta=-\dfrac{(b-\beta)k-(a-\alpha)k'}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2}\cos i^2 \end{cases}$$

ergiebt. Hat man mittelst dieser Formeln p' und q' gefunden, so erhält man die Coordinaten p_1, q_1 des Scheitels der Projection der Parabel im Raume auf der Ebene der xy mittelst der bekannten Formeln

$$66)\quad \begin{cases} p_1=\tfrac{1}{2}(p+p'), \\ q_1=\tfrac{1}{2}(q+q'); \end{cases}$$

da nämlich der Scheitel einer Parabel jederzeit das zwischen der Directrix und dem Brennpunkte liegende Stück der Axe halbirt. Die weitere Entwickelung dieser Formeln wollen wir dem Leser überlassen.

L.

Besondere Umformungen der Gleichung der Flächen des zweiten Grades, nebst einigen Anwendungen derselben.

Von

Herrn L. Mossbrugger

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

---

1. Eine Fläche zweiten Grades, deren Gleichung

$$Az^2+By^2+Cx^2+2A'xy+2B'xz+2C'yz$$
$$+2A''z+2B''y+2C''x+D=0\;\ldots\;1.$$

ist, kann, wenn wir diejenigen Fälle unberücksichtigt lassen, in welchen sie in eine Linie des zweiten Grades, oder in ein System von zwei Geraden übergeht, nur in ein System zweier reeller oder imaginärer Ebenen degeneriren; in diesem Fall aber muss die Gleichung 1) die Form:

$$(z+ay+bx+c)\,(z+a'y+b'x+c')=0 \;.\,.\,.\,.\,.\; 2.$$

annehmen, es muss daher auch diese mit der Gleichung 1. identisch sein. Durch die Identificierung beider erhalten wir folgende Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten a, b, c, a', ...:

$$\left.\begin{array}{c} aa'=\frac{B}{A};\; bb'=\frac{C}{A};\; b+b'=\frac{2B'}{A};\; a+a'=\frac{2C'}{A};\\ c+c'=\frac{2A''}{A};\; cc'=\frac{D}{A};\; ac'+a'c=\frac{2B''}{A};\\ bc'+b'c=\frac{2C''}{A};\; ab'+a'b=\frac{2A'}{A}; \end{array}\right\} \;.\,.\,.\,.\; 3.$$

Von diesen neun Bedingungsgleichungen reichen sechs zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, a', b', c' hin, und wir erkennen sogleich, dass respective a, a'; b, b'; c, c' die Wurzeln folgender Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{c} X^2-\frac{2C'}{A}\,X+\frac{B}{A}=0\\ Y^2-\frac{2B'}{A}\,Y+\frac{C}{A}=0\\ Z^2-\frac{2A''}{A}\,Z+\frac{D}{A}=0 \end{array}\right\} \;.\,.\,.\,.\,.\; 4.$$

so dass wir also

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{C'}{A}+\frac{\sqrt{C'^2-AB}}{A},\; a'=\frac{C'}{A}-\frac{\sqrt{C'^2-AB}}{A}\\ b=\frac{B'}{A}+\frac{\sqrt{B'^2-AC}}{A},\; b'=\frac{B'}{A}-\frac{\sqrt{B'^2-AC}}{A}\\ c=\frac{A''}{A}+\frac{\sqrt{A''^2-AD}}{A},\; c'=\frac{A'}{A}-\frac{\sqrt{A''^2-AB}}{A} \end{array}\right\} \;.\,.\,.\,.\; 5.$$

haben.

Wir können aber auch die drei letzten Gleichungen in 3. unter die Form:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{2B''}{A}-(ac'+a'c)=0,\; \frac{2C''}{A}-(bc'-b'c)=0,\\ \frac{2A'}{A}-(ab'-a'b)=0 \end{array}\right\} \;.\,.\,.\,.\; 6.$$

bringen. Diese sind nur in dem einzigen Fall wahr, wenn die Gleichung 1. ein System zweier Ebenen ausdrückt; in allen übrigen Fällen werden die Verbindungen der Grössen auf der linken

Seite des Gleichheitszeichens dieser Gleichungen nicht gleich Null sein, sondern andere reelle oder imaginäre Werthe haben. Bezeichnen wir diese respective mit p'', p''', p', so haben wir allgemein:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{2B'}{A}-(ac'-a'c)=p''; \quad \frac{2C'}{A}-(bc'-b'c)=p''';\\ \frac{2A'}{A}-(ab'-a'b)=p'\end{array}\right\}\ldots\ldots 7.$$

Dadurch geht aber die Gleichung 1. in folgende über:

$$(z+ay+bx+c)\,(z+a'y+b'x+c')$$
$$+p'xy+p''y+p'''x=0\ldots\ldots 8.$$

Diese Gleichung kann, wie wir so eben gezeigt haben, jede Fläche zweiten Grades ausdrücken.

II. Führen wir die in I. 5. gefundenen Werthe von a, b, c, a', ... in die Gleichungen 7. ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}p'=\frac{2\{AA'-B'C'\pm\sqrt{(B'^2-AC)\,(C'^2-AB)}\}}{A^2}\\ p''=\frac{2\{AB'-A'C'\pm\sqrt{(C'^2-AB)\,(A'^2-AD)}\}}{A^2}\\ p'''=\frac{2\{AC'-A'B'\pm\sqrt{(B'^2-AC)\,(A'^2-AD)}\}}{A^2}\end{array}\right\}\ldots\ldots 9.$$

Daher folgt auch, dass die Gleichung I. 1. ein System zweier reellen oder imaginären Ebenen ausdrückt, wenn diese Werthe von p', p'', p''' gleich Null sind.

Betrachten wir die Gleichungen in I., 3. etwas genauer, so ist uns klar, dass zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, ... nicht beliebige sechs von jenen neun Gleichungen ausgelesen werden können, sondern dass eine solche Wahl getroffen werden muss, dass jeder von jenen Coefficienten zum wenigsten in zwei von den sechs zu wählenden Bestimmungsgleichungen vorkommt; dass daher eine allgemeine umgeformte Gleichung für die Flächen des zweiten Grades nicht nur allein die Form 8. haben kann. Wie viele, und welches diese Formen sind, wollen wir jetzt untersuchen. Setzen wir daher, um abzukürzen:

den Buchstaben 𝔄 statt der Gleichung $aa'=\frac{B}{A}$;

- - 𝔅 - - - $bb'=\frac{C}{A}$;

- - ℭ - - - $cc'=\frac{D}{A}$;

- - 𝔞 - - - $a+a'=\frac{2C'}{A}$;

- - 𝔟 - - - $b+b'=\frac{2B'}{A}$;

- - 𝔠 - - - $c+c'=\frac{2A'}{A}$;

die Buchstaben $(\alpha\beta)$ statt der Gleichung $ab'+a'b=\frac{2A'}{A}$;

- - $(\alpha\gamma)$ - - - $ac'+a'c=\frac{2B''}{A}$;

- - $(\beta\gamma)$ - - - $bc'+b'c=\frac{2C'''}{A}$;

und bemerken besonders, dass jede der Grössen a, b, c, ... wenigstens in zwei von den sechs auszuwählenden Gleichungen vorkommen muss, so ergeben sich uns folgende Combinationen jener sechs Gleichungen, die den eben gestellten Forderungen genügen.

$$\mathfrak{ABCabc} \ldots\ldots \text{I}'.$$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{ABCab}\left\{\begin{matrix}(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)\end{matrix}\right.;\quad \mathfrak{ABCac}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\\(\beta\gamma)\end{matrix}\right.;\quad \mathfrak{ABCbc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\\(\alpha\gamma)\end{matrix}\right.;\\ \mathfrak{ABabc}\left\{\begin{matrix}(\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)\end{matrix}\right.;\quad \mathfrak{ACabc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\\(\beta\gamma)\end{matrix}\right.;\quad \mathfrak{BCabc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\\(\alpha\gamma)\end{matrix}\right.;\end{matrix}\right\}\ldots\ldots \text{II}'.$$

$$\mathfrak{ABCa}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.;\quad \mathfrak{ABCb}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma)\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.;\quad \mathfrak{ABCc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right\}\ldots\ldots \text{III}'.$$

$$\mathfrak{ABC}\ (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\ (\beta\gamma);\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV}'.$$

$$\mathfrak{ABab}\ (\alpha\gamma)\ (\beta\gamma);\quad \mathfrak{ABac}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.\quad \mathfrak{ABbc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\ldots\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right\}\ldots\ldots \text{V}'.$$

$$\mathfrak{ACac}\ (\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\quad \mathfrak{ACab}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.\quad \mathfrak{ACbc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma)\ldots\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right\}\ldots\ldots \text{VI}'.$$

$$\mathfrak{BCbc}\ (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma);\quad \mathfrak{BCab}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.\quad \mathfrak{BCac}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right\}\ldots \text{VII}'.$$

$$\mathfrak{Aabc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.\quad \mathfrak{Babc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right.\quad \mathfrak{Cabc}\left\{\begin{matrix}(\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\\(\alpha\beta)\ (\beta\gamma);\ldots\\(\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\end{matrix}\right\}\ldots \text{VIII}'$$

$$\mathfrak{abc}\ (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\ (\beta\gamma)\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IX}'.$$

Die Anzahl dieser Verbindungen sind in:

$$\begin{matrix}\text{I}'.; & \text{II}'.; & \text{III}'.; & \text{IV}'.; & \text{V}'.;\\ 1; & 2.\,\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}; & 3.\,\frac{3.2}{1.2}; & \frac{3.2.1}{1.2.3}; & \left\{\frac{3.2.1}{1.2.3}+2.\frac{3.2}{1.2}\right\};\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\text{VI}'.; & \text{VII}'.; & \text{VIII}'.; & \text{IX}'.\\ \left\{\frac{3.2.1}{1.2.3}+2.\frac{3.2}{1.2}\right\}; & \left\{\frac{3.2.1}{1.2.3}+2.\frac{3.2}{1.2}\right\}; & 3.\,\frac{3.2}{1.2}; & 1.\end{matrix}$$

Diese 54 Bestimmungsarten der Coefficienten a, b, c, a', ... lassen eben so viele Formen zu, unter welche die Gleichung I. 1. gebracht werden kann. Bezeichnen wir daher $z+ay+bx+c$ mit M und $z+a'y+b'x+c'$ mit N, so sind diese Gleichungsformen folgende:

1') $MN+p'xy+p''z+p'''x=0;$

2') $MN+p'xy+p''z+p'''y=0;$

3') $MN+p'xz+p''y+p'''x=0;$

4') $MN+p'xz+p''xy+p'''x=0;$

5') $MN+p'yz+p''y+p'''x=0;$

6') $MN+p'yz+p''xy+p'''x=0;$

7') $MN+p'y+p''x+p'''=0;$

8') $MN+p'xy+p''x+p'''=0;$

9') $MN+p'x^2+p''y+p'''x=0;$

10') $MN+p'x^2+p''xy+p'''y=0;$

11') $MN+p'y^2+p''y+p'''x=0;$

12') $MN+p'y^2+p''xy+p'''x=0;$

13') $MN+p'xz+p''z+p'''x=0;$

14') $MN+p'xz+p''z+p'''y=0;$

15') $MN+p'xz+p''xy+p'''z=0;$

16') $MN+p'yz+p''z+p'''x=0;$

17') $MN+p'yz+p''z+p'''y=0;$

18') $MN+p'yz+p''xy+p'''z=0;$

19') $MN+p'yz+p''xz+p'''x=0;$

20') $MN+p'yz+p''xz+p'''y=0;$

21') $MN+p'yz+p''xz+p'''xy=0;$

22') $MN+p'yz+p''xz+p'''z=0;$

23') $MN+p'xy+p''z+p'''=0;$

24') $MN+p'xz+p''x+p'''=0;$

25') $MN+p'xz+p''y+p'''=0;$

26') $MN+p'xz+p''xy+p'''=0;$

27') $MN+p'yz+p''x+p'''=0;$

28') $MN+p'yz+p''y+p'''=0;$

29') $MN+p'yz+p''xy+p'''=0;$

30') $MN+p'x^2+p''xz+p'''y=0;$

31') $MN+p'x^2+p''z+p'''x=0;$

32') $MN+p'x^2+p''z+p'''y=0;$

33') $MN+p'x^2+p''xy+p'''z=0;$

34') $MN+p'x^2+p''yz+p'''x=0;$

35′) $MN + p'x^2 + p''yz + p'''y = 0;$

36′) $MN + p'x^2 + p''xy + p'''yz = 0;$

37′) $MN + p'y^2 + p''yz + p'''x = 0;$

38′) $MN + p'y^2 + p''z + p'''x = 0;$

39′) $MN + p'y^2 + p''z + p'''y = 0;$

40′) $MN + p'y^2 + p''xy + p'''z = 0;$

41′) $MN + p'y^2 + p''xy + p'''x = 0;$

42′) $MN + p'y^2 + p''xz + p'''y = 0;$

43′) $MN + p'y^2 + p''xz + p'''xy = 0;$

44′) $MN + p'x^2 + p''x + p''' = 0;$

45′) $MN + p'x^2 + p''y + p''' = 0;$

46′) $MN + p'x^2 + p''xy + p''' = 0;$

47′) $MN + p'y^2 + p''x + p''' = 0;$

48′) $MN + p'y^2 + p''y + p''' = 0;$

49′) $MN + p'y^2 + p''xy + p''' = 0;$

50′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p'''x = 0;$

51′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p'''y = 0;$

52′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p'''xy = 0;$

53′) $MN + p'y^2 + p''x^2 + p''' = 0;$

54′) $MN + p'xy + p''y + p'''x = 0.$

In jeder dieser Gleichungen haben jedoch die Coefficienten p', p'', p''' wieder andere Werthe, welche jedesmal ähnlich wie die bei I. 7, 8, und II. 9, bestimmt werden müssen.

III. Wir wollen untersuchen, zu welchen Resultaten diese Umwandlungen der allgemeinen Gleichung I. 1. der Flächen des zweiten Grades führen können, und daher jene auf die Bestimmung der Durchschnittscurven zweier solcher Flächen anwenden.

Es seien daher:

$$\left.\begin{array}{r} z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz \\ + 2A''z + 2B''y + 2C''x + D = 0 \end{array}\right\} \ldots . 10.$$

$$\left.\begin{array}{r} z^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}x^2 + 2\mathfrak{A}'xy + 2\mathfrak{B}'xz + 2\mathfrak{C}'yz \\ + 2\mathfrak{A}''z + 2\mathfrak{B}''y + 2\mathfrak{C}''x + \mathfrak{D} = 0 \end{array}\right\} \ldots . 11.$$

die Gleichungen zweier solcher Flächen, welche wir wie in I unter die Formen:

$$\left.\begin{array}{r} (z + ay + bx + c)\,(z + a'y + b'x + c') \\ + p'xy + p''y + p'''x = 0 \end{array}\right\} \ldots . 12.$$

$$\left.\begin{array}{r} (z + \alpha y + \beta x + \gamma)\,(z + \alpha'y + \beta'x + \gamma') \\ + \pi'xy + \pi''y + \pi'''x = 0 \end{array}\right\} \ldots . 13.$$

gebracht haben, und wo die Coefficienten a, b, c, a', b'. c', p', p'', p''' hier von den in I. 5. und II. 9. gefundenen Werthen nur darin verschieden sind, dass in diesen $A=1$ gesetzt werden muss, um die Werthe von jenen zu erhalten. Die Werthe von α, β, γ, α', β', γ', π', π'', π''' ergeben sich aus jenen von a, b, c, u. s. w., wenn wir respective $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, u. s. w. statt B, C, A', u. s. w. schreiben.

Machen wir bei den Gleichungen 12. und 13. die Bedingungen dass:

$$p'=\pi',\ p''=\pi'',\ p'''=\pi''' \Big\} \ldots . 14.$$

sei, so lassen sich diese nach II. 9. auch durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}''-B'A''+C''-\mathfrak{C}''\pm\sqrt{(B'^2-C)(A''^2-D)}\\ \mp\sqrt{(\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C})(\mathfrak{A}''^2-\mathfrak{D})}\end{array}\right\}=0\ldots 15.$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}''-C'A''+B''-\mathfrak{B}''\pm\sqrt{(C'^2-B)(A''^2-D)}\\ \mp\sqrt{(\mathfrak{C}'^2-\mathfrak{B})(\mathfrak{A}''^2-\mathfrak{D})}\end{array}\right\}=0\ldots 16.$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'-B'C'+A'-\mathfrak{A}'\pm\sqrt{(B'^2-C)(C'^2-B)}\\ \mp\sqrt{(\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{C})(\mathfrak{C}'^2-\mathfrak{B})}\end{array}\right\}=0\ldots 17.$$

Wir erhalten unter den in 14. oder 15. 16. 17. gegebenen Bedingungen, durch Subtraktion der Gleichungen 12. und 13. folgende:

$$\left.\begin{array}{r}(z+ay+bx+c)\ (z+a'y+b'x+c')\\ -(z+\alpha y+\beta x+\gamma)\ (z+\alpha'y+\beta'x+\gamma')\end{array}\right\}=0\ldots 18.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn zugleich:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{a) } z+ay+bx+c=0 & \text{und} & z+\alpha y+\beta x+\gamma=0\\ \text{b) } z+a'y+b'x+c'=0 & \text{-} & z+\alpha'y+\beta'x+\gamma'=0\\ \text{c) } z+ay+bx+c=0 & \text{-} & z+\alpha'y+\beta'x+\gamma'=0\\ \text{d) } z+a'y+b'x+c'=0 & \text{-} & z+\alpha y+\beta x+\gamma=0\end{array}\right\}\ldots 19.$$

ist; je zwei zusammengehörige dieser Gleichungen drücken die reelle oder imaginäre Durchschnittslinie zweier Ebenen aus, eine solche Durchschnittslinie befindet sich daher auf der durch die Gleichung 18. ausgedrückten Fläche, diese enthält auch alle Durchschnittslinien der Flächen 12. und 13.

IV. Durch die Annahme irgend einer der vier Bedingungen in III. 19.; werden die Gleichungen 12. und 13. auf folgende reducirt:

$$\left.\begin{array}{r}p'xy+p''y+p'''x=0\\ \pi'xy+\pi''y+\pi'''x=0\end{array}\right\}\ldots . 20.$$

Diese sind aber wegen der Bedingung III. 15. identisch, und jede befriedigt sowohl die Gleichung 12. als 13. Es drückt die Gleichung 20) einen hyperbolischen Cylinder aus, dessen Achse mit der Achse der z parallel ist, und dessen Basis in der Ebene der xy liegt.

Beide Flächen 12. und 13. werden sich daher auch auf der Oberfläche dieses Cylinders schneiden. Da wir unbeschadet der Gleichungen 15. 16. und 17. den Coefficienten der Gleichung 13. noch verschiedene Werthe beilegen können, welche doch den letztgenannten genügen, so geht daraus hervor: Dass es viele Flächen zweiten Grades giebt, die sich unter den in 15. 16. und 17. ausgedrückten Bedingungen auf der Oberfläche des Cylinders 20. schneiden, und dass ferner je zwei jener Flächen sich jedesmal noch in einer andern Fläche zweiten Grades durchdringen, deren Gleichung die Form 18. hat; und dass endlich auch jener Cylinder 20. die letztern Flächen in solchen Curven schneiden wird, die zugleich Durchschnittscurven der ersterwähnten Flächen sein werden.

V. Betrachten wir die Gleichungen von 1'. bis 54'. in II., so können wir ohne ähnliche Untersuchungen zu widerholen, folgende Resultate herleiten:

a) Es können mittelst der Gleichungen II. 1'. 2'. 3'. 5'. 6'. 14'. 15'. 16'. 18'. 19'. 20'. 21'. 23'. 25'. 26'. 27'. 29'. 30'. 32'. 33'. 35'. 36'. 37'. 38'. 40'. 41'. 42'. 43'. wie in IV. Systeme von Flächen des zweiten Grades gefunden werden, welche sich alle auf einer Fläche zweiten Grades (Ortsfläche) schneiden, und es werden sich von diesen auf ähnliche Art wie bei den in IV. bestimmten Flächen, je zwei noch auf einer andern Fläche zweiten Grades schneiden, die vorhin genannte Ortsfläche, und je eine dieser letztern werden durch die, mittelst der gehörigen Annahmen bestimmten Flächen, charakterisirt.

b) Ebenso können aus jeder der Gleichungen II. 8'. 9'. 10'. 11'. 12'. 13'. 17'. 24'. 28'. 31'. 39'. 45'. 47'. 49' 50'. 51'. 52'. 53'. 54'. Systeme von Flächen des zweiten Grades gefunden werden, welche sich alle auf einem Cylinder (Ortscylinder) zweiten Grades schneiden, auch werden sich von den Flächen dieses Systems je zwei noch auf einer andern Fläche zweiten Grades schneiden.

c) Ferner können mittelst der Gleichung II. 4'. Flächen gefunden werden, deren sämmtliche Durchschnittscurven in zwei Ebenen liegen, von welchen eine die Ebene der yz ist, und die andere durch die Achse der x geht. Die Gleichungen 7'. und 22'. dienen zur Bestimmung von Flächen, deren erstere sich auf einer durch die Achse der z gehenden Ebene, und die letztern sich auf der Ebene xy, und in einer durch die Achse der z gehenden Ebene durchdringen. Endlich lassen sich mittelst der Gleichungen II. 44'. 48'. Flächensysteme bestimmen, von welchen die Durchschnittscurven der erstern in zwei mit der Ebene der yz parallelen Ebenen liegen; die Durchschnittscurven der letztern sich aber in zwei mit der Ebene der xz parallelen Ebenen befinden. In allen diesen in c) angegebenen Fällen muss die Fläche III. 18. in eine Ebene degeneriren.

VI. Wir wollen schliesslich noch zeigen, dass die Bedingungsgleichungen in III. 15. 16. 17. identisch sind mit jenen, welche wir erhalten, wenn wir die Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichungen von den Flächen III. 10. und 11. oder III. 12. und 13. aufsuchen, welche statt finden müssen, wenn beide Flächen zugleich, von zwei sich schneidenden Ebenen berührt werden sollen.

Da wir bei den vorhergehenden Untersuchungen über die Wahl der Coordinatenebenen keine besondere Bestimmungen ge-

macht haben, so können wir jetzt die Ebenen der xz und yz so wählen, dass sie die Fläche III. 10. oder III. 12. berühren. Wir finden für die Gleichung des Schnitts der Ebene der xz mit der Fläche 10. folgende:

$$z^2 + Cx^2 + 2B'xz + 2A''z + 2C''x + D = 0 \quad \ldots .\ 21.$$

Soll die durch diese Gleichung ausgedrückte Curve in einen Punkt (den Berührungspunkt), oder in ein System zweier Geraden (in welchen ebenfalls eine Ebene von einer Fläche zweiten Grades berührt werden kann) degeneriren, so muss bekanntlich im ersten Fall:

$$\left.\begin{array}{l} B'^2 - C < 0 \\ \text{und} \\ (B'A'' - C'')^2 - (B'^2 - C)(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots .\ 22.$$

und im zweiten Fall:

$$\left.\begin{array}{l} B'^2 - C > 0 \\ (B'A'' - C'')^2 - (B'^2 - C)(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots .\ 23.$$

sein; diese Relationen müssen zwischen den Coefficienten der Gleichung 10. statt finden, wenn die durch sie ausgedrückte Fläche von der Ebene der xz berührt werden soll. Ebenso erhalten wir für die Bedingungen, dass die Ebene der yz von der Fläche 10. in einem Punkt tangirt werden muss, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} C'^2 - B < 0 \\ (C'A'' - B'')^2 - (C'^2 - B)(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots .\ 24.$$

und, dass die Fläche 10. von der Ebene der yz in einem System zweier Geraden berührt werden soll:

$$\left.\begin{array}{l} C'^2 - B > 0 \\ (C'A'' - B'')^2 - (C'^2 - B)(A''^2 - D) = 0 \end{array}\right\} \ldots .\ 25.$$

Endlich ist bekanntlich die Gleichung einer Ebene, die einen Kegel in einem Punkte (x', y', z') berührt, folgende:

$$\left.\begin{array}{r} (z' + C'y' + B'x')z + (C'z' + By' + A'x')y \\ + (B'z' + A'y' + Cx')x = 0 \end{array}\right\} \ldots .\ 26.$$

wo die berührte Kegelfläche selbst durch die Gleichung:

$$z^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz = 0 \quad \ldots .\ 27.$$

ausgedrückt ist.

Der Gleichung 26. wird aber Genüge geleistet, wenn

$$z' + C'y' + B'x' = 0;\ C'z' + By' + A'x' = 0;$$
$$B'z' + A'y' + Cx' = 0$$

ist. Eliminiren wir aus diesen Gleichungen x', y', z', so erhalten wir zwischen den Coefficienten B, C, A', u. s. w. folgende Bedingungsgleichung:

$$(B'C' - A')^2 - (B'^2 - C)(C'^2 - B) = 0 \;\ldots\; 28.$$

Auf gleiche Art erhalten wir, wenn wir bei der Fläche 11. die gleichen Bestimmungen machen, wie so eben bei der Fläche 10., und ebenfalls einen Kegel annehmen, dessen Gleichung:

$$z^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}x^2 + 2\mathfrak{A}'xy + 2\mathfrak{B}'xz + 2\mathfrak{C}'yz = 0 \;\ldots\; 29.$$

ist, und diesen von einer Ebene berühren lassen, folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C} < 0 \\ (\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{C}'')^2 - (\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0 \end{array}\right\} \ldots\; 30.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C} > 0 \\ (\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{C}'')^2 - (\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0 \end{array}\right\} \ldots\; 31.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B} < 0 \\ (\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'')^2 - (\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0 \end{array}\right\} \ldots\; 32.$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B} > 0 \\ (\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'')^2 - (\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D}) = 0 \end{array}\right\} \ldots\; 33.$$

$$(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}')^2 - (\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B}) = 0 \;\ldots\; 34.$$

Aus den Gleichungen 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. erhalten wir auch:

$$B'A'' - C'' \mp \sqrt{(B'^2 - C)(A''^2 - D)} = 0$$
$$C'A'' - B'' \mp \sqrt{(C'^2 - B)(A''^2 - D)} = 0$$
$$B'C' - A' \mp \sqrt{(B'^2 - C)(C'^2 - B)} = 0$$
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{C}'' \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})} = 0$$
$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'' \mp \sqrt{(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})} = 0$$
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}' \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{D})} = 0.$$

Ziehen wir die erste dieser Gleichungen von der vierten, die zweite von der fünften, und die dritte von der sechsten ab, so erhalten wir folgende:

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'' - B'A'' + C'' - \mathfrak{C}'' \pm \sqrt{(B'^2 - C)(A''^2 - D)} \\ \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})} \end{array}\right\} = 0 \ldots\; 35.$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{C}'\mathfrak{A}'' - C'A'' + B'' - \mathfrak{B}'' \pm \sqrt{(C'^2 - B)(A''^2 - D)} \\ \mp \sqrt{(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})(\mathfrak{A}''^2 - \mathfrak{D})} \end{array}\right\} = 0 \ldots\; 36.$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{B}'\mathfrak{C}' - B'C' + A' - \mathfrak{A}' \pm \sqrt{(B'^2 - C)(C'^2 - B)} \\ \mp \sqrt{(\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{C})(\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{B})} \end{array}\right\} = 0 \ldots\; 37.$$

Diese Gleichungen sind aber die nemlichen, welche wir in III. 15. 16. 17. gefunden haben. Wir sehen also, dass die in II., III. und IV. gefundenen Sätze von den Bedingungen abhängig sind, dass die Flächen in III. 10. 11. oder III. 12. 13. zugleich von den Ebenen der xz und yz berührt werden. Die Gleichung 37. drückt die Bedingung aus, dass die beiden Kegel in 27. und 29. von den respectiven Flächen 10. und 11. Asymptotenkegel sein müssen. Dieses Wenige wird hinreichend sein, um zu zeigen, wie mannigfach sich die Untersuchungen über die Flächen des zweiten Grades mittelst der in II. gegebenen Umformungen der allgemeinen Gleichung dieser Flächen vervielfältigen lassen.

LI.

Synthetischer Beweis der Incommensurabilität zweier Geraden, die sich wie $\sqrt{3}:1$ verhalten.

Von

Herrn Professor C. A. Bretschneider

in Gotha.

Synthetische Beweise der Incommensurabilität zweier gerader Linien sind für den Unterricht in der Geometrie immer von Nutzen, und es ist nur zu bedauern, dass deren, so viel mir bekannt, nur erst zwei vorhanden sind, von denen der eine das Verhältniss der Diagonale des Quadrates zu dessen Seite, der andere das Verhältniss des Kreishalbmessers zur Seite des eingeschriebenen Zeheneckes betrifft. Ich hoffe daher, dass der nachfolgende Beweis der Incommensurabilität der Seite des gleichseitigen Dreieckes und seines Höhenperpendikels den Lehrern der Geometrie nicht unerwünscht sein wird.

Es sei ABC (Taf. V. Fig. 7.) ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel an der Grundlinie 30° beträgt, so ist bekannt, dass AB als Seite eines gleichseitigen Dreieckes und AC als $\frac{2}{3}$ des zu ihm gehörigen Höhenperpendikels betrachtet werden kann, und demgemäss das Verhältniss $AB:AC=\sqrt{3}:1$ stattfindet. Man mache nun

$$\begin{array}{lll} BB_1 = BC & \text{ziehe } B_1C_1 \perp AC & \text{ferner} \\ C_1B_2 = B_1C_1 & \text{-} \quad B_2C_2 \perp AB_1 & \text{ferner} \\ C_2B_3 = B_2C_2 & \text{-} \quad B_3C_3 \perp AB_2 & \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & \end{array}$$

so lässt sich leicht nachweisen, dass

$$\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}AB_1 = B_1C_1 = CC_1 = C_1B_2 \text{ also auch} \\ \tfrac{1}{2}AB_2 = B_2C_2 = C_2B_3 \\ \tfrac{1}{2}AB_3 = B_3C_3 = C_3B_4 \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

ingleichen, dass ferner auch:

$$\begin{array}{r} 2AC > AB > AC \\ AC > AB_1 > AC_1 \\ \tfrac{1}{2}AB_1 > AB_2 > AC_2 \\ \tfrac{1}{2}AB_2 > AB_3 > AC_3 \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

sein muss. Es finden daher nothwendig folgende Gleichungen statt:

$$\begin{array}{lll} AB = AC + AB_1 & \text{oder:} & AB = AC + AB_1 \\ AC = 2C_1B_2 + AB_2 & & AC = AB_1 + AB_2 \\ \tfrac{1}{2}AB_1 = 2C_2B_3 + AB_3 & & AB_1 = 2AB_2 + 2AB_3 \\ \tfrac{1}{2}AB_2 = 2C_3B_4 + AB_4 & & AB_2 = 2AB_3 + 2AB_4 \\ \text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Es folgt hieraus, dass die Messung der Grundlinie AB durch den Schenkel AC immerfort einen Rest lässt, wie weit man auch die Theilung jedes vorangehenden Restes durch den nächstfolgenden fortsetzen mag, d. h. dass Grundlinie und Schenkel incommensurabel sind. Bildet man aus den vorstehenden Gleichungen auf bekannte Weise einen Kettenbruch, so findet man

$$\frac{AB}{AC} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \text{etc.}}}}} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}$$

wie aus anderen Gründen bereits bekannt ist. Der geometrische Beweis des vorliegenden Verfahrens wird sich für Anfänger am leichtesten gestalten, wenn man nach den Mittelpunkten $D_1 D_2$ u. s. w. der Abschnitte AB_1 AB_2 u. s. w. die Geraden C_1D_1, C_2D_2 u. s. w. zieht. Denn dann ergiebt sich augenblicklich, dass die Dreiecke

$B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$ u. s. w. gleichseitig

AC_1D_1, AC_2D_2 u. s. w. gleichschenklig

und ausserdem $ABC \sim AC_1D_1 \sim AC_2D_2 \sim$ u. s. w. sein müssen.

LII.

Algebraische Lehrsätze, welche zu beweisen sind.

Von

Herrn Doctor O. Schlömilch

zu Weimar.

Für jedes gerade m ist immer

$$0 = 1 - \frac{m^2}{2^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2^2 \,.\, 4^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2} + \ldots \quad 1)$$

ferner

$$\left.\begin{array}{l} 2m(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{m-1})(-1)^{\frac{m}{2}+1} \\ = \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)}{1^2 \,.\, 3^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2} - \ldots \end{array}\right\} 2)$$

Für ein ungerades m gelten dagegen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1 - \frac{m^2-1^2}{2^2} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^2 \,.\, 4^2} \\ \qquad - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2} + \ldots \end{array}\right\} 3)$$

$$1 = \frac{m^2}{1^2} - \frac{m^2(m^2-1^2)}{1^2 \,.\, 3^2} + \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2} - \ldots\ldots \quad 4)$$

Sämmtliche Reihen werden so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbrechen.

Nimmt man für m einen beliebigen Bruch, so werden die Reihen unendlich und ihre Summen hängen dann von transcendenten Grössen ab; welche sind diese?

Für jedes beliebige α und β ist:

$$\left.\begin{aligned}1+\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\ldots+\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}\\ =\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left[1-\frac{\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n)}\right]\end{aligned}\right\}5).$$

Ein spezieller Fall dieser Summirung ist bekannt. Wenn nämlich $\beta<\alpha$, so ist $\frac{\beta}{\alpha}$ ein ächter Bruch, und ebenso sind $\frac{\beta+1}{\alpha+1}$, $\frac{\beta+2}{\alpha+2}, \ldots \frac{\beta+n}{\alpha+n}$ ächte Brüche. Geht man daher zur Gränze für wachsende n über, so wird die linke Seite eine unendliche Reihe und auf der rechten nähert sich die Grösse

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta+1}{\alpha+1}\ldots\frac{\beta+n}{\alpha+n}$$

als ein Produkt unendlich vieler ächter Brüche der Null. Man hat daher

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=1+\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\ldots \text{ in inf., } \alpha>\beta, \ldots 6)$$

wie auch der Herr Herausgeber des Archivs in einem Aufsatze in Crelle's Journal angegeben hat.

Bezeichnen wir die Binomialkoeffizienten irgend eines Exponenten μ mit μ_0, μ_1, μ_2 u. s. w. so ist für jedes α und β:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_0}{\beta+1}-\frac{\alpha_1}{\beta+2}+\frac{\alpha_2}{\beta+3}-\ldots\ldots\\ =\frac{\beta_0}{\alpha+1}-\frac{\beta_1}{\alpha+2}+\frac{\beta_2}{\alpha+3}-\ldots\ldots\end{aligned}\right\}7).$$

Ist eine der Zahlen α, β ganz und positiv, die andere nicht, so führt obige Gleichung die Summe einer unendlichen Reihe auf die einer endlichen zurück.

Ist n eine ganze positive Zahl, α eine beliebige Grösse, so hat man

$$\left.\begin{aligned}\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{\alpha+1.\alpha+2\ldots\ldots\alpha+n}\\ =\frac{1.\alpha+n+1}{\alpha+1.n+1}\cdot\frac{2.\alpha+n+2}{\alpha+2.n+2}\cdot\frac{3.\alpha+n+3}{\alpha+3.n+3}\ldots\end{aligned}\right\}8)$$

eine Relation zwischen dem Werthe eines endlichen und eines unendlichen Produkts. (Die Punkte vertreten der Kürze wegen die Stelle der Parenthesen.)

LIII.

Verschiedene Bemerkungen.

Von

Herrn R. Wolf

Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Bern.

I. Trotz dem, dass in neuerer Zeit die harmonischen Eigenschaften allgemach Eingang in den geometrischen Unterricht finden, habe ich noch in keinem Lehrbuche der Physik den folgenden Satz gefunden: Beim sphärischen Hohlspiegel sind Bild und Gegenstand, in Beziehung auf Mitte und Mittelpunkt des Spiegels als zugeordnete Punkte, einander harmonisch zugeordnet, — einen Satz, aus dem meine Schüler seit Jahren mit der grössten Leichtigkeit sich Rechenschaft über das Spiegelbild geben, — weit leichter als aus der überall mitgetheilten Formel, aus welcher dieser Satz unmittelbar erhalten wird.

II. Praktisch nicht unwichtig ist die Aufgabe: 4 Punkte A, B, C, D (Taf. V. Fig. 8.) liegen in einer Geraden; man hat die Distanz a der Punkte A und B und die Distanz b der Punkte C und D gemessen, so wie die scheinbaren Distanzen α, β, γ der 4 Punkte in Beziehung auf irgend einen Punkt E. Wie gross ist die wahre Distanz x der Punkte B und C. Sehr leicht ergiebt sich die Lösung auf folgendem Wege: Nach den ersten Lehren von den projectivischen Eigenschaften (siehe meine Lehre von den geradlinigen Gebilden u. s. w. Pag. 56. Formel 53) erhält man

$$\frac{a}{a+b+x}:\frac{x}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}:\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

und hieraus

$$x=-\frac{a+b}{2}+\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{ab\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}}.$$

Führt man nun zur Abkürzung

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}ab}$$

ein, so erhält man ganz einfach

$$x+\frac{a+b}{2}\left[\sqrt{1+\tang^2\varphi}-1\right]=\frac{a+b}{\cos\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

III. In einem Dreiecke ace (Taf. V. Fig. 9.) werden zwei Winkel a und e durch die Linien ad und be halbirt; was für ein Dreieck ist es, wenn $ad=be$ wird? Diese Frage stellte vor einiger Zeit Herr Professor Steiner in Berlin an verschiedene Mathematiker mit der Bemerkung, dass sie gar nicht so leicht zu beantworten sei, als es zum Anfang scheine, und dieselbe kam seither auch mir zu Ohren. Es ist nun allerdings von selbst klar, dass das gleichschenklige Dreieck die durch die Frage erwähnte Eigenschaft hat, dagegen nicht so ganz leicht zu beweisen, dass kein anderes Dreieck dieselbe Eigenschaft hat. Da auch ich zuerst mehrere Wege fruchtlos fand, so will ich hier denjenigen mittheilen, der mich zum Ziele führte. Ich ging von den beiden folgenden Hülfssätzen aus:

1) Zwei Dreiecksseiten verhalten sich wie die Abschnitte, welche eine ihren Winkel hälftende Linie auf der dritten Seite bildet.

2) Das Product zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkte jener Abschnitte, vermehrt um das Quadrat der hälftenden Linie.

Nach dem ersteren Satze hat man

$$cd=\frac{ce\,.\,ac}{ac+ae},\quad cb=\frac{ac\,.\,ce}{ce+ae}.$$

Nach dem zweiten aber, mit Hülfe dieser Werthe, ist

$$ae\,.\,ac=cd(ce-cd)+ad^2=\frac{ce^2\,.\,ac\,.\,ae}{(ac+ae)^2}+ad^2$$

$$ae\,.\,ce=cb(ac-cb)+be^2=\frac{ac^2\,.\,ce\,.\,ae}{(ce+ae)^2}+be^2$$

und hieraus folgt, unter Voraussetzung dass $ad=be$,

$$ac-ce=\left[\frac{ce}{(ac+ae)^2}-\frac{ac}{(ce+ae)^2}\right]ac\,.\,ce$$

eine Gleichheit, welche nur für $ac=ce$ oder für ein gleichschenkliges Dreieck richtig ist; denn wäre z. B. $ac>ce$, so wäre auch $ac+ae>ce+ae$, und um so mehr

$$\frac{ac}{(ce+ae)^2}>\frac{ce}{(ac+ae)^2}$$

und es würde somit obige Gleichheit die Ungereimtheit $+=-$ geben.

IV. Ganz kürzlich habe ich eine von Praktikern angewandte Rectification des Kreises in Erfahrung gebracht, welche mir gar nicht übel scheint: Man halbire die Sehne ab (Taf. V. Fig. 10.) des Viertelkreises in c und ziehe cd, so ist cd nahe gleich der Länge des Viertelkreises. Für den Halbmesser 1 ist nämlich $cd=1{,}581$ statt $=1{,}571$. Wenn also der Radius gleich einem Fuss, so beträgt der Fehler erst eine Linie, und man kann sich

sogar leicht die Regel merken, für jeden Fuss eine Linie abzuziehen.

V. **Aufgabe für Schüler.** Es soll eine einfache Construction angegeben werden, nach der man ein Dreieck erhalten kann, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich und dem Inhalte nach $n$fach, n mag eine ganze Zahl oder ein Bruch sein.

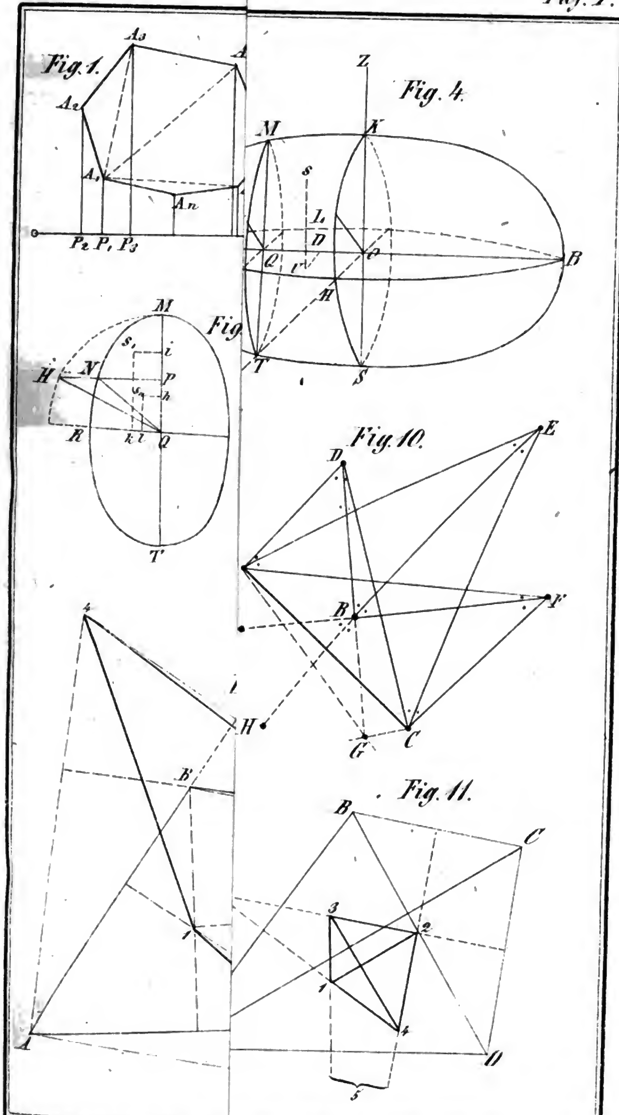
VI. Das beste Werk in seiner Art scheint mir folgendes zu sein: Geometrische Constructionen von F. von Ehrenberg. Frankfurt a. M. 1841 fol. Merkwürdig ist aber die Einleitung zu jenem Werke zu lesen, und zugleich zu wissen, dass jenes Werk eine getreue Copie eines Constructionswerkes ist, welches vor vielen Jahren der bekannte Ingenieur-Oberst H. von Pestalozzi aus Zürich für seinen Privatgebrauch anlegte, und dann vor einigen Jahren auf unerklärliche Weise verlor.

VII. Nichts scheint mir fataler, als wenn schon in den Elementen einer strengen Wissenschaft dieselbe Sache verschieden benannt, ja derselbe Name für verschiedene Sachen gebraucht wird.

Für den Winkel, den zwei Ebenen mit einander bilden, habe ich nie einen andern Namen gebraucht als den: Flächenwinkel. Ich könnte ihn heissen Ebenen-Winkel, könnte dieser Name nicht so leicht mit ebener Winkel verwechselt werden. Ich könnte ihn auch allenfalls heissen Winkel an der Kante, nicht eben gerne Kante selbst. — Nun nennen ihn zwar Flächenwinkel: Steiner, Thibaut, Pross, Hohl, Külp, Ohm, Grüson, u. s. w. Dagegen nennen ihn: Keil, Umpfenbach; Raumeckenwinkel Crelle; Neigungswinkel zweier Ebenen Mollweide, Grunert, Blum, Kries, Vega, u. s. w.; Kante Rose, Hasselt, Klügel, Mohs, u. s. w. sogar Kantenwinkel Naumann.

Den Winkel zweier Kanten nenne ich den Regeln der deutschen Sprache gemäss Kantenwinkel. Ebener Winkel ist mir nicht bezeichnend genug dafür, und rückwärts wieder zu ähnlich mit Ebenen-Winkel. Eben so wenig Linienwinkel, und wenn dieser Name gebraucht werden soll, so ist es besser ihn zu gebrauchen für den einem Flächenwinkel als Maass entsprechenden Winkel. — Nun nennen ihn zwar Kantenwinkel Steiner, Pross, Külp, u.s.w. Dagegen Ebener Winkel Mollweide, Hohl, Grunert, Blum, u. s. w.; Linienwinkel Ohm, Tellkampf, u. s. w.

Ich bin bereit Ansichten anderer Geometer über diese Namen zu berücksichtigen, wenn nur eine Stimme vorherrschend bleibt, und diesem Unfug ein Ende macht.


Fig. 1.
A3
A2
A1
An
P2 P1 P3
Fig. 4.
Z
M
K
L
D
Q
C
B
H
T
S
M
N
H
P
h
i
R
k l
Q
T
Fig. 10.
D
E
B
F
H
G
C
Fig. 11.
B
C
3
2
1
4
D
5
A

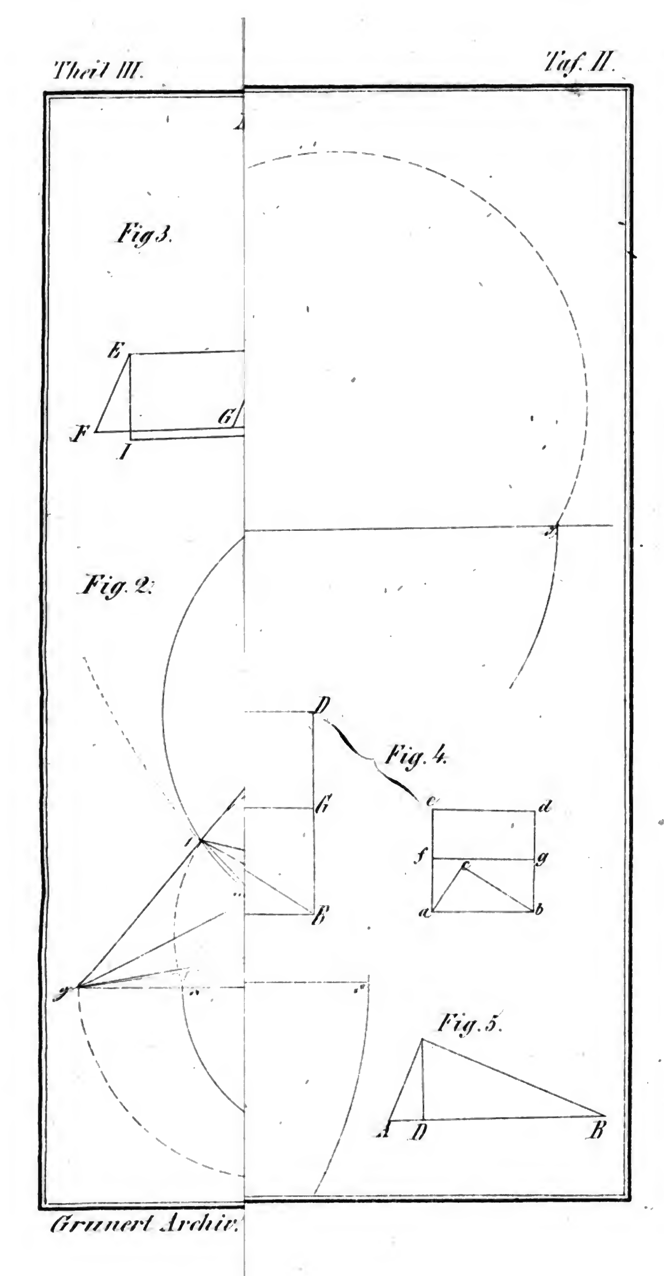

Fig 3.
E
F
I
G
Fig. 2.
D
G
E
Fig. 4.
c
d
f
g
e
a
b
Fig. 5.
A
D
B

Fig. 4.

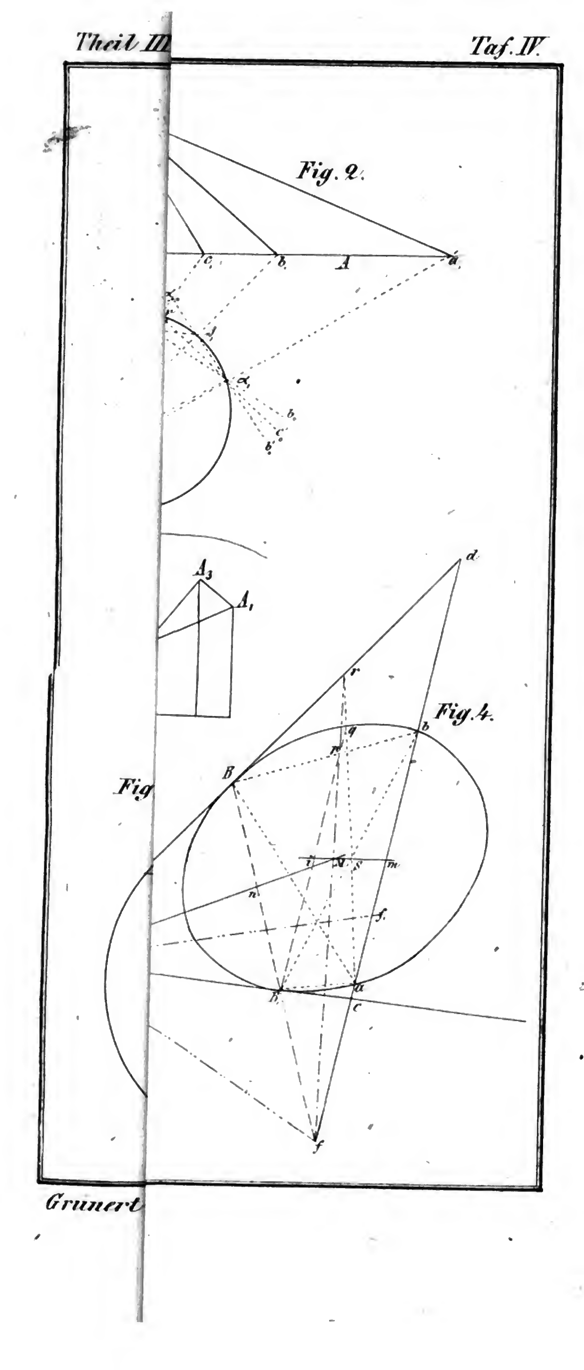
Fig. 5.

Fig.

Fig. 1

Fig. 9.

Fig. 12


Fig. 2.
Fig. 4.
Fig
Grunert

The

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 3.

Fig. 4.

Gru

